三角不等式及应用

ANJIAO BUDENGSHI
YINGYONG

海教育出版社

中学生文库

三角不等式及应用

张运筹

上海教育出版社

中学生文库　　三角不等式及应用

张　运　筹　　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

江苏启东印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本787×1092 1/32　印张4.75　字数97,000

1984年5月第1版　1986年8月第3次印刷

印数55,001—95,000本

统一书号：7150·3128　　定价：0.57元

内 容 提 要

三角不等式涉及到许多基本的三角知识，又是一种有用的数学工具．高中学生阅读本书，既可复习三角知识，提高综合应用的能力；又可学到一些数学方法．全书由浅入深，从基础知识到几何应用，比较全面地介绍了有关三角不等式的各种初等问题。

前　言

不等式中如果含有一个或若干个变量的三角函数式，就叫做三角不等式．在中学课本中，三角不等式并没有集中成一节重点讲解．但是，三角不等式中涉及到许多基本的三角知识，证明三角不等式往往要综合应用代数、几何知识．同时由于不等式和函数及其极值的密切联系，三角不等式又是一种有用的数学工具．正因为这样，高中学生以三角不等式作为课外阅读的素材，既可以复习三角知识，又可以提高综合应用数学知识的能力，并学到一点有用的数学方法．

这本小册子的绝大部分只用到高中三角与代数的知识．只是为了完整起见，我们也编入了一小节要用到初等微积分的内容．书中附有一些练习，可供读者选做．

对三角不等式历来总结不多，这本小册子试图把证明三角不等式的方法作一些初步的归纳．这种尝试一定还会有许多不足之处，希望读者加以指正．

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

一、证明三角不等式的预备知识

拿到一个三角不等式后，我们应该沿着怎样的途径去证明它呢？这是初学者常常提出的问题．

作为类比，让我们先举一个证明代数不等式的例子，看看代数不等式的证明是怎么回事．

［例 1］ 求证

$$(x^2+y^2+z^2)[(x^2+y^2+z^2)^2-(xy+yz+zx)^2]$$
$$\geqslant(x+y+z)^2[(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)]^2.$$

其中 x、y、z 是实数．

证明 我们分两步走．

第一步，变形．为了变形中书写的方便，有时可以作一些变量代换．现在我们设 $x+y+z=t_1$，$xy+yz+zx=t_2$，于是原式左边变为

$$f_1=(t_1^2-2t_2)[(t_1^2-2t_2)^2-t_2^2]$$
$$=(t_1^2-t_2)(t_1^2-2t_2)(t_1^2-3t_2),$$

右边变为

$$f_2=t_1^2[(t_1^2-2t_2)-t_2]^2=t_1^2(t_1^2-3t_2)^2.$$

$$\therefore\quad f_1-f_2=(t_1^2-3t_2)[(t_1^2-t_2)(t_1^2-2t_2)$$
$$-t_1^2(t_1^2-3t_2)]=2t_2^2(t_1^2-3t_2).$$

因为 $t_2^2\geqslant0$，这样就把证明 $f_1-f_2\geqslant0$ 的问题归结为求证

$$t_1^2-3t_2\geqslant0.$$

第二步，对 $t_1^2-3t_2$ 继续变形.

$$\begin{aligned}t_1^2-3t_2&=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\\&=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\&=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2].\end{aligned}$$

因为最后一个等号右边大于等于0，所以

$$t_1^2-3t_2\geqslant 0.$$

所以原式得证．并且我们还看出，原不等式仅当 $t_2=0$ 或 $t_1-3t_2=0$ 时成立等号．也就是说当 $xy+yz+zx=0$ 或 $x=y=z$ 时成立等号.

如果我们熟练掌握了 $x^2+y^2\geqslant 2xy$ 和同向不等式的可加性，那么第二步的配方变形可以免去．这是因为

$$x^2+y^2\geqslant 2xy,\quad y^2+z^2\geqslant 2yz,\quad z^2+x^2\geqslant 2zx,$$

再把这三式相加，在所得不等式两边乘 $\frac{1}{2}$，立即得到

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx.$$

从这个例子中我们看到：

(i) 在变形中，应该严格遵守不等式的变形规则．比如说，不能把一个式子随意地乘到不等式两边．本例中的第一步如果轻率地把 $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$ 乘到原不等式两边，因而免去了第二步，那么所得的"证明"就是不严密的.

(ii) 虽然不等式 $f_1(x)\geqslant f_2(x)$ 成立的含义是说，对于定义域中的任何值 x_0，都有 $f_1(x_0)\geqslant f_2(x_0)$．但是我们往往不能根据这个定义来证明一个不等式．我们总是借助于归结成一些基本不等式来证明．例如这一题中就用到了

$$x^2+y^2\geqslant 2xy,\quad A^2\geqslant 0,$$

等等.

(iii) 有时,所要证明的不等式已经体现为基本不等式,当然证明也就很快完成了. 但更多的时候是,为了借助基本不等式,我们先要对原不等式的两边进行恒等变形. 有时这种变形还颇需技巧,象本例中的第一步、第二步都是这样.

概括地说,我们为了证明一个不等式,首先需要熟练地掌握相当数量的基本不等式,要了解有哪些基本不等式可用,怎么用;其次要掌握各种恒等变形,要用恒等作为达到不等的手段. 有时全部的困难就是在变形上;最后还得遵守不等式的变形规则. 其大体过程是

原不等式	→	变形	→	基本不等式

证明三角不等式同样地需要掌握"变形"与"基本不等式"这两方面的知识,但是范围将不限于代数而必须扩展到三角. 也就是说,越是能够灵活而又牢固地掌握下述预备知识:

(i) 基本的代数不等式,

(ii) 代数恒等变形的公式和技巧,

(iii) 三角函数中的一些基本的不等关系,

(iv) 三角恒等变形的公式和技巧,

我们证明三角不等式的能力就越强. 而证明的主要途径仍然是怎样通过适当的恒等变形归结为一些基本不等式. 这也可以用图示意如下:

三角不等式	→	代数恒等变形 三角恒等变形	→	基本代数不等式 三角函数基本不等关系

下面我们就分三角与代数两方面来叙述这些预备知识.

1. 三角方面的知识

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的值域

$$y=\sin x \quad 与 \quad y=\cos x$$

的值域都是 $[-1, +1]$，这就立刻给出了两个常用而又基本的三角不等式：

$$-1\leqslant\sin x\leqslant 1, \quad -1\leqslant\cos x\leqslant 1.$$

要注意的是，当 x 的取值范围不是全体实数时，上述不等式还可以加强．例如，

当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\sin\alpha\leqslant\sin x\leqslant\sin\beta;$$

当 $0\leqslant\alpha\leqslant x\leqslant\beta\leqslant\pi$ 时，

$$\cos\beta\leqslant\cos x\leqslant\cos\alpha.$$

这一点，我们将在三角函数的单调性一节中再仔细讨论．这里我们先由 $\sin x$, $\cos x$ 的值域导出两个有用的命题．

命题1 $$-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b-c}{2}\right)\leqslant\sin(ax+b)\cos(ax+c)\leqslant\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b-c}{2}\right).$$

证明 把 $\sin(ax+b)\cos(ax+c)$ 看成是 x 的函数，本命题相当于弄清这个函数的值域．作积化和差，所得结果中，一个是常数 $\sin(b-c)$，另一个是复杂自变量的正弦函数：

$$\sin(ax+b)\cos(ax+c)=\frac{1}{2}[\sin(2ax+b+c)+\sin(b-c)].$$

由正弦函数的值域知

$$-1\leqslant\sin(2ax+b+c)\leqslant1.$$

于是

$$\frac{1}{2}[-1+\sin(b-c)]\leqslant\sin(ax+b)\cos(ax+c)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}[1+\sin(b-c)].$$

又因为

$$-1+\sin(b-c)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-b+c\right)-1$$
$$=-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b-c}{2}\right),$$
$$1+\sin(b-c)=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-b+c\right)$$
$$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b-c}{2}\right),$$

所以原式得证.

注意，在这个证明中，除了用到了正弦函数的值域外，还用到了三角恒等变形的手段.

要求函数 $y=\sin(ax+b)\sin(ax+c)$， $y=\cos(ax+b)\cos(ax+c)$ 等的值域，当然可以仿照这个证明的方法类似地解决. 也可以利用余角的诱导公式，化成可以直接利用这个命题的形式.

命题 2 (1) 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in[0, \pi]$时，有

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3\leqslant3\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3};$$

(2) 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$时，有

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3\leqslant3\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}.$$

证明 (1) $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}$

$$=2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}$$

$$+2\sin\frac{\alpha_3+\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}}{2}$$

$$\times\cos\frac{\alpha_3-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}}{2}$$

$$\leqslant 2\left(\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3}{6}\right)$$

$$=4\sin\frac{\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3}{6}}{2}$$

$$\times\cos\frac{\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3}{6}}{2}$$

$$\leqslant 4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}.$$

$$\therefore\quad \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3\leqslant 3\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}.$$

这个证明中，在变形时运用了添补助项的技巧，还利用 $\cos x$ 的值域对原不等式的左边进行了适当的“放大”. 具体地讲，是这样进行的：

$$\because\quad \cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant 1,\quad \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\leqslant\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},$$

等等. 关于不等式的放缩，后面还要叙述（见 28 页）.

(2) 可仿照(1)证明.

在证明的过程中可以看出，等号仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ 时成立。这一点留给读者讨论.

当我们熟悉了凸函数理论之后，只要注意到 $\sin x$ 在 $(0, \pi)$凹，$\cos x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$凹，就很容易得出并推广这两个不等式(见 89 页).

有许多 $\triangle ABC$ 中的不等式，可以归结为应用命题 2.

[例 2] 求证，在 $\triangle ABC$ 中，如果 $m\geqslant 1$，那么

$$\sin\frac{A}{m}+\sin\frac{B}{m}+\sin\frac{C}{m}\leqslant 3\sin\frac{\pi}{3m}.$$

等号当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时成立.

证明 $\because\ m\geqslant 1$,

$$\therefore\ \frac{A}{m},\ \frac{B}{m},\ \frac{C}{m}\in(0, \pi),$$

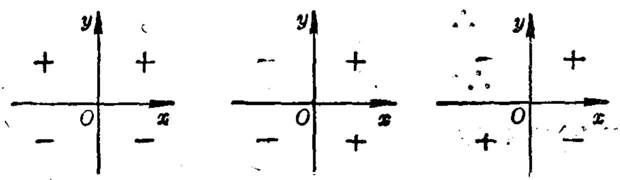
由命题 2 有

$$\sin\frac{A}{m}+\sin\frac{B}{m}+\sin\frac{C}{m}\leqslant 3\sin\frac{\frac{A}{m}+\frac{B}{m}+\frac{C}{m}}{3}$$

$$=3\sin\frac{\pi}{3m}.$$

(2) 三角函数的符号

各个三角函数值在每个象限内的符号如下图.



$\sin\alpha$　　　　$\cos\alpha$　　　　$\operatorname{tg}\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\alpha$

这些实际上是一些条件三角不等式．例如当 α 在第一象限，即

$$2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad (k\text{ 是整数})$$

时，有 $\quad \sin\alpha>0,\ \cos\alpha>0,\ \operatorname{tg}\alpha>0,\ \operatorname{ctg}\alpha>0,$

等等．

［例 3］ 求证，在 $\triangle ABC$ 中，

$$\cos A+\cos B+\cos C>1.$$

证明 由恒等变形，可得

$$\begin{aligned}
&\cos A+\cos B+\cos C\\
&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1\\
&=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1\\
&=1+4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\\
&=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

因为 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\frac{A}{2}$，$\frac{B}{2}$，$\frac{C}{2}$ 是锐角，从而

$$\sin\frac{A}{2}>0,\ \sin\frac{B}{2}>0,\ \sin\frac{C}{2}>0.$$

$$\therefore\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0,$$

$$\therefore\ \cos A+\cos B+\cos C>1.$$

从(*)这个式子看，$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 可以趋于 0 而达不到 0，所以 $\cos A+\cos B+\cos C$ 可以趋于 1 而达不到 1．趋

于 1 的条件是 A、B、C 中至少有一趋于 0. 本题是说 $\cos A+\cos B+\cos C$ 有下界 1 但没有最小值. 那么它有没有最大值？这也就是问 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 有没有最大值. 这个问题放到后面去解决.

(3) 三角函数的单调性

三角函数的单调性知识可以参考中学课本. 这个知识有两方面的用途. 一方面，单调性根据其定义就是条件不等式. 例如，$y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$中是增函数，这就是

如果 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<y\leqslant\frac{\pi}{2}$, 那么

$$\sin x<\sin y;$$

又如，$y=\operatorname{ctg} x$ 在$(0, \pi)$中是减函数，这就是，如果

$$0<x<y<\pi,$$

那么

$$\operatorname{ctg} x>\operatorname{ctg} y.$$

另一方面，当自变量有限制时，三角函数的值域往往要改变. 借助单调性可以搞清某些三角函数式的取值范围.

[例 4]　求证，如果 α 是锐角，那么

$$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\leqslant 1.$$

证明　$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right),$$

如果 α 没有限制，则

$$-1\leqslant\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1.$$

但现在$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以

$$y=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$

的值域并不一定是$[-1, 1]$. 我们利用单调性来讨论.

因为$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以

$$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi.$$

当
$$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$$
时, $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$是增函数, 所以

$$\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

当
$$\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$$
时, $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$是减函数, 所以

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{2\pi}{3}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

综合起来,有

$$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\leqslant1. \quad (\alpha\text{是锐角})$$

上面是先划分单调区间, 再依各单调区间分情况讨论得到$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的取值范围. 这一题的结论从单位圆上看更加直观一些(图1). 但其本质仍然是利用了$\sin x$的单调性. 在单位圆上我们是这样看的:

设有$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则

$$\angle xOP_1=\frac{\pi}{6},\ \angle xOP_2=\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2},$$

于是 $\alpha+\frac{\pi}{6}$ 的终边 OP 位于直角 $\angle P_1OP_2$ 内.

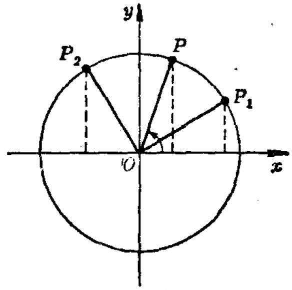


图 1

当 P 沿单位圆从 P_1 运动到 $(0,1)$，$\alpha+\frac{\pi}{6}$ 由锐角 $\frac{\pi}{6}$ 增大到直角 $\frac{\pi}{2}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 由 $\frac{1}{2}$ 增大到 1；当 P 从 $(0,1)$ 继续运动到 P_2，$\alpha+\frac{\pi}{6}$ 由直角 $\frac{\pi}{2}$ 增大到钝角 $\frac{2\pi}{3}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 由 1 减少到 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以

$$\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1.$$

考虑到 $\alpha\neq 0$，有

$$\frac{1}{2}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1.$$

这个结论可以推广. 即如果把 $\frac{\pi}{6}$ 换成锐角 α_0，显然上述过程仍然成立. 我们只要设 $P_1(\cos\alpha_0,\ \sin\alpha_0)$，$P_2(\sin\alpha_0,\ \cos\alpha_0)$，当 P 在 $\overset{\frown}{P_1P_2}$ 上运动，其纵坐标由 $\sin\alpha_0$ 增大到 1，再减小到 $\cos\alpha_0$. 所以，一般地有

如果 α, α_0 是锐角，那么

$$\min(\sin\alpha_0,\ \cos\alpha_0)<\sin(\alpha+\alpha_0)\leqslant 1.$$

其中 $\min(a,\ b)$ 表示 a、b 中较小的一个. 更一般些，有

命题 3 如果 $x,\ x_0\in \mathrm{I}\cup\mathrm{III}$ 或 $x,\ x_0\in\mathrm{II}\cup\mathrm{IV}$，那么