线性代数学习指导

线性代数

基本解题方法和技巧

毛纲源 编著

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

武汉 大学出版社

线性代数
基本解题方法和技巧

毛纲源 编著

武汉工业大学出版社

线性代数基本解题方法和技巧

毛 纲 源 编著

*

武汉工业大学出版社出版发行

湖北省新生报印刷厂印刷

新华书店湖北发行所经销

*

开本：787×1092毫米1/32 印张：8.75 字数：202千字

1990年11月第1版　　1990年11月第1次印刷

印数：1—5000册　　定价：3.50元

ISBN　7—5629—0429—4/O·21

编 者 的 话

学习线性代数时，学生反映，解题不知从何下手，迫切要求掌握基本解题方法和技巧。基于此，我编写了“线性代数基本解题方法和技巧”，使用效果较好，深受同学欢迎。经修改、补充，正式出版。

本书不同于一般的教科书、习题集和题解，它着重基本解题方法和技巧的归纳和应用。其特点是把非数学专业线性代数的主要内容按问题归纳分类，通过引例归纳各类问题的解题规律、方法和技巧。例题类型广，且有一定梯度，除给出基本概念和基本运算的计算（证明）例题以外，还有不少典型例题（大部分选自非数学专业研究生入学试题）。读者可从各类问题的多种解法中，加深理解线性代数的基本内容，掌握基本解题方法和技巧，从而能开发智力，开拓思维，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可供大专院校、电大、职大、函大等广大学生学习线性代数、高等代数时阅读和参考；对于自学者及有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友，值得一读；对于从事线性代数、高等代数教学的同志也有一定的参考价值。

对于本书的编写和出版，我校数理系尤其是应用数学教研室给予了大力支持，热忱鼓励，没有他们的支持和鼓励，拙作是不可能跟读者见面的；武汉大学熊全淹教授及湘潭大学唐祐华教授审阅本书初稿，提出不少宝贵意见，在此一并表示衷心感谢。

书中归纳的方法与技巧大多是编者教学过程中经验和体会的总结。由于学识水平和教学经验有限，缺点和错误在所难免，恳请读者指正。

毛纲源　90年7月于武汉工业大学

目　　录

第一章　行列式计算

§1.1　如何用定义计算行列式

对于含零元素较多的行列式可用定义计算。因行列式的项中有一因数为零时，该项的值为零，故只须求出所有非零项即可。如何求出呢？根据n阶行列式的下述定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

可知只须求出非零项 $a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的所有 n 元排列 $j_1 j_2\cdots j_n$。这样的 n 元排列有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式等于零。这里 $\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}$ 表示对数码1，2，…，n 的排列 $j_1 j_2\cdots j_n$ 求和。

为求出非零项 $a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中所有n元排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$，先由第1行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码，再由第2，3，…，n 行的非零元素及其位置分别写出 j_2，j_3，…，j_n 可能取的数码。在所有可能取的数码中，求出所有的 n 元排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$。

例1.1.1　由定义，计算下列行列式：

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix} (a_i, b_i, c_i, d_i \neq 0, i=1,2)$$

解 设 $D_4=|(b_{ij})|_{4\times4}$，则 D_4 中第1行的非零元素为 $a_{11}=a_1$，$a_{13}=b_1$，故 $j_1=1,3$。

同法可求，$j_2=2,4$；$j_3=1,3$；$j_4=2,4$。从而 $j_1j_2j_3j_4$ 能组成四个4元排列

1 2 3 4； 1 4 3 2； 3 2 1 4； 3 4 1 2

D_4 中相应的非零项分别为：

$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_1c_1b_2d_2$

$(-1)^{\tau(1432)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=-a_1d_1b_2c_2$

$(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-b_1c_1a_2d_2$

$(-1)^{\tau(3412)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=b_1d_1a_2c_2$

其代数和即为 D_4 的值，整理后得到

$D_4=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)$〔解毕〕

例1.1.2 由定义，计算下列行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解一 由 D_5 中第1行的非零元素可知，$j_1=2,3$，又由第2，3，4，5行的非零元素分别得到 $j_2=1,2,3,4,5$；$j_3=1,2,3,4,5$；$j_4=2,3$；$j_5=2,3$。

因 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 一个5元排列也不能组成，故 $D_5=0$。

解二 因 j_1,j_4,j_5 都只能取2，3两个数码，故 j_1,j_4,j_5 中至少有一个要取2，3以外的数码1，4，5。如 j_1 取1，或4，或5，因 $a_{11}=a_{14}=a_{15}=0$，故 D_5 中任意项

$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}=$

$= (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)} 0 a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} = 0$

同理可证，如 j_4 或 j_5，取 2，3 以外的数码，D_5 中任意项仍等于零，故 D = 0。〔解毕〕

例1.1.3 用定义，计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}$$

解 为求 D 的值，只须求出 D 中所有非零项。

D 中第1行的非零元素只有 $a_{1,1985}$，因而 j_1 只能取 1985，即 $j_1 = 1985$。同理 $j_2 = 1984, j_3 = 1983, \cdots, j_{1985} = 1$，$j_{1986} = 1986$，于是 $j_1 j_2, \cdots, j_{1985}, j_{1986}$ 可能取的数码中，$j_1 j_2 \cdots j_{1985} j_{1986}$ 只能组成一个1986元排列，

1 9 8 5 1 9 8 4 ⋯ 2 1 1 9 8 6

故 D 中非零的项只有一项，即

$$D = (-1)^{\tau(1985, 1984, \cdots, 2, 1, 1986)} a_{1,1985}\, a_{2,1984} \cdots a_{1985,1}\, a_{1986,1986}$$

因 $\tau(1985, 1984, \cdots, 2, 1, 1986) = 1984 + 1983 + \cdots + 2 + 1$
$= 1985 \cdot 992$，故 $D = (-1)^{1985 \cdot 992} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 1985 \cdot 1986$
$= 1986!$ 〔解毕〕

值得注意的是，计算含行列式中特定元素的所有项数的命题也可按上述方法计算。

例1.1.4 写出下行列式中包含 a_{13}, a_{25} 并带正号的项：

$$
D_5=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\
a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix}
$$

解　D_5 中包含 a_{13}及 a_{25}的所有项数为 5 元排列 $3\ 5\ j_3\ j_4\ j_5$的个数，因 j_3, j_4, j_5都可取 1，2，4 这三个数码，因而 $35 j_3\ j_4\ j_5$能组成的 5 元排列共有 6 个，即

3 5 1 2 4；3 5 1 4 2；3 5 2 1 4

3 5 2 4 1；3 5 4 1 2；3 5 4 2 1

相应非零项分别为

$$(-1)^{\tau(35124)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}=-a_{13}a_{25}a_{31}a_{42}a_{54}$$

$$(-1)^{\tau(35142)}a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}=a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$$

$$(-1)^{\tau(35214)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}=a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$$

$$(-1)^{\tau(35241)}a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}=-a_{13}a_{25}a_{32}a_{44}a_{51}$$

$$(-1)^{\tau(35412)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}=-a_{13}a_{25}a_{34}a_{41}a_{52}$$

$$(-1)^{\tau(35421)}a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}=a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$$

故包含 a_{13}, a_{25}并带正号的所有项为

$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52}$，$a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54}$和$a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}$。

例1.1.5　试求下列行列式中 x^4 的系数：

$$
f(x)=\begin{vmatrix}
-x & 3x & 1 & 3 & 0\\
2 & 6 & 2x+1 & 14 & 4\\
-1 & x & 0 & 4 & 3x\\
2 & 21 & 4 & x & 5\\
1 & -7x & 3 & -1 & 2
\end{vmatrix}
$$

解一 $f(x)$中含 x 为因子的元素有

$a_{11}=-x$, $a_{21}=x$, $a_{23}=2x$, $a_{32}=x$,

$a_{35}=3x$, $a_{44}=x$, $a_{52}=-7x$。

因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij_i} 的列下标只能取：

$j_1=1$，$j_2=1$，3；$j_3=2$，5；$j_4=4$；$j_5=2$

于是，含x^4的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取 $j_1=1, j_2=3$, $j_3=2$，$j_4=4$ 与 $j_2=1, j_3=5, j_4=4, j_5=2$；相应的5元排列分别为1 3 2 4 5，~~3 1~~ 5 4 2，含 x^4 的相应的项分别为：

1 3

$$(-1)^{\tau(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4$$

$$(-1)^{\tau(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4$$

故 $f(x)$中 x^4的系数为$21+4=25$。

解二 将 $f(x)$化成 x 只位于主对角线上的行列式。为此，将 $f(x)$的第1行加到第2行、第3行的7倍减去第5行，再将所得行列式的第5列减去第2列的3倍，最后将新行列式的第2，3行对调，得到

$$f(x)=-\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 2x+1 & 14 & -23 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix}$$

含x^4的两项分别为$(-1)\cdot(-x)\cdot x\cdot(2x)\cdot 2$,$(--1)\cdot(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot(21x)$,故 $f(x)$中含 x^4的系数为$4+21=25$。

解三 将 $f(x)$按第3行展开，只有下列两个行列式含x^4的项：

$$(-x)\begin{vmatrix} -x & 1 & 3 & 0 \\ x & 2x & 11 & 4 \\ 2 & 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-x)\begin{vmatrix} -x & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2x+1 & 14 & 4 \\ 2 & 4 & x & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(3x)\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 \\ x & 3 & 2x & 11 \\ 2 & 21 & 4 & x \\ 1 & -7x & 3 & -1 \end{vmatrix} = (3x)\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -7x & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 \\ 2 & 21 & 4 & x \end{vmatrix}$$

显然，前者含 $4x^4$，后者含$21x^4$。〔解毕〕

习　　题　1.1

1.1.1　一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数如果比 n^2-n 多，则此行列式等于零。

1.1.2　写出 4 阶行列式 $D=|(a_{ij})|_{4\times4}$中所含 a_{43}且带负号的项。

1.1.3　由定义，计算下列行列式：

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.1.4　求出下行列式 f(x)中 x^4与 x^3 的系数：

$$f(x)=\begin{vmatrix} 3x+2 & x+3 & 5 & 6 \\ 6 & 2x+1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4x+3 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 5x+2 \end{vmatrix}$$

§1.2 如何证一行列式被某一整数整除

下面所讨论的 n 阶行列式 D_n，其元素均为个位整数。D_n被某整数整除的命题有如下两种类型，其证法基本相同。

第一种类型是命题中给出能被某整数 m 整除的 n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$； 且 a_i 是 n 位数，其各位数字恰为 D_n 中第 i 行（列）的各个元素，$i=1,2,\cdots,n$。

其证法是：由于 D_n 的元素为个位整数，将第1列（行）乘上10^{n-1}，第2列（行）乘上10^{n-2}，…，将第 n－1列（行）乘上10，都加到第 n 列（行），则 D_n 的第 n 列（行）恰为所给定的 n 个数。由于第 n 列（行）的元素都能被m整除，（以下简称第 n 列（行）被 m 整除），D_n也能被m 整除。

例1.2.1 已知1 3 2 6，2 7 4 3，5 0 0 5，3 8 7 4 都能被13整除，试证不计算行列式的值，下行列式能被13整除：

$$D_4=\begin{vmatrix} 1\times10^3 & 3\times10^2 & 2\times10 & 6 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

证 把 D_4 的第1行看成一个四位数，其千位数字为1，百位数字为3，十位数字为2，个位数字为0。同样将 D_4 的第2，3，4 行分别看成四位数2743，5005，3874。

为使 D_4 的第4列上各元素变成这四个四位数，将第1，2，3列分别乘以10^3，10^2，10，且都加到第4列，得到：

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1326 \\ 2 & 7 & 4 & 2743 \\ 5 & 0 & 0 & 5005 \\ 3 & 8 & 7 & 3874 \end{vmatrix}$$

由题设13整除上行列式的第四列，故13能整除 D_4。〔证毕〕

例1.2.2 已知204，527，255都能被17整除，试证：

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

能被17整除。

证 给定的三个3位数，其各位数字恰分别为 D_3的3个列的元素。为将 D_3 的第3行的3个元素分别化成204，527，255，将 D_3的第1，2行分别乘上10^2，10都加到第3行，得到：

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 204 & 527 & 255 \end{vmatrix}$$

由题设17能整除上左端行列式的第3行，故 D_3 能被17整除。〔证毕〕

例1.2.3 已知 $a_1=x_{11}\ x_{21}\cdots x_{n1}, a_2=x_{12}\ x_{22}\cdots x_{n2}, \cdots, a_n=x_{1n}x_{2n}\cdots x_{nn}$ 为 n 个n 位数，其中个位整数 x_{ij} 为第 j 个 n 位数 a_j 的第 i 位数字（$i,j=1,2,\cdots,n$），且 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）能被自然数 m 整除，试证下行列式 D_n 能被 m 整除：

$$
D_n=\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{vmatrix}
$$

证 因 D_n 的诸元素均为个位数，且其 n 个列的元素分别为 n 个 n 位数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的各位数字，故将 D_n 的第 1，2，…，n－1行分别乘以$10^{n-1},10^{n-2},\cdots,10$，且都加到第n行，则该行元素化成 n 个 n 位数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，即

$$
D_n=\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n}\\
\sum_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n}10^{n-2}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{in}
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n}\\
a_1 & a_2 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}
$$

因 m 能整除 $a_i(i=1,2\cdots,n)$，故 m 也能整除 D_n。〔证毕〕

第二种类型是题设中没有给出被某整数整除的数，要求证明行列式能被某整数整除。

这类命题的证法与前一类相似。值得注意的是，应将 D_n 的各行（列）数字分别看成一个 n 位数，该行（列）第 i 列（行）上的数字视为这个 n 位数的第 i 位数字，然后证明这 n 个 n 位数都能被给定的某整数所整除，最后用前述方法将 D_n 的第 n 列（行）的元素化成相应的 n 位数，命题即可获证。

例1.2.4 用行列式性质，证明下行列式能被13整除：

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&4\\3&2&5\\4&1&6\end{vmatrix}$$

证 本例虽未给出能被13整除的3个数，但将 D_3 的3个行分别看成3个3位数104，325，416，不难验证它们都能被13整除。为将第3列的各元素分别化成上述3个数，将 D_3 的第1，2列分别乘上10^2,10，且都加到第3列，得到

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&104\\3&2&325\\4&1&416\end{vmatrix}$$

因第3列能被13整除，故 D_3 也能被13整除。〔证毕〕

上法特别适用被除数 m 为素（质）数的情况。如果 m 为合数，且其各因数分别能整除某（些）行(列)，由行列式性质即证该行列式能被合数 m 整除。

例1.2.5 已知1998，2196，2394，1800都能被18除尽，试证（不准算行列式的值来证明），下行列式能被18整除：

$$D_4=\begin{vmatrix}1&9&9&8\\2&1&9&6\\2&3&9&4\\1&8&0&0\end{vmatrix}$$

证一 因 $18=2\cdot9$为合数，且 D_4 的第3，4两列分别可被9，2所整除，由行列式性质，D_4可被18整除。

证二 将 D_4的第1，2，3列分别乘以10^3,10^2,10，且都加到第4列，得到

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 1998 \\ 2 & 1 & 9 & 2196 \\ 2 & 3 & 9 & 2394 \\ 1 & 8 & 0 & 1800 \end{vmatrix}$$

因上行列式第4列能被18整除，故 D_4 能被18整除。〔证毕〕

习　　题　1.2

1.2.1　证明下列行列式能被11整除：

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

将第一列乘以 10^2，第二列乘以10，

1.2.2　不计算行列式的值，证明下行列式能被18整除：

加到第四列

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad 9\times2 \qquad 得 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 0 & 7 & 77 \\ 9 & 9 & 99 \end{vmatrix}$$

1.2.3　已知 n 个 n 位数 $a_1 = x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}, a_2 = x_{21}\cdots x_{2n}, \cdots, a_n = x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}$，其中 x_{ij} 为 n 位数 a_i 的第j位数字$(i,j=1,2,\cdots,n)$，且自然数 m 能整除 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，试证下行列式能被 m 整除：

$$D_n = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}$$