

基本馆藏

200288



罗巴切夫斯基几何学 及几何基础概要

(苏联) 库图佐夫著

科学普及出版社

062

罗巴切夫斯基几何学 及 几何基础概要

【苏联】B. B. 庫圖佐夫著

王 联 芳译

科学普及出版社

1958年·北京

本書提要

這本書是俄罗斯联邦加盟共和国教育部审定的中学教师参考書。作者严格地系統地而又引人入胜地介紹了罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要，使你对这些邏輯謹严的数学知識，有很深刻的印象。

讀完這本書以后，你会同意作者所說：“只懂得一种欧几里得几何，也不能充分了解几何学的結構的特点。几何学之所以能提高到現代观点，不过是在研究罗巴切夫斯基所創立的非欧几何以后的事情。熟悉这种几何学是研究几何基础的第一步。”

总号：703

罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要
ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО
И ЭЛЕМЕНТЫ ОСНОВАНИЙ
ГЕОМЕТРИИ

原著者：(苏联)В.В.КУТУЗОВ

原出版者：ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА
ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

譯者：王 联 芳
出版者：科学普及出版社

(北京市西直門外新象南)

北京市書刊出版業營業許可証出字第091号

發行者：華 書 店
印刷者：京 華 印 刷 廠
(北京市西便門南大街乙1号)

开 本：850·1168 1/32

印张：5 1/2

1958年8月第1版

字数：110,000

1958年8月第1次印刷

印数：5800

統一書号：13051·88

定 价：(9)6角2分

目 次

第一版序言	1
第二版序言	2
緒 論	3
§ 1. 引入平行綫以前的基本定理概述 (17)	
§ 2. 关于三角形(內)角和的勒讓德——薩开里定理(19)	
§ 3. 帕須公設(24)	
§ 4. 有二直角的四边形及其性質(25)	
第一章 跟欧几里得公設等价的一些命題	28
§ 5. 三角形內角和等于二直角——跟欧氏公設等价的命題(29)	
§ 6. 每一三角形的內角和都相同——跟欧氏公設等价的命題(32)	
§ 7. 勒讓德定理“三角形內角和不能小于二直角的錯誤証明”(33)	
§ 8. 通过一角內任一点可作与此角兩边相交的截綫——跟欧氏公設等价的命題(35)	
§ 9. 存在兩個相似而不全等的三角形——跟欧氏公設等价的命題(36)	
§ 10. 克拉維对欧氏公設的一个假的証明(38)	
§ 11. 烏·鮑耶定理(39)	
§ 12. 另外兩個跟欧氏公設等价的命題(39)	
§ 13. 畢达哥拉定理 $a^2=b^2+c^2$ ——跟欧氏公設等价的命題(41)	
§ 14. 圓內接正六边形的一边等于此圓的半徑——跟欧氏公設等价的命題(42)	
第二章 关于罗巴切夫斯基几何的一些事实	45
§ 15. 罗巴切夫斯基公設(45)	
§ 16. 在罗巴切夫斯基平面上三角形的內角和(46)	
§ 17. 对一角的一边的垂綫不交另一边的定理(47)	
§ 18. 等距曲綫(52)	
§ 19. 另外一些罗氏几何的定理(53)	
§ 20. 关于不能作外接圓的三角形(54)	
§ 21. 圓內接正六边形的一边大于此圓的半徑(55)	
第三章 在罗巴切夫斯基平面上直綫的相互位置	71
§ 22. 平行綫和超平行綫(56)	
§ 23. 平行綫的性質(58)	
§ 24. 平行角(65)	
§ 25. 罗巴切夫斯基超平行綫的性質(68)	
§ 26. 在罗巴切夫斯基平面上直綫相互位置的一些特別情况(71)	

第四章 罗巴切夫斯基几何的面积论	74
§ 27. 薩氏四边形的合同性(74)	§ 28. 三角形的角欠及三角形, 多边形的面积(75)
§ 29. 三角形的極限情形(80)	
§ 30. 三角形随意大的面积存在——跟欧氏公設等价的命題(81)	
§ 31. 罗巴切夫斯基在数学上所作的貢獻概观(82)	
第五章 欧几里得“几何原本”概观	86
§ 32. 欧几里得“几何原本”的内容(86)	§ 33. “几何原本”的叙述方法(88)
§ 34. “几何原本”的基本命題(88)	§ 35. “几何原本”的某些优缺点及其历史的意义(90)
第六章 基本对象、基本对象間的基本关系及几何公理	97
§ 36. 公理法几何的結構, 基本概念(97)	§ 37. 第一組公理: 結合公理(属于关系)(98)
§ 38. 第二組公理: 次序公理(102)	
§ 39. 第三組公理: 合同公理和运动公理(105)	§ 40. 第四組公理: 平行公理(110)
§ 41. 第五組公理: 連續公理(111)	
第七章 几何体系的解釋观念	116
§ 42. 欧几里得平面几何解釋的例子(116)	§ 43. 費得洛夫的解釋(117)
§ 44. 欧几里得几何的解析解釋(120)	§ 45. 罗巴切夫斯基几何的貝尔特拉米——克萊因解釋(121)
§ 46. 罗巴切夫斯基平面几何的普恩加萊解釋(126)	§ 47. 罗巴切夫斯基空間几何的普恩加萊解釋(143)
§ 48. 等距面、極限面和極限球。把的几何学(147)	
第八章 公理的協和性和独立性。同構	155
§ 49. 公理体系的協和性(155)	§ 50. 公理的独立性(156)
§ 51. 两种公理体系的等价性(157)	§ 52. 关于同構的概念(158)
§ 53. 結束語(163)	
参考書	163

第一版序言。

1951年2月23日是俄国天才学者尼古拉·伊万諾維奇·罗巴切夫斯基(Николай Иванович Лобачевский)向喀山大学数学物理系报告他所创立的新的科学研究成果的125週年紀念日。这门新科学就是后来所谓的罗氏非欧几何学。

中学数学教师应该完全掌握罗氏几何学的基本概念和内容，因为唯有从非欧几何的观点来看才得以阐明在中学所研究的欧氏几何学的逻辑结构。中学高年级的学生也可以很感兴趣并且有成效地来通晓罗氏几何学的基本内容。

П. С. 亚历山大洛夫(Александров)说得对：“代数的思维起源于羣論。如果連这一理論的起碼知識都不知道，不用說要成为一个学識淵博的数学家不可能，就是要成为一个普通有学問的人也不可能”[3]。

几何学的思维起源于非欧几何学。

趁此机会特向我的学生 Н. Е. 哥尔巴琴科(Горбатенко)致謝。承她把我在1942—1943年間在阿尔巴坎师范学院講課时的筆記送給我，她的筆記大大地減輕了本書編写之勞。

А. П. 諾尔金(Норден)和 Г. Б. 古列維奇(Гуревич)讀了我的原稿并提了許多寶貴的意見，我謹向他們表示懇摯的謝意。我還很感激 С. И. 諾沃肖洛夫(Новоселов)對本書所作的一些註釋。

Б. 庫圖佐夫，1949年6月，于莫斯科

第二版序言。

本書第二版基本上仍旧保留 1950 年第一版的原样；仅作了不大的改动和若干补充。

第二版中以面积論那一章里改动得最显著。关于罗巴切夫斯基在科学上所作的贡献这里也概括地作了扩充。在緒論里简短地叙述罗巴切夫斯基以前几何学的发展情况，而且特别注意到几何学与天文学、力学、光学、以及和其它科学部門之间的联系。值得强调的是苏联最近三十年来編成了一套非常丰富的科学經典叢書，这套叢書的主編人是 С. И. 瓦維洛夫(Вавилов)院士。

第二版粗略地描写橢圓式几何学。着重指出在非欧几何学里已經运用得很成功的制造模型（解釋）的观念，这在具有極其重大实际意义的电子模拟（Электроданалогия）法上已获得广泛的应用。

在准备出第二版时，作者尽量考虑了来自各方面的宝贵意見，作者对这些宝贵意見表示十分感謝。

Б. 庫圖佐夫，1954 年 7 月 6 日，于莫斯科。

緒 論

只懂得一种本民族的語言而不和其他民族的語言相比較，就不能看出这种語言的特点，也不能說明并且清楚地了解这种語言的結構；同样道理，只懂得一种欧几里得几何，也不能充分了解几何学的結構的特点。几何学之所以能够提高到现代的观点，不过是在研究尼·伊·罗巴切夫斯基所創立的非欧几何以后的事情。熟悉这种几何学是研究几何基础的第一步。

“几何基础”是数学的一个分支，其中主要的是建立并探討几何学的基本概念和公理、每一公理在几何学結構中的作用和地位、以及某些公理用其他公理代替的可能性和这种代替之后的結果。

俄国天才数学家尼古拉·伊万諾維奇·罗巴切夫斯基(1792—1856)在1826年創立新的、即后人称之为罗氏的非欧几何，在作为几何基础(一般地說，也是数学基础)的对象問題的提法方面具有根本的意义。

由此可見，教师研究罗氏几何学和几何基础是非常重要的。

有了这两門科学的知識，我們就能更好地了解整个几何学的結構，就能善于抉擇各种几何教材，从而避免在中学几何課的講授中把它当作次序固定不移、連貫成串的定理的簡單彙集。

以下簡略地談談在罗巴切夫斯基以前几何学的發展情况。

亞历山大数学家欧几里得(約在公元前300年)的“几何原本”^[12]是流傳至今的第一部系統的几何著作。本書第五章將对这一著作作詳細的探討，同时也研究一下这部名著的优缺点及其历史意义^①。每一位教几何的教师最好都能熟悉欧几里得这部經过

^① 也可参考“莫斯科大学数学史討論彙報”，“数学史研究”第一期，Гостехиздат, 1948。

兩千多年時間考驗的名著。歐几里得也曾寫過有關幾何的其他論述，可惜大半散失，久已不傳了。

生於叙拉庫西(Cyracuse)的阿基米德(公元前287—217年)在他的論文“論圓錐體、球和圓柱體”、“論螺旋線”、“論浮體”、“論力學中的一些定理”、“圓的度量”、“拋物線的求平積法”、論劈錐曲面和扁球面”、“論平面圖形的平衡和重心”等等[●]，從事於測定各種複雜的物體、特別是用圓錐截綫或其一部分來旋轉的方法所得物體的弧長、面積和體積。阿基米德致力研究上述物體的浮沉的穩定性，並用幾何方法確定它們的重心；而且反過來，利用力學的命題得出幾何定理。阿基米德的著作，一直到今天，仍然是科學研究中密切聯繫實際的典范。

阿基米德所製定的計算曲綫的面積、體積和長度的許多方法可以當作積分法的第一步。應該指出，阿基米德的研究是在歐几里得幾何範圍內的。

與此同時，彼爾加的阿坡羅尼、(大約在公元前200年)制定了平面截圓錐的截痕曲綫——圓錐截綫——的理論。行星繞太陽運行的軌道就是沿着圓錐截綫的(此限于初步的近似)。炮彈質量中心的運動，若不計空氣的阻力，也走的是一段圓錐截綫。應該指出，阿波羅尼著作的內容不過是歐氏幾何更進一步的深入罷了。

在十五世紀以前後起的幾何學家所做的多半是對上述名家作品的注釋，或者根據評述者的引文訂正一些已經散失的作品的原文。

● 阿基米德沙石計算譯文，Н.Н.波波夫(Попов)教授的阿基米德著作概述和註釋，“自然科學經典”ГТТИ,1932。

阿基米德、惠更斯、蓋姆伯特、勒讓德，關於化圓為方問題，附本問題的历史，Ф.魯吉奧(Рудно)編，С.Н.貝爾史欽(Бернштейн)翻譯，校訂和注釋，“自然科學經典”。ОНТИ,1936。

阿基米德、斯蒂芬、伽利略、帕斯卡流體靜力學原理，А.Н.道爾果夫(Долгов)翻譯與注釋，“自然科學經典”，ГТТИ,1932。

И.Л.吉別爾哥(Гейбер)，阿基米德新著、阿基米德給愛拉托斯忒斯(Eratosthenes)關於力學上的一些理論的信，敖德薩,1909。

1543年出版的尼古拉·哥白尼(Николай Коперник 1473—1543)研究太陽系構造的“天体运行說”^①一書，不仅解决而且提出了几何上的一系列的复杂的問題。

力学的奠基者之一、哥白尼事業的積極宣傳普及者和繼承者——偉大的伽利略·伽利来(Galileo Galilei, 1564—1642)，在他的作品中广泛地利用和發展了几何学^②。

圓錐截綫經著名的天文学家約翰·开普勒(Johanneo Kepler, 1571—1630)之手而得到了新的应用和發展。开普勒扩大了几何学的范围，求出了当时科学上所謂新型物体的長度、面积和体积^③。

建筑师德沙格(Desargues, 1593—1662)和他的一位研究几何的学生帕斯卡(Pascal, 1623—1662)——見帕斯卡所著“建立圓錐截綫理論的經驗”一書——奠定了透視理論和新綜合几何学的基础，后来即發展成为所謂投影几何学。关于投影几何学的观念，本書不拟講述。

1637年，出現了列尼·笛卡兒(René Decartes, 1596—1650)的著作“几何学”^④。在这一部著作中提出了一种研究几何的新方法——坐标方法。虽然坐标方法通常放在“解析几何学”內叙述，

① 尼古拉·哥白尼，“天体运行說”六册。

第一册前十章的譯文收集在尼古拉·哥白尼逝世四百週年紀念文集中，校訂人A.A. 米海依洛夫(Михэйлов)，АН СССР, 1947。

② “伽利略·伽利来，涉及兩門新科学，屬於力学和附有重心的各种物体运动的位置的談話和数学的証明。С. Н. 道尔果夫从意大利文翻譯，“自然科学經典”，ГТТИ, 1934。

伽利略·伽利来，关于兩種主要宇宙系統(托勒密与哥白尼)的對話。А. И. 道尔果夫譯自意大利文，ГИТТЛ, 1948。

正因为这部異常精采而引人入胜的書，伽利略被人控告，遭受宗教裁判所的定罪。

另参考“伽利略·伽利来(1564—1642)“逝世300週年紀念文集”，АН СССР, 1943。

③ 約翰·开普勒，酒桶的新型立体几何学，这些酒桶主要是奥国式的，因为要有最有利的形狀，所以最适宜用三次曲綫，补充以阿基米德立体几何。譯自拉丁文“自然科学經典”，ГТТИ, 1935。

④ 列尼·笛卡兒，几何学，增弗尔瑪的文选，笛卡儿抄写。А. П. 尤史凱維奇(Юшкевич)翻譯并注釋，“自然科学經典”，ГТТИ, 1933。

列尼·笛卡兒，关于方法論、附光綫曲折学、气象、几何学，Г. Г. 斯乐利尤沙列夫(Слюсарев)和尤史凱維奇譯并校註，“科学經典”，АН СССР, 1953。

但是这仅仅是研究和講解几何的一种方法而已，不能認為是一种新的几何学。强而有力的笛卡兒方法可以适用于欧氏几何学，同样也可适用于别的几何学，例如，投影几何学或罗氏几何学。本書用了一些篇幅來講述坐标方法的觀念(几何学的解析解釋——見第四章)。笛卡兒方法在力学、电动力学、光学和其他科学領域里起着很大的作用。物理学的發展对几何学的影响也很大。

对于力学和光学的目标來說，惠更斯(Huygens, 1629—1695)在“关于光学的論文”^①和包含一些極重要的力学定理的“摆鐘”一書^②中，以及在他的其它論文中，創造了曲綫化直方法，研究光波、計算面积与体积等特殊方法。應該指出，从数学分析的观点来看，面积和体积大小的計算是同类的問題；任意曲綫形面积的計算解决了力学和其他科学領域里的許多問題。在微积分發現以前，这类問題是用純几何方法解决的。

开普勒不用积分法計算了体积；新的几何方法是意大利几何学家邦納文吐拉·卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri, 1598—1647)^③發現的。

牛頓(Newton, 1643—1727)的“自然哲学的数学原理”^④一書包括有力学的基本定律及其發展，以及引力天文学的一些原理，其中运用了几何的綜合方法。牛頓在他的光学著作“光学”和“光学講义”^⑤中，不仅改进了几何方法，而且还解决了一系列新的、純

① 克利斯狄·惠更斯，在光学的一篇論文中解釋为什么發生光的反射和折射現象，特別地，解釋为什么冰島的結晶體出現奇怪的折射現象，Н. 弗列得里克斯(Фредерикс)譯“自然科学經典”ОНТИ, 1935, 另參看 Ф. 魯吉奧編关于圓化方問題。

② 克·惠更斯，力学的三項备忘录，К.К. 包姆加尔特(Баумгарт)譯註，“科学經典”，АН СССР, 1951。

③ 邦·卡瓦列里，用連續性的不可分的新方法講述几何学，譯自拉丁文，“自然科学經典”，ГЛТТЛ, 1940。

④ 依·牛頓自然哲学的数学原理，А.Н. 克雷洛夫(Крылов)院士譯，克雷洛夫院士著作集，第七冊，列宁格勒，1936。

⑤ 色尔·依薩克·牛頓，光学或关于光的反射，折射、弯曲、顏色等論文，С.И. 瓦維洛夫(Вз-Валов)譯自 1721 年的英文版，附注釋，“自然科学經典”ГИТ, 1927。

依·牛頓，光学演講集，С.И. 瓦維洛夫譯注并校訂，“科学經典”АН СССР, 1946。

几何的問題。几乎牛頓的全部著作，或多或少都与几何有关。不过專門講述几何的著作並沒有多少。現在我們只提一提他的“三阶曲綫通論”^①。既然圓錐截綫主要有三种类型，那末按牛頓的分法，三阶曲綫应有74种。牛頓并且根据这些曲綫，与二阶曲綫中的圓錐截綫相仿，而給它們下了一个純几何的定义。

从上面我們可以看出天文学、力学、光学同几何学的發展有多么密切的关系！微积分学对于研究力学上的运动是必要的，而微积分学的完成，則主要是牛頓和萊布尼茲。

德国的傑出哲学家和数学家、法学家和外交家哥特弗萊德·維廉·萊布尼茲 (Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646—1716) 所發表的关于無穷小分析一文，仍然蒙着几何的外壳，这一点和牛頓一样，虽然牛頓比較側重于力学的观点。萊布尼茲的主要数学著作所用的标题与众不同：“关于悬鏈曲綫或伽利略提出的著名問題的解决”(1692)。这里所指的是均匀沉重而且易弯曲的綫索在平衡状态下形成的形狀問題。伽利略曾經不正确地認為这样的綫索是拋物綫。而萊布尼茲在这一著作中已經采用了下列各篇論文里他提到的微积分法：“求極大極小和切綫的新方法(分数和無理数都不是这种新方法的障碍)，和这一方法的特殊計算法”(1684)；“关于高等几何和不可分以及無穷概念的分析”(1686)；对切綫角和接触点的性質以及它們在数学实践上以較簡單的圖形代替較复杂的圖形的应用的“新探討”(1686)^②。

最后，萊布尼茲給出了所謂“几何計算法”的梗概。萊氏这种

① 依·牛頓，数学論文集，Д.Д. 莫尔杜黑—保力托夫斯基 (Мордухай-Болт-озский) 譯自拉丁文，注釋并作序，“自然科学經典”，ОНТИ, 1937。

依·牛頓，普遍的算术，或关于算术的分析与綜合的書，譯自拉丁文，“科学經典”，АН СССР, 1948，“可化为方程式的几何的問題”一章佔了142頁(自102頁到244頁)。

依·牛頓(1643—1727)，誕生300週年紀念文集，С.И. 瓦維洛夫院士主編，АН СССР, 1943。

牛頓傳記写得最好的是С.И. 瓦維洛夫的依薩克·牛頓(1643—1727)，АН СССР, 1943，第二版，1945。

② 萊布尼茲著作选集 А.П. 尤史凱維奇編譯，“数学进展”，卷3，第一期(23)，1948，

思想直到十九世紀才获得进一步發展。

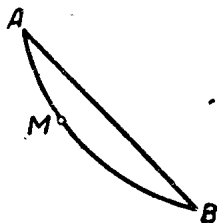


圖 1

所謂“Брахистохрон 問題”——依照字义是“关于最短时间的曲线”問題——对数学分析的發展上具有重大的意义。

卓越的数学家、莱布尼兹的后繼者約翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667—1748)在 1696 年的数学杂志上发表的一篇题为“請数学家們解决的一个新問題”的短文中曾提出“最短时间的曲线問題”。

“在垂直平面上已知兩点 A, B (圖 1)，試决定一条路线 AMB ，使得只受重力影响的物体 M 以最短时间自点 A 开始沿这条路线下落”^①。

这个問題給变分法奠定了基础，而解决这一問題的則是莱布尼兹、牛頓、約翰和亞科夫(Jacob)·伯努利以及洛必大。曲线 AMB 原来是一条摆线。提出这个問題的伽利略却錯誤地認為曲线 AMB 是一圓弧。

著名的法国数学家、伯努利的学生古利亞姆·佛蘭遜·洛必大(Guillaume Francois L'Hospital, 1661—1704)出版了第一本微分法教程^②。这本教程的内容是同几何分不开的。其中已講到平面曲线的微分几何学。

1729 年 A.C. 克来罗(Clairaut, 1713—1765)向巴黎科学院提出“关于双重曲率曲线的研研”报告，从此奠定了空間曲线的微分几何基础。特别是，克来罗曾致力于行星圖理論方面的某些高深問題的研究^③。但是这些行星圖方面的問題直到本世紀才为 A.M. 李雅普諾夫(Ляпунов, 1857—1918)予以解决。就上述問題本身的提法来看，大部分是帶有几何性質的。克来罗关于天文学方面

① 約翰·伯努利，力学論文选，譯自拉丁文譯，“自然科学經典”，ОНТИ, 1937,

② 古·佛·洛必大，無窮小分析，譯自拉丁文，A.П. 尤史凱維奇校訂并作序。“自然科学經典”，ГТТИ, 1935。

③ A.C. 克来罗，根据靜水力学原理的地形理論。H.C. 雅浩恩托夫(Яхонтов)譯，H.И. 伊結利孙(Идельсон)注釋校訂，“科学經典”，АН СССР, 1947。

的兩篇論文，先后在 1751 年和 1762 年獲得了彼得堡科學院的獎金。在第二篇論文里克來羅確定了哈雷彗星行經近日點的時刻誤差只有 19 天。這顆彗星的週期大約是 75 年多。在它沿着圓錐截綫運行的當中經常遭受許多行星的干擾。雖然如此，終於把這顆彗星高度準確地計算出來。在這一點上，當時獲得高度發展的幾何學起了很大的作用。

偉大的科學家，俄國的院士李昂納德·歐拉(Leonard Euler, 1707—1783)在他成效素著的科學研究工作中對幾何也很注意。1760 年他寫過一篇奠定了曲面理論基礎研究的報告——“關於曲面的曲率的研究”。在空間曲綫理論方面，歐拉也進行過出色的研究。在物理——數學科學領域中，包括造船學在內，似乎處處都留下了這位天才科學家的許多奇跡^①。他的名字將永遠與數學科學聯繫在一起。歐拉逝世之後，當時的人們舉行了最隆重的儀式表示哀悼。康道爾斯所著歐拉傳在敘述 1783—1784 年追悼歐拉的盛典時寫道：“於是，本世紀之初仍然被人們看作野蠻人的民族，如今卻給文明的歐洲樹立了一個榜樣——這個民族的偉大人物生者榮而死者哀；在這方面，其他民族不能不感到慚愧，他們不但沒辦法超過俄羅斯，甚至也不能追隨他的後塵”。

歐拉是俄國數學學派和俄國數學教學參考文獻的奠基者。而且他的著作在滿足我國的實際要求方面也有很大的意義；我們只

① 李昂納德·歐拉(1707—1783)，逝世 150 週年紀念文集和資料集，科學與技術歷史研究彙報，第二集，第 1 期 АН СССР, 1947。

歐拉——按照那時一般的學者那樣——除了少數的例外，他是用拉丁文寫文章的。現在他的許多作品都被翻譯出來。例如：

李昂納德·歐拉，無窮小分析引論，第一冊，Е. Л. 帕查諾夫斯基(Пацановск й)譯自拉丁文，С. Я. 盧列(Лурье)教授校，作序並注釋，“自然科學經典”，ОНТИ, 1936。

“具有極大極小性質的曲綫的求法，或者在最廣的意義下等周問題的解法”，國王教授和彼得堡皇家科學院委員李昂納德·歐拉著，“自然科學經典”，ГГИИ, 1934。

李昂納德·歐拉，質點的動力學基礎，譯自拉丁文，“自然科學經典”，ОНТИ 1938。

李昂納德·歐拉，微分學，譯自拉丁文，ГИГТЛ, 1949。

國立技術——理論出版社準備出歐拉的積分學。

要回想一下他在造船事業、制圖術、天文学和力学等方面的著述就可以知道了。

特別值得提起的是欧拉推导出著名的流体力学的方程和支持在一点上的剛体运动的方程。不管是在欧拉或者稍迟一点的科学家的作品中，几何学都起着重大的作用。

和欧拉同时的法国大百科全书編輯人和数学家讓·达朗贝尔(Jean D'Alembert 1717—1783)在他的一篇著名論文“动力学”(1743)^①中，利用他那久已广泛流傳的“达朗贝尔原理”，提出一种把复杂的动力学問題归結为簡單的靜力学問題以解决动力学問題的方法，这样一来就为几何学在动力学方面的应用上开辟了广阔的道路。

“解析力学”的作者、十八世紀最傑出的数学家之一約瑟夫·路易·拉格朗日(Joseph Louis Lagrange 1736—1813)，虽說表面上用坐标方法而不用“任何圖形”，但是他却到处应用几何学^②。

与此相反，在法国傑出的数学家路易·普昂騷(1777—1859)的著作中佔优势的是純几何的方法。他的“靜力学原理”(1804)^③是用直到今天还在靜力学教程里講的微向量的方式講述的。

偉大的俄国力学家“俄罗斯航空之父”、优秀的几何学家尼古拉·叶果洛維奇·茹可夫斯基(Николай Егорович Жуковский, 1847—1921)在一篇題为“关于理論力学中的几何解釋的意义”的演講中指出：“力学在最初的发展阶段上只依靠几何的方法。阿基米德、伽利略、惠更斯对力学的研究——也是帶有几何性質的。牛頓的‘自然哲学的原理’的全部叙述系統是純几何的……但

① 讓·达朗贝尔，动力学，把物体的平衡和运动化归为可能小的数并用新的方法証明的論文。在这篇論文里叙述关于求任意形狀的物体相互作用时的一般規則。В. П. 叶烏尔新(Егоршин)譯自法文并註，“自然科学經典” ГИТТИЛ, 1950。

② 約·拉格朗日，“解析力学”，第一冊，第二冊，譯自法文，“自然科学經典”，ГИТТИ, 1950。

③ “約瑟夫·路易·拉格朗日(1736—1936)”誕生 200 週年紀念文集，АН СССР, 1937。

④ 路易·普昂騷，靜力学原理，譯自法文，НТИ, 1920。

是在笛卡兒提出以坐標軸表示空間運動的三種方向以後，萊布尼茲和牛頓所發現的無窮小分析就被普遍地採用了；在理論力學的研究中，解析方法越來越佔優勢，而這種方法在拉格朗日和他的後繼者們的著作中都已發展到高峰”。

其次，茹可夫斯基在以具體實例說明幾何學對力學的重要作用時補充說：“我為研究的幾何方法的優點辯護時還絲毫沒有涉及它的獨特性……但是解答問題的最後加工，是永遠屬於幾何學的。幾何學家永遠是創造已建成的建築物最後形象的艺术家。

茹可夫斯基在談到幾何方法在教育學上的意義時并引証了自己多年的教學經驗，他說道：“如果說某些公式或所學的某種置換方法容易記住的話，那末它們也同樣會很快地從記憶中完全消失。但是學生如果熟悉了所研究的現象的幾何圖形，便會經久不忘，永遠活在自己的回憶里……”^①。

加斯巴爾·蒙日(Gaspard Monge, 1746—1814)，在他的“分析在幾何學上的應用”這一著作中，繼承并且大大地推進了歐拉所創始的曲面的一般性質的研究。同時蒙日又創立了在機器製造和其它技術的領域內有着重大意義的“画法幾何學”^②。

1803年拉扎爾·卡爾諾(Lazare Carnot, 1753—1833)發表了“位置幾何學”，1806年又發表了“截綫的初步研究”。這兩篇文章雖然沒有超出歐氏幾何的範圍，但是卻和德沙格與帕斯卡的著作一樣，已成為投影幾何的先聲。

卡爾·弗萊得利希·高斯(Carl Friedrich Gauss 1777—1855)於1827年出版“關於曲面的一般研究”^③。這篇著作是幾何學上的

① Н. Е. 茹可夫斯基教授，著作全集，第Ⅸ卷，ОНТИ，1937。

② 加斯巴爾·蒙日，分析在幾何學上的應用，譯自法文，“自然科學經典”，ОНТИ 1936。

加斯巴爾·蒙日，画法幾何學，В. Ф. 計結(Газе)譯，Д. И. 卡爾金(Каргин)校注，“自然科學經典”，АН СССР，1947。

“加斯巴爾·蒙日(1746—1946)”，誕生200週年紀念文集，В. И. 斯米爾諾夫(Смирнов)院士編，АН СССР，1947。

③ 卡·弗·高斯，關於曲面的一般研究，М. М. 菲力波夫(Филиппов)譯自拉丁文。高斯、貝爾特拉米、黎曼、給利木高力其(Гельмгольц)李、普恩加萊關於幾何基礎，喀山，1893。

重要貢獻，它对几何学的发展有过很大的影响。

我們可以看到，在罗巴切夫斯基以前，几何学及其应用已获得相当高度的发展。但是几何学所涉及的材料，不管它有多么复杂，那些构成几何大厦的基本命题和公理，始终是欧几里得式的。在罗氏以前，所涉及的是已经高度发展了的欧氏几何学。例如，“画法几何”只是一种方法，而不是一种新的几何学；“解析几何学”只不过是一种坐标方法。但是面目一新，与旧的欧氏几何有根本不同的新几何学创始者，当推尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基。罗氏独自走过了在他以前欧氏几何所经历的全部道路而建立起自己的非欧几何学。本书只讲罗氏非欧几何学的初等部分，包括罗氏三角概要。罗氏以自己的几何创作，在几何学以及一般数学的发展上完成了一个极为重要而巨大的革命性的跃进。本书也要阐明罗氏的思想以及在罗氏著作影响下所发生的种种思想。

罗氏的伟大创造是以平行线论的研究为基础的。这项研究工作导源于阐明欧氏平行公理的意义。欧几里得“几何原本”的评论家们特别注意的就是平行线论和所谓欧氏第五公设：“如有二直线与第三直线相交，而且截线同侧的二内角和小于二直角时，则此二直线经充分延长后，必在截线所成二内角之和小于二直角的一侧相交”。

某些版本把这一公设列为“第十一公理”。

在这里，同许多旧版书上的一样，“充分延长”这句话是多余的。直线不能延长，直线段才可以延长。

当时，人们除对第五公设否认明显外，其它公设则完全认为是明显的。有人就企图用其它公理来证明这一公设。但是一些几何学家们在试证把第五公设改为定理的道路上，都遭遇了似乎难以克服的困难。他们想规避这一公设而代以另一比较明显的公设。在这条道路上许多可以代替欧氏公设的命题被制定出来。

通常在任何虚伪的证明一种公设的背后，往往以隐蔽的形式依据了与这个公设等价的命题。本书第一章将详细地研究某些几