

高等学校教学用书

轴测投影学

E. A. 格拉祖诺夫 著
H. Ф. 切特维鲁新

高等教育出版社

高等学校教学用书



軸 測 投 影 学

E. A. 格拉祖諾夫 著
H. Ф. 切特維魯新
徐良佐 李漢卿 譯

高等教育出版社

本書系根据苏联國立技術理論書籍出版社出版的格拉祖諾夫 (Е. А. Глазунов) 和切特維魯新 (Н. Ф. Четверухин) 所著“軸測投影學”(Аксенометрия) 1953 年版譯出。原書經苏联文化部前高等教育署審定為高等學校教學參考書，可供高等學校中画法几何及制圖教研組的教師、研究生以及學生閱讀，並可供企業部門和設計局的工程技術人員參考。

本書以最新的仿射交換以及圖的完整性的理論為軸測投影的基礎。第一篇主要討論軸測理論問題，第二篇介紹作圖方法及說明這些方法如何應用於實際。

本書由徐良佐和李漢卿翻譯，並經武漢水利學院画法几何教研組校閱。

軸 測 投 影 學

Е. А. 格拉祖諾夫等著

徐良佐 李漢卿譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

上海奎記印刷廠印刷 新華書店總經售

書號 13010-186 開本 650×1168 1/16 印張 13 2/5 插頁 2 字數 312,000

一九五六年十二月上海第一版

一九五六年十二月上海第一次印刷

印數 1-8,700

定價(8) 1.50

目 錄

序	5
---	---

第一篇 軸測投影的一般性質

第一章 平行投影及仿射对应	7
§ 1. 在普通空間中(欧几里德空間中)的射影过程。以虛原素增补欧几里德空間	7
§ 2. 德沙格(Desarg)定理。透視共綫对应。在同一平面上兩場的調和对应	9
§ 3. 平行投影。平面場的透視仿射对应(类屬对应)及其特性	11
§ 4. 橢圓是类屬对应于圓周的曲綫	15
§ 5. 兩場仿射对应的一般情形	18
§ 6. 仿射对应場的主向。橢圓軸	22
§ 7. 兩仿射对应場的正透視位置	25
§ 8. 兩仿射对应場正透視位置定理的推論。波克—許華尔茲定理。	26
§ 9. 按已知原坐标系的軸測圖重新定出空間的原坐标系	30
§ 10. 空間的透視仿射变换。主向。橢圓球	33
§ 11. 空間点的仿射对应的一般情形。使兩個仿射空間达到平行透視位置	38
第二章 投影圖的軸測問題	41
§ 12. 完整圖像	41
§ 13. 平行軸測法	47
§ 14. 关于按照原形的軸測圖像重新定出原形的問題	51
§ 15. 不完整圖像。不完整系数。点基形	52
§ 16. 关于按照原形的平行投影圖重新定出原形的問題	55
§ 17. 条件圖像。平行投影圖的尺寸确定性(尺寸完整性)	56
§ 18. 平行投影圖中的空間共軛配偶	58
第三章 多維(測)軸測投影	63
§ 19. 在虛元素增补的 n 維欧几里德空間中的平行射影	63
§ 20. 軸測單形及仿射坐标	67
§ 21. 多維几何观点上的不完整圖	69
§ 22. 用多維軸測投影法来表示多組份化学系統	72
第四章 平行軸測投影的特性	77
§ 23. 仿射軸測坐标和笛卡兒軸測坐标	77
§ 24. 变形指数	79
§ 25. “准确的”和“化簡的”軸測投影圖	82
§ 26. 正軸測投影、跡綫三角形和軸測軸	83
§ 27. 正軸測投影的基本定理[高斯(Tayco)定理]	94
§ 28. 軸測系統の射影区域	97
§ 29. 关于使兩組三直綫成为兩個直角坐标軸系統の平行投影の問題	101
§ 30. 正軸測投影参数和公式的圖解法	103

第二篇 軸測投影的作圖法

第五章 軸測投影中基本几何問題的解决方法	115
§ 31. 斜角軸測投影和直角軸測投影在实践中的形式	115

§ 32. 点的轴测投影	116
§ 33. 直线的轴测投影	117
§ 34. 可见性的条件	118
§ 35. 直线的迹点	119
§ 36. 两直线的相互位置	119
§ 37. 轴测投影中的平面	120
§ 38. 平面上的点和直线	122
§ 39. 平面的相互位置	123
§ 40. 直线与平面相交	126
第六章 变换轴测投影的方法	128
§ 41. 定出平面图形实形的方法	128
§ 42. 直角轴测投影中的辅助投影	139
第七章 多面体的轴测投影	144
§ 43. 多面体的投影的作法	144
§ 44. 平面及直线与多面体相交	145
§ 45. 多面体的相交	147
§ 46. 多面体表面的展开	148
第八章 曲线的轴测投影	150
§ 47. 曲线的轴测投影的作法	150
§ 48. 椭圆在结构上的特点及椭圆的作图法	152
§ 49. 圆周轴测投影的作法	157
第九章 曲面的轴测投影	168
§ 50. 概述	168
§ 51. 锥柱曲面体轴测投影的作法。这类曲面体与平面及直线的相交	168
§ 52. 球体轴测投影的作法。球体与平面及直线相交	178
§ 53. 回转曲面轴测投影的作法	188
§ 54. 管、圆环曲面以及螺旋曲面的轴测投影的作法	195
§ 55. 轴测投影图中两曲面交线的作法	200
第十章 轴测投影法在工程技术问题上的应用	203
§ 56. 轴测投影图的作图程序	203
§ 57. 从复合视图作轴测投影	208
§ 58. 轴测投影方向的投影与坐标轴(投影轴)所夹角之大小的确定	216
§ 59. 根据射影光线相对于坐标轴的已知方向来作轴测投影的方法	221
§ 60. 用轴测投影来画工程图的实例	227
参考书目	232
中俄名词对照表	235

序

近年來，軸測圖在科學上、技術上和工業上的用途日益廣泛。這是由於軸測的方法能夠成功地使一幅圖富有立體感，而同時又使它有優良的可量度性，可以用來精確地定出被描繪的物體的尺寸。

因此，相當全面地來闡明軸測投影學的基本理論以及軸測方法的實際應用，就成為值得重視而適當的工作了。

必須指出，在解決軸測投影學理論和實踐的問題方面，俄國和蘇聯的科學家和工程技術人員曾經有過重大的貢獻。不過，其中用俄語所寫的画法幾何學課本中只用個別의章節來研討軸測投影。

俄國画法幾何學方面的優秀活動家們〔庫爾玖莫夫（Курдюмов）雷寧（Рынин）波波夫（Попов）等等〕所作關於軸測投影的論文，已經不能夠反映這門學科的近況和它當前的問題了。因此，我們認為寫一下我們蘇聯及國外對平行軸測投影方面的主要成就是很適時的。

本書包括兩篇。第一篇是 Н. Ф. 切特維魯新所撰述的，主要是討論軸測投影學的理論問題及其中尚待解決的問題。這一篇分為下列各章：

- 一、平行投影及仿射對應。
- 二、投影圖的軸測化問題。
- 三、多維（測）軸測投影。
- 四、平行軸測投影的特性。

第二篇由 Е. А. 格拉祖諾夫所寫，介紹一些軸測圖的作圖方法並說明這些方法對一些實例的應用。這一篇包括下列各章：

- 五、軸測投影中基本幾何問題的解決方法。
- 六、變換軸測投影的方法。
- 七、多面體的軸測投影。
- 八、曲綫的軸測投影。
- 九、曲面的軸測投影。
- 十、軸測投影法在工程技術問題上的應用。

本書專供高等學校中画法幾何及工程画教研組的教師、研究生以及學生的科學研究小組之用。並適用於企業部門和設計局的工程技術工作人員。

作者應向雷日科夫（В. В. Рыжков），別斯金（Н. М. Бескин）及涅夫斯基（Б. А. Невский）致以衷心的感謝。他們曾為本書提供過許多寶貴的意見和指示。

Е. А. 格拉祖諾夫

Н. Ф. 切特維魯新

第一篇 軸測投影的一般性質

第一章 平行投影及仿射对应

§ 1. 在普通空間中(欧几里德空間中)的射影过程。

以虛元素增补欧几里德空間

廣泛应用在科学上、工程上和日常生活中的投影圖就是用投影法作出的。

投影法概述如下。假設,要把某一个圖形,例如三角形 ABC , 射影在投影平面 Π' 上。先取不在平面 Π' 上的任意点 S 作为射影中心,再从这射影中心引直綫至被描繪的圖形上各点。如圖 1 中的直綫 SA, SB, SC 。这些直綫就称为射影直綫或射影光綫。其次求出这些射影直綫与投影面 Π' 的交点。这样,譬如要作出 C 点的投影,我們就求出射影綫 SC 与平面 Π' 的交点 C' 。点 C' 就叫做点 C 的中心投影。点 C 叫做原形或真形(真正圖形)。从中心 S 把某一个几何圖形上各点射影到平面 Π' 上,就得到它的投影或圖像。这样,譬如在圖 1 中。圖形 $A'B'C'$ 即是真正圖形 ABC 的中心投影。尽管原形可能是空間的三元形体,但它在平面 Π' 上的投影始終是平面圖形。

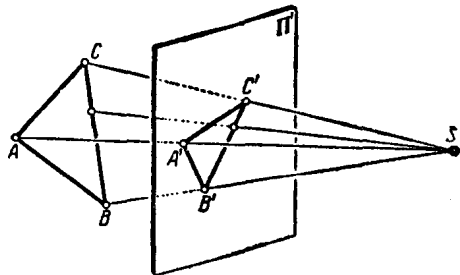


圖 1.

从上所述,可見中心投影法应具有原形(ABC),射影中心(S)和投影平面(Π')。原形上每一个点都有一根对应的射影直綫或射影光綫。不难看出,对应于真正直綫(例如直綫 AB)上任何一点的全部射影光綫都在同一个平面之内,該平面即称为射影平面。因此,每条真正直綫都有一个对应的射影平面。所有射影直綫及射影平面就組成以 S 点为中心的綫面束(或者簡称束 S)。

讓我們看看位于平面 Π 上的,亦即位于真正三角形 ABC 平面上的許多点和直綫(圖 2)。这許多点和直綫我們將称为在平面 Π 上的点綫場,或簡称之为場 Π 。場 Π 的每点($A, B, C, \dots$)对应于束 S 中的一根射影直綫($a, b, c, \dots$),場 Π 的每直綫($AB, BC, CA, \dots$)对应于束 S 中的一个射影平面($SAB, SBC, SCA, \dots$)。这样一來,射影的过程就在場 Π 的元素与束 S 的元素之間建立起对应的关系。必須指出,上述的对应仍保持元素間的从屬性。假如場 Π 中一点(A)是在直綫(AB)上,則束 S 中射影直綫(SA)就在射影平面(SAB)內。

但是更仔細地分析一下束和場的元素之間的对应关系,立刻就發現內中还有些毛病:这

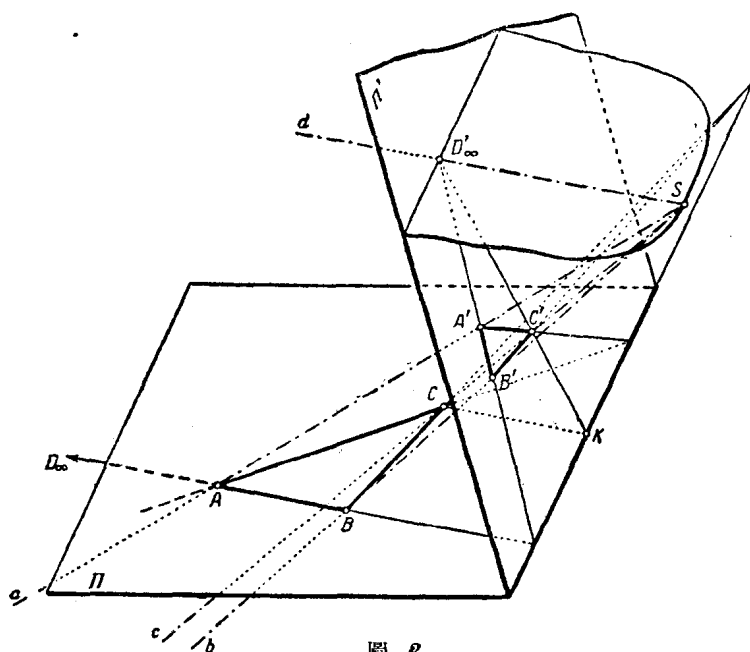


圖 2.

对应关系不是互相等价的。确切地说来，场的各个点对应于束的定直线。但反过来说不一定能成立。例如过中心点 S 引直线 d ，使平行于场 Π 上的直线 AB ，则直线 d 就平行于平面 Π 的本身，因而，直线 d 并非场 Π 上任何一点的射影直线。

为了消除这一个毛病，我们同样地认为直线 d 是与平面 Π 相交于一个点 D_∞ ，而直线 d 就是点 D_∞ 的射影直线。这一点 D_∞ 我们将称之为虚点或无穷远点，以别于

平面 Π 上普通的或真正的点。于是射影直线 d 可以说是位于射影平面 SAB 上。这就使我们得到了把虚点 D_∞ 当作是直线 AB 上的点的根据。这样一来，平面 Π 上的各直线都被各虚点所增补。射影直线 d 与平面 Π' 的交点 D'_∞ 就是虚点在平面 Π' 上的投影。

其次，自然要考虑到平面 Π 上各虚点的总合这个问题。由于把平面 Π 上各直线的虚点射影至 Π' 上的那些射影直线是平行于平面 Π 上各直线的，因而也就平行于 Π 平面本身，故此所有这些直线都在一个平面上，该平面通过射影中心 S 并平行于平面 Π 。这个射影平面以可看作是把平面 Π 上各虚点射影到 Π' 上的那些射影直线的轨迹。由于束 S 的每个平面对应于平面 Π 上的一根直线，而该直线即各该平面在 Π 面上的迹线，因此可得下面的结论：

- 1) 最好把虚点的轨迹当作是 Π 平面上的一根直线。
- 2) 两平行的平面相交于一虚直线。

我们做出所有这些结论，是想使点线场 (Π) 与线面束 (S) 之间能保持互相等价的对应。

从上所述，又可引出下面一些结论。

所有上述关于一直线或一平面的说明，应推广到空间的直线及平面。因此，我们应该认定空间的每两条平行直线相交于一个虚点。在空间中各平行直线的总合，构成一个以虚点为中心的直线束。

同样，每两个平行平面相交于一条虚直线，相互平行的平面，总合起来构成一个有虚轴的平面簇。

最后，可以提出一个关于各虚点和各虚直线的总合的问题。假如我们注意到每条直线都与那个“虚轨迹”有一个交点，而每个平面都与那个“虚轨迹”有一条直线的交线，那么就得出一个结论，即上面提及的“虚轨迹”应该解释为虚平面。

现在，以虚元素增补欧几里德空间的做法是完成了。用这个方法我们就得出一个空间，

在这空间中射影过程可以毫無例外地被完成。这个空间的性質在射影几何教程中要詳細去研究的^①。

我們在这里应当着重指出,在这样的空间中所有元素——真正的元素与虛元素——对于相互从屬的性質來說是完全一致的。由于这个关于从屬性質的基本原理,就得出較為普遍的公式。例如这样的定語:“每两个不同的平面有一条公有的直綫”和“一平面和不在該平面上的一直綫有一个公共点”都是正确的(这些定語却不能用于欧几里德空间中)。但是欧几里德几何的量度概念^②不適用於虛元素。

可以指出,中心投影法在以上所作出的空间中可以完全实现,并使原場 Π 和投影場 Π' 之間建立起相互等价的对应,这对我們是特別重要的(參看圖 2)。

此外,平行投影法可以看作是中心投影法的特殊情形,而以虛点为其射影中心。

§ 2. 德沙格(Дезарг)定理。透視共綫对应。在同一平面上兩場的調和对应

回來看前節所述中心投影的射影过程。假使从中心 S 把原平面 Π 射影至投影平面 Π' 上(圖 2)。那么,正如前節所已經証明的,每个原点 A 对应于投影平面上的一点 A' 。反过來說也可以,即在平面 Π' 上的每一个投影 C' 对应于它在平面 Π 上的原点 C 。这样一來,射影的过程就使原平面場 Π 和投影平面場 Π' 之間建立起互相等价的对应。在这样的对应中一場上的每个圖形可看作是点的軌跡,并且对应于另一場上的某个圖形。

我們可以看出,在第一个場上是一条直綫,在第二場上所对应的同样是一条直綫。在一条直綫上的一些点所对应的同样是另一直綫上的一些点时,这样的互相等价的对应称为共綫对应,而在元素之間建立起共綫对应的两个場, Π 和 Π' , 称为共綫場。假如有这样的共綫对应,即两个共綫場上的对应点都在相交于投影中心 S 的一些射影直綫上,像在中心投影时的情形,則場 Π 和 Π' 的对应关系称为透視共綫对应(圖 3),而这两个場称为在透視位置的場。

必須指出,原平面 Π 与投影平面 Π' 的交綫 p 是透視共綫中的特殊直綫。事实上,交綫 p 上的每个点 A_0 都是双重点,因为,如果把点 A_0 看作是屬於場 Π 的点,我們就可以看出, A_0 的投影重合于 A_0 。

因此,直綫 p 是透視共綫对应中的双重綫(直綫的投影重合于直綫本身)同时直綫 p 上各点都是双重点。这样的直綫 p 也称为透視共綫軸。

試看两个透視共綫的对应圖形,三角形 ABC

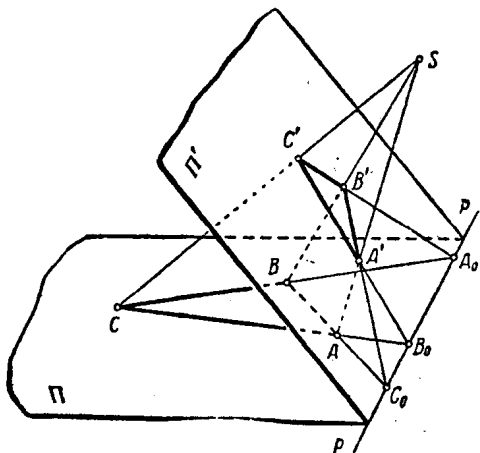


圖 3.

① 參閱例如格拉哥列夫 (Н. А. Глаголев)^[6], 切特維魯新 (Н. Ф. Четверухина)^[25] 的書。

譯者按: 姓名右上角所附 [] 符号內的数字, 是指書末參考書目中的編号。

② 亦即联系到長度、角度及面積的量度。

和 $A'B'C'$ (圖 3), 这就是說每对对应頂点—— A 和 A' , B 和 B' , C 和 C' ——都分別在三条匯交于投影中心 S 的射影直綫上。同时, 三角形的对应边, 例如 AB 和 $A'B'$, 是在同一个射影平面 SAB 上, 这个射影平面与透視共綫軸 p 相交于一点 C_0 。由此可以作出結論: 直綫 AB 和 $A'B'$ 通过 C_0 点。三角形另外兩对对应边—— BC 和 $B'C'$, CA 和 $C'A'$ ——也可以作出同样的結論。这样一來, 我們可以得出:

$$AB \times A'B' = C_0, \quad BC \times B'C' = A_0, \quad CA \times C'A' = B_0 \textcircled{1}.$$

所得的結論包含着射影几何中極重要的定理, 即著名的德沙格定理。这定理可表述如下:

德沙格定理(空間的) 兩三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在空間中, 如果联兩三角形对应頂点的那些直綫相交于同一点 (S), 那么:

- 1) 兩三角形的三对对应边相交于三点 (A_0, B_0 和 C_0);
- 2) 这三点在同一直綫上(軸 p 上)。

逆定理亦真。

如果兩三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在同一个平面上, 那么, 在这样的情况之下虽然有別于上述形式, 但德沙格定理仍然成立, 不过現在定理的結論中就不包括第一条, 因为兩三角形既然在同一平面上, 三角形的边就一定相交的。

德沙格定理(平面的) 兩三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 在同一平面上, 如果兩三角形对应頂点的联綫相交于同一点 P , 則兩三角形三对对应边的三个交点在同一直綫 p 上 ($C_0 = AB \times A'B'$, $A_0 = BC \times B'C'$, $B_0 = CA \times C'A'$) (圖 4)。

逆定理亦真。請讀者自己画出推証逆定理的圖。平面的德沙格定理的几何証明, 要用到立体几何学的作圖法, 而特別是这个定理也可以作为空間德沙格定理的推論而導出。至于德沙格定理的証明在任何一本射影几何的課本中都可以找到^②。

使平面 Π 繞軸 p 迴轉了某一个角度后 (圖 3), 我們就改变了点場 Π 与点場 Π' 的相对位置。但是可以認為這兩場的对应关系是不变的, 依然可以認為点 A', B', C' 对应着点 A, B, C 。

同时使平面 Π 迴轉之后, 兩三角形的每对对应边仍与共綫軸 p 相交于点 C_0, B_0 和 A_0 , 像未迴轉之前一样。这就使得德沙格的逆定理能应用到平面 Π 迴轉后的三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中去。按逆定理, 联兩三角形对应頂点的直綫 AA', BB' 和 CC' 应相交于一点。用字母 S^* 表示这一点。这样, 平面 Π 迴轉了某一个角度之后, 共綫場 Π 和 Π' 同样成为兩個在透視位置的場。透視共綫軸不变 (直綫 p), 而共綫中心現在則变为新的位置 (点 S^*)。

以上所述使我們得出結論, 即代表兩個透視共綫場的兩平面, 其中任一平面繞該兩平面交綫 (共綫軸) 迴轉时, 并不破坏兩場的透視共綫对应。

使其中一个平面 (Π 或 Π') 繼續繞交綫迴轉, 就可以把這兩個平面重合起來。这时候,

① 这里的“ $\times$ ”号表示相交的过程, 而 $AB \times A'B' = C_0$ 的寫法意思是說直綫 AB 和直綫 $A'B'$ 相交于一点 C_0 。

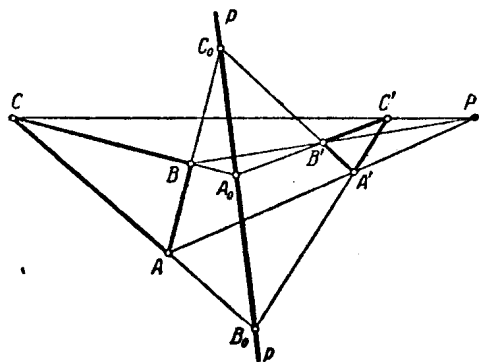
② 參閱: 例如格拉哥列夫 (Н. А. Глаголев) 著^[6] 第 50 頁或切特維魯新 (Н. Ф. Четверухин) 著^[25] 第 75 頁。

三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 便在同一个平面中^①。同时兩三角形的对应边仍相交于直线 p 上的点 C_0 , B_0 和 A_0 。因此平面的德沙格逆定理就可以适用了。按这定理, 兩三角形对应顶点的联线 AA' , BB' 和 CC' 应该通过同一个以字母 P 所表示的一点(圖 4)。由此, 可以断定, 平面 Π 与平面 Π' 重合时, 在这兩平面上的点場的透視共綫对应不受破坏。

在同一个平面上, 兩点場之間的透視共綫称为調和对应。調和对应場上, 每对对应直綫之交点所在的直綫 p , 称为調和对应軸。兩場上对应点联綫的交点 P 称为調和对应中心。

由于現在不可能把三角形 $A'B'C'$ 看作是三角形 ABC 的中心投影了, 因此自然就發生了一个問題: 如何來确定調和对应?

可以确信, 若調和对应的中心、軸及一对对应点为已知时, 点場的調和对应就可以完全确定。例如, 假定在圖 4 中已知調和对应的中心 P , 軸 p 和一对对应点 A, A' 。这时, 我們可以完全确定对应于任意点 B (場 Π) 的点 B' (場 Π')。为此可引直綫 AB , 使与軸 p 相交于一点 C_0 。那



么正如以上所述, 对应的直綫 $A'B'$ 将通过同一个点 C_0 。这样, 点 B' 就应该在直綫 C_0A' 上。我們就可以在射影直綫 PB 和直綫 C_0A' 的交点处, 求得 B' 点。同样, 已知場 Π' 上的点 C' , 就可以作出場 Π 上的对应点 C 。

最后指出, 調和对应中心 P 是个双重点, 亦即在調和对应中自相对应的点, 而作为射影直綫而通过这个中心 P 的所有直綫都是双重直綫。調和对应軸 p 也是一个双重直綫, 并具有同样的性質(亦即自相对应的)。同时, 由于在軸上所有的点都是双重点, 这就和射影直綫不同, 在每条射影直綫上只有两个双重点(即射影直綫与調和对应軸 p 的交点及調和对应中心 P)。

§ 3. 平行投影。平面場的透視仿射对应(类屬对应)及其特性

当射影中心是个虛点或無窮远点的时候, 这样的中心射影具有重大实用价值。設以 S_∞ 來表示射影中心。由于所有射影直綫都匯集于射影中心 S_∞ , 故所有射影直綫都互相平行。因此, 射影本身就叫做平行射影, 由于这样射影而作出的圖就叫做平行投影。而把中心点是真点的中心射影得出的圖称为中心投影。

假設把平面 Π 上的点平行地射影在平面 Π' 上。射影方向以 l 來表示。場 Π 上的每一点对应于投影場 Π' 上的一个定点。这样点場 Π (原場) 与 Π' (投影場) 之間就建立起对应关系。这个对应关系称为透視仿射对应或称类屬对应。透視仿射对应是透視共綫对应中的特殊情形。所以透視仿射对应具有任何透視共綫对应中的一般性質。而且这样的对应是相互等价的。在这对应中的直綫仍对应于直綫, 点和直綫的从屬关系被保存着。此外, 平面 Π 和

^① 可以指出, 平面 Π 和 Π' 的重合, 可能用兩种方式來做到。

Π' 的交線 p 是雙重點的軌跡。直線 p 称为透視仿射對應軸或称为類屬軸。

但是除這些一般性質之外，類屬對應尚具有某些特性，這就使它與其他透視共線對應分別開來。這些特性如下：1) 一場上的平行直線，對應于另一場上的平行直線。2) 一場上三點的簡比^①，等于另一場上三點的簡比。

這些類屬對應特性中的第一條很容易看得出來，只要我們來看看在平面 Π 上的某兩條平行直線 a 和 b ，并把 a 和 b 沿已知方向 l 射影至平面 Π' 上（圖 5）。直線 a 和 b 的射影平面是互相平行的，因為它們含有一對對應地平行的直線（ $a \parallel b$; $AA' \parallel BB'$ ）。投影 a' 和 b' 是這兩個平行平面在平面 Π' 上的跡線，因而也互相平行。這樣一來，一平面場上兩平行直線就對應于另一平面場上的兩平行直線了。

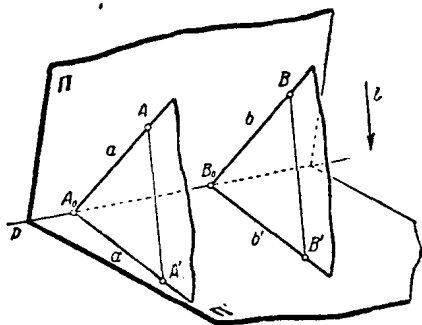


圖 5.

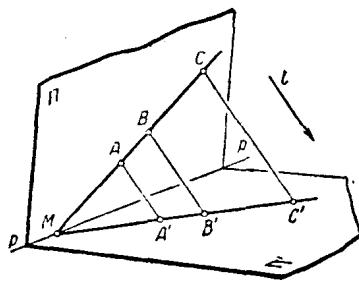


圖 6.

這特性還可以這樣推出來：一平面場上的兩直線如相交于虛點，則與之對應的兩直線同樣相交于虛點。由此，又可得出：一場上的虛直線對應于另一場上的虛直線。

由于透視仿射對應中平行性是不變量，于是大大簡化了对應圖形的作法。例如平行四邊形就一定對應于平行四邊形，而梯形就一定對應于梯形。

試看類屬對應的第二條特性。正如從圖 6 中所見，對應點 A' 、 B' 和 C' 在同一直線上，這直線與直線 AB 相交于類屬軸 p 。因此，在角 CMC' 的兩邊上我們得到平行的射影直線所截得的線段。所以得出：

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} \text{ 或 } (A'B'C') = (ABC)$$

上列公式也就表明：在類屬對應中三點的簡比是不變量的特性。

綜合這兩個特性，就得一個重要的線段變形指數的概念，這個變形指數在繪圖理論上有重大的意義。如果我們來研究一下場 Π' 的某線段 $A'B'$ 與場 Π 上對應線段 AB 的比例，就會知道，這個比例（它也称为變形指數）對於場 Π 上所有平行于 AB 的線段來說，是個常數。實際上，我們假設在場 Π 上有兩個互相平行的線段 AB 和 CD （圖 7, a）。設在場 Π' 上的線段 $A'B' \parallel C'D'$ 與 AB 、 CD 相對應（圖 7, b）。引直線 BD 和 CF （ $CF \parallel DB$ ）；那麼在平面 Π

① 三點 A 、 B 、 C 在一條線上，比例 $\frac{AC}{BC}$ 称为它們的簡比，這個比例通常以 (ABC) 表示。如果點 C 处于 A 和 B 之間，則 (ABC) 是負的。

上就得出平行四边形 $BDCF$ 。在平面 Π' 上与它对应的是平行四边形 $B'D'C'F'$ 。由于直线上三点的简比在类属对应中是个不变量,故可写成:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AB}{FB} = (AFB) = (A'F'B') = \frac{A'B'}{F'B'} = \frac{A'B'}{C'D'},$$

因而

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'},$$

由此 $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD} = u$ (常数)。

这结论也就证明平行线段的变形指数是个常数。

附注: 我们讨论过平面 Π 上的平行线段, 并证明了它们的变形指数是个常数。不难指出, 这个特性可以推广到所有在空间的平行线段, 只要它们是平行地射影在同一个平面 Π' 上。其实, 假设已知某两个平行线段 AB 和 CD 。由于两平行直线一定在同一个平面之上, 因此对这两平行线段来说, 也可以采用上述关于在平面 Π 上平行线段的结论。因此, 空间平行线段的变形指数相等。这样一来, 我们就可以说, 所有在空间相互平行的线段的变形指数均相等。

从我们所讨论的类属对应的两个特性中, 可以得出对应的其他一系列特性。例如, 其中一个:

两个对应点 A 和 A' 至类属轴 p 的距离之比例是常数值, 而与所取的一对对应点无关。

其实, 假定在平面 Π 和 Π' 上取两对对应点: A, A' 和 B, B' (图 8)。从这些点引垂线至类属轴后, 以字母 A_0, A'_0 和 B_0, B'_0 代表垂线的垂足。那么, 点 A 和 B 至轴 p 的距离即以线段 AA_0 和 BB_0 的长度来表示。对应点 A' 和 B' 至同一个轴的距离即以线段 $A'A'_0$ 和 $B'B'_0$ 的长度来表示。从图 8 我们得 $\frac{AA_0}{BB_0} = \frac{MA}{MB}$ 和 $\frac{A'A'_0}{B'B'_0} = \frac{MA'}{MB'}$ 。另一方面我们得 $\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}$, 因而

$$\frac{AA_0}{BB_0} = \frac{A'A'_0}{B'B'_0}$$

或 $\frac{AA_0}{A'A'_0} = \frac{BB_0}{B'B'_0} = \text{常数}。$

在实践中常常会碰到这样的情形, 即两个类属对应场位于同一平面上的情形。把平面 Π 绕类属轴 p 迴转, 使平面 Π 重合于平面 Π' , 就会达到上述的情形。不难理会到, 平面 Π 虽然迴转了任意角度, 但两场类属对应的所有特性仍不变。

两场所在的两个平面虽然互相重合, 但两场类属对应的特性仍不变。还要注意, 各对对应点的联线 AA' , BB' , ……即使在这样的情况之下, 仍然是平行的。实

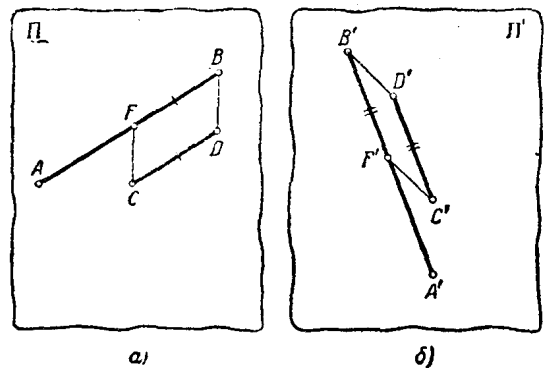


图 7.

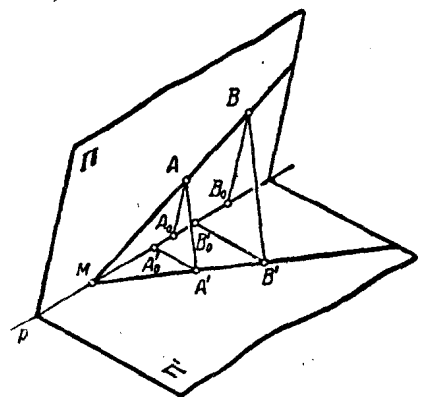


图 8.

实际上, 等式 $(MAB) = (MA'B')$ 不会被破坏 (即 $\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}$ 不变), 因而, 一个角度兩边上成比例的綫段的联綫 AA' 和 BB' 是互相平行的。

假使兩場的平面重合, 亦即兩类屬場在同一个平面之上 (圖 9), 就不能够在兩平面的交綫处來确定我們的类屬軸 p 。于是要給类屬軸以另一个定义, 即把类屬軸当作是类屬对应場上双重点的軌跡, 亦即对应点与該点本身重合的点之軌跡。

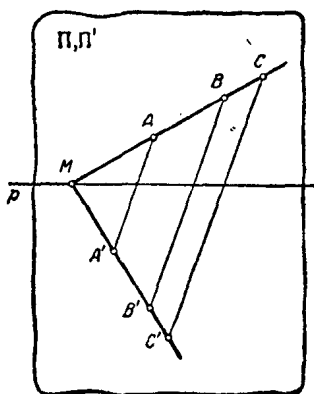


圖 9.

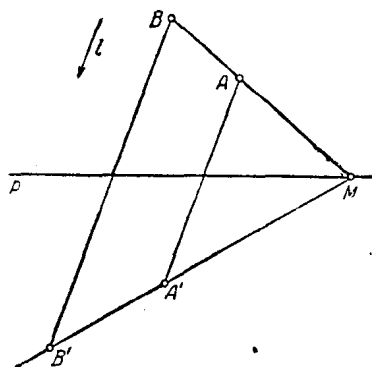


圖 10.

此外还有另一个問題, 即关于給定在同一平面上兩場的类屬对应的問題。事实上, 在这种情况下, 类屬对应就不能够作为一个平面場平行射影于另一个平面場而建立起來, 因为这两場的平面已經互相重合。但是, 即使如此, 对应还是可以建立起來的, 只要已知对应軸, 亦即类屬軸 p , 又已知一对对应点 A, A' (圖 10)。从这些已知条件可以定出对应中心, 它是 AA' 直綫上的無窮远点。所以, 要想作出与点 B 对应的点 B' , 可如下進行。与直綫 AB 相对应的直綫 $A'B'$ 應該通过 AB 的双重点 M 。这就使我們有可能作出直綫 MA' (圖 10)。此外, 所求的点 B' 應該在平行于 AA' 的射影直綫 BB' 上。这样一來, 即得:

$$B' = MA' \times BB'.$$

無論已知的及所求的元素是处于怎样的位置, 上述作法都可以使用。

被一对类屬点 A, A' 和一个类屬軸 p 所决定的兩場的类屬对应, 我們表示它的方法是: $(A, A'; p)$ 。在一平面場上的两个点場 Π 和 Π' 的类屬对应, 經常可以看作是由于一場射影在另一場上的結果。其实, 假如將場 Π 所在的平面繞类屬軸 p 迴轉某一个角度, 同时使場 Π' 的平面保持不动, 那么, 就会重新得到兩場在空間中平行透視的位置。在这样的情况之下, 每一个場都可以看作是另一个場的平行投影。这样一來, 从一平面射影到另一平面上的平行射影过程总可以变换为位于同一平面上兩場的类屬对应, 反之, 同一平面上兩場的类屬对应也可以变换为一場射影于另一場上的平行投影。

試証下面的定理。

定理 若場 Π 类屬对应于場 $\Pi' (A, A'; p_0)$, 而場 Π' 又类屬对应于場 $\Pi'' (A', A''; p_1)$, 同时这两个类屬对应的方向互相重合 ($AA' \parallel A'A''$), 則場 Π 和 Π'' 也以同一公共类屬方向

(l) 而互相类属对应。所有三个对应的类属轴相交于一点。

在第一个对应中, 场 Π 上的点 A 对应于场 Π' 上的点 A' (圖 11)。因此, 直线 AB_0 对应于直线 $A'B_0$ 。同样, 直线 AC_0 对应于直线 $A'C_0$ 。同时, 对应直线相交于类属轴 p_0 上, 交点为 B_0 和 C_0 。在第二个对应中, 场 Π' 上的点 A' 对应于场 Π'' 上的点 A'' 。根据定理的已知条件, 三点 A, A' 和 A'' 是在同一直线 l 上, 这直线 l 即定出两个对应中的公共类属方向。

直线 $A'B_1$ 对应于直线 $A''B_1$; 同样, 直线 $A'C_1$ 对应于直线 $A''C_1$ 。

试以字母 B_2 代表直线 AB_0 和直线 $A''B_1$ 的交点 ($B_2 = AB_0 \times A''B_1$)。同样以字母 C_2 代表直线 AC_0 和直线 $A''C_1$ 的交点 ($C_2 = AC_0 \times A''C_1$)。最后, 以字母 p_2 代表直线 B_2C_2 。现在把德沙格定理应用到三角形 $B_0B_1B_2$ 和三角形 $C_0C_1C_2$ 中。由于, 这两三角形的对应边分别相交于 A, A' 和 A'' 三点, 三个交点在同一直线 l 上, 按德沙格定理, 两三角形对应顶点的连线 (亦即直线 $B_0C_0 \equiv p_0$, $B_1C_1 \equiv p_1$ 和 $B_2C_2 \equiv p_2$) 应该相交于同一点, 这点在圖 11 中以字母 P 来代表。

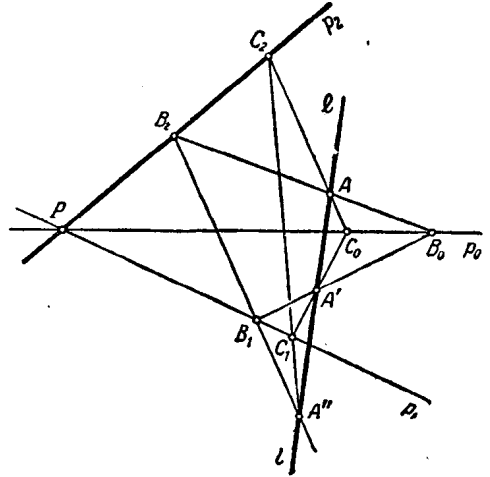


圖 11.

现在很容易看出来, 场 Π 和 Π'' 之间相互等价的对应是类属对应, 在这对应中, 点 A 对应于点 A'' , 直线 AB_2 对应于直线 $A''B_2$ 。在这对应中类属方向以直线 l 来决定, 而直线 p_2 为类属轴。

§ 4. 椭圆是类属对应于圆周的曲线

待我们来看看位于同一平面上的两个类属对应场 Π 和 Π' 。我们知道, 一场上的每个点对应于另一场上的一个定点, 一场上的每条直线对应于另一场上的一个定直线。一场上的一个图形对应于另一场上的某个图形。假设, 在场 Π 中有一个圆周, 这圆周我们用字母 k 来表示。这时候, k 就对应于场 Π' 中的某一曲线 k' 。这条对应于圆周的曲线就叫做椭圆。肯定椭圆就是类属对应于圆周的曲线, 我们就能先找出椭圆上的各个点来画出椭圆。

例如, 在圖 12 中, 假设已知圆周的圆心 O 和已知圆周上一个点 A 。求作对应于该圆周的椭圆。

我们要注意, 圆周的圆心 O 是圆周的对称中心。这也就是说, 圆周的所有直径都在 O 点处被平分为二等份。由于这特性在类属对应中是不变

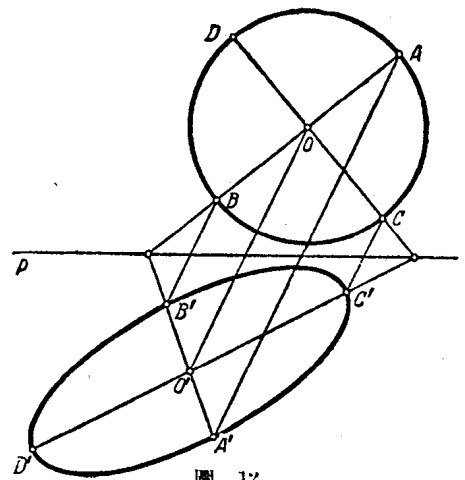


圖 12.

量,故对椭圆來說,所有通过点 O' 的椭圆的弦都应在点 O' 处被平分为二等份,而点 O' 即类屬对应于圆心 O 的点。由此可以断定,点 O' 是椭圆的对称中心,并简称之为椭圆中心,而过椭圆中心的弦則称为椭圆直径。这样,圆心 O 对应于椭圆中心 O' 。要想作出随便多少个椭圆上的点,只要画出已知的圆周(O, A),再作出类屬对应于該圆周上各个点的椭圆点。圖 12 中就是用这样的方法来画出点 A, B 和 C 。

必須指出,圆周上相等的各直径,一般說來,对应于其类屬椭圆上大小不等的各直径。这样,虽然椭圆和圆周都是中心的对称曲线,但在类屬椭圆中,并不保存圆周直径均相等的特性。

其次,假設場 Π 上的圆周对应于場 Π' 上的椭圆(圖 13, a 和 b)。如果我們在圆周中引一組平行的弦,則按已知的类屬对应特性,在椭圆中所对应的也是一組平行的弦。圆周中平行的弦的中点軌跡,顯然就是圆周的直径。因此,椭圆中平行的弦的中点軌跡,也是椭圆的直径,而且是一段直线。对圆周以及椭圆來說,这样的直径就称为某一个方向的弦的共轭直径。我們要注意,圆周上共轭于某一方向的弦的直径,一定垂直于这些弦。这个特性,一般來說,在类屬場 Π 和 Π' 中是不存在的,并且在椭圆中共轭于已知方向的弦的直径,一般不

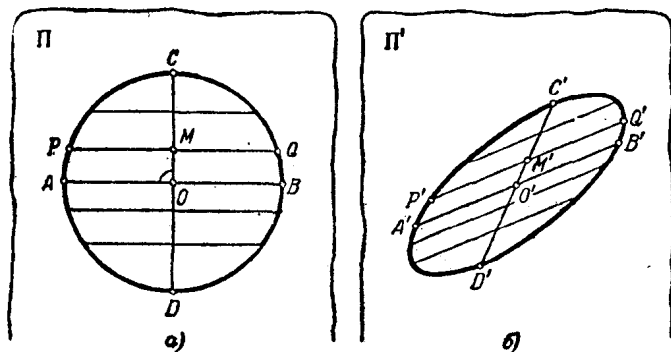


圖 13.

垂直于那些弦。圆周上兩互相垂直的直径 AB 和 CD 是共轭直径,因为其中每条直径都把平行于另一条直径的弦平分成二等份。直径的共轭性也保存于椭圆中。所以,直径 $A'B'$ 和 $C'D'$ 也是共轭直径,亦即其中每条直径都把平行于另一条直径的弦平分为二等份。但是在一般情况之下椭圆的

共轭直径不是互相垂直的,因为在类屬对应中直线的垂直性不能保存下来。

这里所引用的共轭直径的概念,在繪圖理論中具有極其重大的意义。当圆周被平行射影在某平面上时,我們所得的圖像是椭圆形,而圆周上两个互相垂直的直径,則成为椭圆的共轭直径。如果已把椭圆画出(参看,例如圖 13, b),那就很容易作出已知直径 $A'B'$ 的共轭直径 $C'D'$ 。为此,我們引任意的弦 $P'Q'$ 使平行于 $A'B'$,并把 $P'Q'$ 在点 M' 处等分为二,这时,直径 $O'M' \equiv C'D'$,并且又是直径 $A'B'$ 的共轭直径。

在已知圆周上取一点 B_1 并引割綫 BB_1 (圖 14, a)。我們把割綫 BB_1 繞点 B 迴轉,使点 B_1 移近点 B 。在極限位置时,点 B_1 即重合于点 B ($B_1 \equiv B$),割綫就变为切圆周于 B 点的切綫(t)。

現在待我們來研究一下,这在場 Π' 中將对应于什么呢(圖 14, b)? 当割綫 $B'B'_1$ 繞 B' 点迴轉时,对应于圆周上点 B_1 的椭圆点 B'_1 將趋近于点 B' 。在極限位置时兩点即重合,割綫就变成切椭圆于点 B' 的切綫,这切綫仍然是一条和切圆周于点 B 的切綫相对应的直线。