高等學校教學用書

高等代數教程

E. C. 里亞平著

高等教育出版社

高等學校教學用書

高等代數教程

E. C. 里亞平 著
雷垣 周彭年
曹錫華 李漢佩 譯

高等教育出版社

本書係根據蘇俄教育部教科書出版社（УЧПЕДГИЗ РСФСР）1953年出版的里亞平（Е. С. Ляпин）所著"高等代數教程"（Курс высшей алгебры）譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲師範學院物理數學系的參考書。

高等代數教程

Е. С. 里亞平著

雷垣等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

商務印書館上海廠印刷 新華書店總經售

書號533（課467） 開本850×1168 1/32 印張12 2/16 字數337,000

一九五六年二月上海第一版

一九五六年二月上海第一次印刷

印數：1—5,500 定價：(7)￥1.52

目　次

第三篇 線性代數

序

本書供初學高等代數者用。它既照顧到正學着代數課程的大學生(師範學院或大學的),又照顧到有意自學這門課的人。因爲在學習高等數學時,高等代數是首先學習的幾門之一,因而,這本書的讀者應基本上已具備中學的數學知識(此外,數學分析中的最簡單知識也要具備一些)。由此就不可要求讀者能靈活運用近代數學概念和輕易地分析任何複雜的數學論斷(從這兩方面來說,高等數學所提出的要求遠遠超過中學課程中的要求)。教會這種本領是最初教高等數學時的最重要任務之一,因而也是本書的最重要任務之一。

上述基本方針完全規定了本書敍述的內容和性質。本書並沒有任何其他目的。特別是,不想將它用作高等代數手册,更不想用作某些部分的全書。本書也不是各種代數結果的彙集,這些結果可能對有較高數學修養的人是有興趣的,但對初學者却是完全多餘的。

我們不談那些作爲敍述之基礎的個別因素,我只指出一點,卽必須拋棄所謂"敍事"體的敍述。將引言,例子,基本斷語及演證混在一起而無清晰界限的體裁,對於初學高等數學是完全不相宜的。我毫不惋惜地破壞了敍述的節奏,而將全文分裂成小段,使每一段都有一定的用處。這時所用的標號也可使引證形成系統。這種系統起着很大的作用,因爲我認爲:要求讀者在閱讀本書的任一時刻都能記得以前所述的材料是完全不可能的。

自然,讀者希望認識一下近代蘇聯代數學家的工作範圍及其最重要的結果。但是,代數的發展是這樣地快,要觸及正在進行研究工作的那些部門都不是容易的。因此,只能分別指出我國研究者的工作方向,

他們的名字，以及一些在敍述上易懂的結果。

在高等代數的講授中有兩種敍述程序。有些教師從線性代數開始然後轉到多項式的普遍理論，另外的則寧願採取相反的次序。這兩種觀點各有其優缺點。爲了使這教程在兩種體系下都可應用，我把它分成了三篇，而且第二第三兩篇互相獨立。在學習了第一篇後可逕讀第三篇而後再轉到第二篇。

在本書中敍述的材料相當於三學期授課時數，包括相當數量的練習在內。當學習這教程的規定時間較少時，有些部分可以略去（當然，要在剩下的部分中沒有須引證被略去部分的地方）。

這些部分就是：第二章 § 3，第五章 § 1, 2, 4, 6，第六章 § 4，第七章，第十章，第十一章 § 3 和 4，第十二章 § 3 和 4。

可是要着重指出，所示部分並非是在主要的本文上一些附加的東西。它們和其餘部分是緊密結合的，刪略它們全部或即使是一部分只是在縮短教程的迫切需要下才可以。

如我所指出的，本文被分成了許多小段，並按十進原則來記以號數。每段標以兩數字，用點隔開。例如 5.7 表第五節第七段。在引用別一章材料時還指出了章的號數。例如，IV, 5.11，這就表明指的是第四章第五節第十一段。

本書是我在列寧格勒師範學院及列寧格勒大學講授高等代數十五年中經驗的結果。作爲這些學校的全體教師中一員，我在自己的工作中就有可能去利用他們的經驗。我非常高興而感激地着重指出我校代數學家及大學生們——在教學進行中必不可少的參與者的這一重大作用。法捷耶夫（Д. К.）教授與庫洛什（А. Г.）教授曾予寶貴的指示，使在最後修正手稿時能利用它們，因此我對他們表示衷心的感謝。

里亞平

列寧格勒，1951。

第一篇　數與方程

第一章　複數

§1. 一些基本概念

1.1. 在許多數學問題裏，用到這樣的一種觀點，就是把某種數學上的事物組成的集合看作是整個的一個事物。這種觀點在幾何學裏表現得最爲明顯。例如，中心在一點 M 上而半徑等於 r 的一個圓周，一方面是組成這個圓周的所有點的集合，另一方面，我們又把它看作是整個的一個幾何學上的事物。在這種情況下，慣常使用這樣的說法：一個圓周是與一個給定的中心點等距離的一個動點的幾何軌跡，這也就是說，這個圓周是被我們看作是整個的一個事物，一個幾何上的圖形，而同時又是由這許多點所構成的，也就是它們的集合。對於其他各種曲線和幾何圖形說來，也都有這樣相同的看法。

在初等數學裏，上述觀點只在幾何學裏明顯地被用到。但是要把這種觀點用到數學的其他部門裏去也是不難的。例如，可以提到自然數列和它的性質，而把自然數列看作是整個的一個事物，雖然它是所有正整數的集合。可以從自然數列中取出任意一部分，譬如所有偶數的集合，或者所有從 1 到 100 的自然數的集合，而把它們都分別看作是整個的一個事物。

可以提出，類似的觀點實際上不僅僅在數學裏被用到。例如，我們有時候談到一羣學生；這時，我們把它看作是一個單位，是從總的方面來說明它，並給它以某些特性。同時，我們還明白這一羣是由一定數量

的個別學生組成的，而又是它們的集合。我們可以談起任何一個物體與它的性質，而把這物體看作是整個的一個事物；這時，我們知道這個物體又是由組成它的所有分子所構成的。

回到數學的領域裏來，我們必須瞭解這一點，就是上述觀點根本不需要用定義的形式來表達它，使它與某些以前早已給出了的其他定義聯系起來。這一種觀點只不過是一種數學上研究各種不同事物的基本看法，是一種很自然的，而不需要特別論證的看法。

用到上述觀點時，數學家採用了各種不同的名詞，其中大部分名詞的意義是很明顯的。例如，我們常常提到某些數學上事物的集體，或者全體(點的集體，一定次數的多項式的全體，等等)，有時候，提到系(整數系，等等)這些名詞。但是，在這些情況下，集合，或簡稱集的這個名詞是最常用的(一個圓周是與一個給定點——中心點——等距離的所有點的集，所有整數的集，等等)。"集"這個名詞的意義是完全與"集體"，"全體"，"系"這些名詞的意義相類似的，但是，如上面說過的，集這個名詞比其他各名詞更爲常用。從這裏可以得出，"集"這個名詞並不一定與"很多"這一概念相聯系着。例如我們可以說方程：

$$x^2-3x+2=0$$

的根的集，雖然這個集總共只是由兩個數($x_1=1$, $x_2=2$)所組成的。也可以說所有小於 9 而要同時能被 2 與 3 所整除的自然數的集，雖然這個集只是由 6 這一個數所組成的。爲了避免由"集"這個名詞所引起的錯誤的聯想，最簡便的方法是只要記住："集"這個名詞總可以用"集體"，"全體"，"系"，"組"這些同義辭來代替使用，而這些同義辭並不會引起"很多"這一概念的聯想。以後，我們要常用"集"這個名詞，以及與它同義的一些其他的名詞。

設給定了一個事物的集(集體，系，組等等)，則組成這個集的各個事物都叫做這個給定的集的元素。例如，自然數列是所有正整數的集；其中每一個正整數是這個集的一個元素，而其他事物，譬如非整數或負

數，都不是它的元素。以後，我們要時常用“一個集的元素”這一個名詞。這時要記住，一個給定集的元素就是指組成這個集的那些事物。

1.2. 必須順便提一下，在數學裏，有一個特殊學科，專門研究無限集合中的一些最複雜的性質。它研究各種集合中所具有的共同性質，不管各種集合中的元素是由什麼事物組成的。在研究這種複雜理論的過程中，碰到過許多很大的困難。由於這些困難，數學上最困難的理論之一的集合論因而大大擴充了。必須着重指出，這些困難是在上述理論進一步的發展過程中存在着的，而與我們目前採用“集”這個名詞的自然意義毫無關係。因此，在本教程的範圍內，不需要討論有關“集”這個名詞的任何深刻的與困難的理論，而我們使用“集”這個名詞的意義即根據通常採用的意義。我們也可以完全不講到這個名詞以及上面關於這個特別觀點所提到的一切聲明，只要每次碰到各種事物時我們直接講出那些具體事物。但是有了這些說明，今後我們能節省不少時間與篇幅。

1.3. 自然數列是大部分數學理論的基礎構成部分。有幾種方法可用來解釋這個概念。除與計數概念有直接聯系的描述性的解釋方法外，還有上述概念的複雜的公理論證的解釋方法。我們假定讀者已經由某種方法熟悉了這個基本概念。當說到自然數列，自然數上的算術運算與這些運算的性質時，我們把它們看作是讀者十分熟悉的內容。

1.4. 下面所述的性質是自然數列的一個基本性質，它在自然數列的公理論證中，是包括在定義自然數列的公理中。不管取出怎樣的一個自然數的集，在它裏面總有一個數值最小的自然數存在(有時，用任何其他與之有相同意義的性質來代替)。

這一個性質不應當看作是很明顯的當然之理(在數學裏，所謂當然之理，通常是指這些斷語，它們的正確性可以直接從斷語本身中推得的)。要注意，沒有類似的關於最大數值的性質存在。*例如，在所有自然數的集裏，沒有一個在數值上超過其他一切數的數。*在其他的一些

數的集合裏，也可以沒有最小的數。例如，在所有正有理數的集裏，沒有最小的數。

1.5. 在 1.4 裏所提到的那個自然數列的一個性質是一個非常通行的所謂數學歸納法的證明方法的基礎。設我們有一個由許多斷語組成的集（有限的或無限的），而且這些斷語按自然數順序依次編號如下：

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \cdots,\ E_n,\ \cdots。$$

數學歸納法的原理斷定：假如這些斷語具有下面兩個性質：

（1）這些斷語中的第一個是正確的；

（2）當編號爲小於 n 的 k 的一切斷語 E_k 都是正確時（$k=1, 2, \cdots, n-1$），總能推得斷語 E_n 是正確的；

則所有這些斷語都是正確的。

容易證得，用數學歸納法來進行的任何證明是正確的。事實上，假使某些斷語 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 具有上面數學歸納法原理中的兩個性質，但是又假設這些斷語中有不正確的。這時，在這些不正確的斷語中，我們取出編號爲最小的一個（因爲 E_i 的編號都是自然數，所以在 E_i 中那些不正確的斷語的編號組成的集合中，必定有最小數存在）。設這個斷語是 E_m。根據第一個條件，$m\neq 1$。根據這個數 m 的定義，所有斷語 $E_1, E_2, \cdots, E_{m-1}$ 都是正確的；但這時，由第二條件的結果，必定推得斷語 E_m 是正確的。這樣，假設在斷語 E_i 中有不正確的斷語便引到矛盾的結果。

利用數學歸納法進行證明時，必須驗證兩個條件（1）與（2）都是適合的。第一個條件是可以直接驗算的。要第二個條件能適合，通常是這樣來證明的：先假定，對於任意一個自然數 n 來說，所有斷語 $E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$ 都是正確的（這就是所謂歸納法的假定）。再利用斷語 E_i 的某些具體性質來證明：從所作的假定必定推得斷語 E_n 的正確性。

1.6. 必須注意，我們常常不說所有斷語 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 都是正確的，而說，對於任何 n 來說，與這任意自然數指標 n 有關的一般斷

語 $\varXI_n$ 是正確的。不言而喻，這是一樣的。

還要提到，$\varXi_n$ 的正確性常常可以從單個 $\varXi_{n-1}$ 的正確性推得，而不需要引用其他 $\varXi_1, \varXi_2, \cdots, \varXi_{n-2}$ 的正確性。因此，1.5 裏的條件（2）可以適當地改寫。這樣的減少條件在大部分證明的情況下是完全可通用的，但是有時候它就不通用了。

以後，我們總要根據 1.5 裏所列出的條件來進行歸納法的論證。

當然，在用數學歸納法進行論證時，不必要把所考察的論證用從 1 開始的自然數編號起。假如編號是從 2, 3 或任何自然數開始，那末所有論證仍然有效，尤其是，在這種情況下，所考察的斷語可以重新從 1 開始編號起。假如最初的斷語的編號是 0，而不是 1，那末也是一樣的。

1.7. 例 （1）證明下面不等式：

$$\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{(n-2)+\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}<\sqrt{n}+1,\quad (n=1,2,3,\cdots)。$$

因爲 n 可以取任何自然數值，所以我們這裏所考察的實際上不是一個斷語，而是無限個斷語。就是：

第一個斷語，$(n=1)$：$\sqrt{1}<\sqrt{1}+1$；

第二個斷語，$(n=2)$：$\sqrt{2+\sqrt{1}}<\sqrt{2}+1$；

第三個斷語，$(n=3)$：$\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}<\sqrt{3}+1$；

第四個斷語，$(n=4)$：$\sqrt{4+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}<\sqrt{4}+1$；

……………………………………………………………

（當然，也可以這樣說，我們原來的不等式是一個與 n 有關的斷語，其中 n 取一切自然數值，而由原來不等式中取 $n=1, 2, 3, \cdots$ 時，所得到的不等式，是它的特殊情形。）

現在我們要用數學歸納法來證明上面所有的斷語都是正確的，也就是，要來證明原來的不等式對於任何自然數 n 都是正確的。第一個斷語：

$$\sqrt{1}<\sqrt{1}+1$$

顯然是正確的。現在假定（歸納法的假定），對於任一個 n，所有編號爲小於 n 的 k 的斷語都是正確的，也就是，下面各式都是正確的：

$$\sqrt{k+\sqrt{(k-1)+\sqrt{\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}<\sqrt{k}+1,\quad (k=1,2,3,\cdots,n-1)。$$

我們要由此推得編號爲 n 的斷語是正確的：利用所作的假定，得到：

$$\sqrt{n+\underbrace{\sqrt{(n-1)+\sqrt{\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}_{\sqrt{n-1}+1}}<\sqrt{n+\sqrt{n-1}+1}<$$

$$<\sqrt{(\sqrt{n})^2+2\sqrt{n}+1}=\sqrt{(\sqrt{n}+1)^2}=\sqrt{n}+1。$$

因爲，在我們論證時，n 可以取任何值，所以根據數學歸納法的原理，我們可以作出結論：上面所有的斷語都是正確的，也就是，所有考察的不等式，卽不等式

$$\sqrt{n+\sqrt{(n-1)+\sqrt{\cdots+\sqrt{3+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}<\sqrt{n}+1$$

對於任何自然數值 n，都是正確的。

應該指出，由於用數學歸納法來證題時總是按同樣的格式來進行的，所以爲了避免單調的重複起見，通常文字的說明就做得比上面所做過的更簡略些。

（2）證明：任何大於 1 的自然數可以表成質數的乘積的形式（當然，讀者早已熟悉這個重要的性質）。我們用數學歸納法來進行這個證明：

對於第一個所考察的數 2 來說，我們的斷語是正確的，因爲 2 本身是一個質數（有 $2=2$，也就是，2 可以表成只有一個因數的"乘積"的形式）。

現在假定要求證明的斷語，對於自然數 $2, 3, \cdots, n-1$ 來說都是正確的。由此來推得斷語對 n 來說也是正確的。

假如 n 是質數，那末對它來說，所要求證的性質是正確的。假如 n 不是質數，那末

$$n=a\cdot b,$$

其中 a 與 b 都是小於 n 而大於 1 的自然數。根據歸納法的假定，a 與 b 都可以表成質數的乘積的形式：

$$a=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_r;$$
$$b=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_s。$$

因此立刻推得 n 可以表成質數乘積的形式：

$$n=a\cdot b=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_r\cdot q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_s。$$

最後，讀者假如想熟練運用數學歸納法，那末我們介紹 И. С. 索明斯基著的"數學歸納法"這一本書（數學通俗講座之一），國立科學技術理論書籍出版社，1950 年。

1.8. 從自然數集出發，先定義有理數，然後又定義無理數（用德狄金的分割法，或用基本數列法，或用其他方法來定義），就可以使數的範圍得到進一步的擴充。把數零和所有負數添到所有正數上去，所得到

的數集,叫做實數集。我們假定讀者對於實數集的構成理論,與在實數上的四種有理運算(加、減、乘、除)及實數的各種基本性質,都是很熟悉的。

1.9. 在研究數學裏各種作法的時候,總必須注意到這些作法在實際上實施的可能性。問題在於:在數學裏進行推理的時候,常常要用到這些作法,而這些作法在原則上毫無疑義是存在着的。但是對於實施性方面來說,就沒有給出如何實際地進行這些作法的辦法。我們舉出下面一個在數學分析教程裏所考察過的實數性質作爲例子。設給定了一個實數的集,並設有這樣的一個數 N 存在,使得在這集合中,每一個數都小於它。那末,有這樣的一個數 ξ 存在,使得對於在這集合中的任何數 α 來說,$\alpha\leqslant\xi$ 是正確的;而且對於任何的 $\xi'<\xi$ 的數 ξ' 來說,在這集合中有這樣的一個數 β 存在,使得 $\beta>\xi'$。

讀者一定已經知道上述這個定理的證明,它是要依賴於實數的一些基本性質的。這個證明,從嚴格性方面來說,是毫無異議的。在很多論證的進行中,用到了上述這個數 ξ 存在的這一事實。同時,應當注意到,關於在任何實數的無限集的具體例子中,如何實際地求出上述數 ξ,在上面所提到的證明裏,並沒有給出任何辦法。這樣,我們所考察的作法(求數 ξ)在原則上是存在着的,但在各種具體情形下,它是不能實際地求出來的。在數學裏,常常會碰到這種類似的作法與論證。我們稱它們爲不可實施的,或是沒有算法的。與這種作法相對的,有這種方法,它們的特點是:它們在實際上是存在着的,它們在原則上可以經過一連串的精確規定了的寫出來的運算與費去相當長的時間(即使很長的時間)把所要求的答案實際地求出來。這種作法叫做有算法的,或可實施的。

我們可以舉出下面一個求含有兩個未知數的方程: $x^2+y^2=N$ 的整數解的問題來作爲例子。因爲如果兩個數 x 與 y 是這個方程的解的話(在這種情況下,它們的解必須是整數),則它們的絕對值就都不能超

過 N，所以爲要確定這種數的存在與求得問題，只要把所有從 1 到 N 的整數代入方程左邊的 x 與 y 中來驗算。作過平方與加法運算後(實際上，我們能對於任何整數作這兩種運算)，我們就能確定在 x 與 y 取怎樣的數時才得到數 N。這樣，對於每個具體數字 N 來說，要求得上述方程的整數解這個問題就可以經過一定次數的上述可實施的運算來解決。因此上述問題的解法是有算法的。

§2. 向量

2.1. 在幾何學裏，向量概念廣泛地被使用着。這個概念和力學與物理學這兩個領域也有着密切的關係，而且在那裏被應用得很有系統，很有成效。向量理論的基本定義以及這個理論的以後發展方向基本上都正是由這個理論的那些應用所決定的。我們所以要簡單地論述一下向量，祇因爲向量理論的基本概念會給複數概念一個非常自然與適當的解釋。向量可以被考慮在平面上，或是在空間裏。爲了符合我們的目的，我們只討論到平面上的向量(雖然在上述領域裏，最有價值的應用是在空間中的向量)。但是，讀者很容易會看到，這一節裏的材料可以完全不難推廣到空間中去。

2.2. 假如給定了一個正實數與一平面上的一個方向，那末我們就說，在這平面上給定了一個向量。設這個向量記作 $\boldsymbol{u}$。這個正實數叫做向量 $\boldsymbol{u}$ 的模(或長度)，記作 $|\boldsymbol{u}|$，而這個方向叫向量 $\boldsymbol{u}$ 的方向。這樣，向量本身是由它的兩個要素——模與方向——的組合所確定。

此外，我們還要考慮零向量——它的模是由實數 0 所確定，而它的方向是不確定的。

2.3. 用下面的方法來考慮平面上向量的方向是最方便的。我們假定在平面上給定了一支軸(就是具有方向的一條直線)。這個軸的方向與一向量 $\boldsymbol{u}$ 的方向間的夾角 φ 叫做向量 $\boldsymbol{u}$ 的幅角，記作：

$$\arg \boldsymbol{u}=\varphi。$$