面向21世纪本科生教材

实变函数基础

侯友良 编著

国优秀出版社
汉大学出版社

面向21世纪本科生教材

实变函数基础

[illegible] 编著

全国优秀出版社
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数基础/侯友良编著.—武汉：武汉大学出版社，2002.10
面向21世纪本科生教材
ISBN 7-307-03672-X

Ⅰ.实…　Ⅱ.侯…　Ⅲ.实变函数　Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第059758号

责任编辑：李汉保　　责任校对：王　健　　版式设计：支　笛

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉市汉桥印刷厂
开本：850×1168　1/32　印张：8.375　字数：206千字
版次：2002年10月第1版　　2002年10月第1次印刷
ISBN 7-307-03672-X/O·270　　定价：14.00元

前　　言

本书是为数学系本科高年级学生编写的实变函数论教材，介绍一般空间上测度论的基础知识和欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的 Lebesgue 测度与积分理论.

现代数学的许多分支如概率论，泛函分析，群上调和分析等越来越多地用到一般空间上的测度理论. 对数学专业的学生而言，掌握一般空间上测度论的基础知识，已经显得越来越重要. 因此本书将一般空间上的测度论和$\mathbb{R}^n$上的 Lebesgue 积分理论结合起来介绍，即先介绍一般空间上的概念与定理，然后将$\mathbb{R}^n$上的 Lebesgue 测度与积分作为特例，加以重点介绍. 这样，既学习了 Lebesgue 测度与积分理论，也学习了抽象空间上的测度论. 从而提高了学习的效率. 这样处理的另一个好处是整个理论变得更统一，更简洁. 而且从总体上说，也不会增加太多的学习负担. 当然，由于增加了抽象性和一般性，在某些地方可能会稍稍增加一点难度. 在具体讲授时对一些内容的取舍可以根据情况灵活处理.

本书在编写上，力求内容精练，突出重点，便于学生对主要内容获得清晰完整的印象. 定理的证明过程详略适中，能够简化的证明尽量简化，有些地方适当留给读者一些思考的余地. 本书配有适量的习题. 完成其中的大部分习题，对于掌握教材的内容是必不可少的.

侯友良

2002 年 6 月

目　　录

第一章 集与集类 $\mathbb{R}^n$中的点集

集与集的运算是测度与积分理论的基础．本章首先介绍集论的一些基本内容，包括集与集的运算，可数集与基数，一些具有某些运算封闭性的集类如环与σ-代数等．然后介绍$\mathbb{R}^n$中的一些常见的点集．

§1.1 集与集的运算

集是数学的基本概念之一．它不能用其他更基本的数学概念严格定义之，只能给予一种描述性的说明．以某种方式给定的一些事物的全体称为一个集（或集合）．其中的成员称为这个集的元素（或点）．例如，数学分析中的实数集，有理数集，函数的定义域和值域，满足某些给定条件的数列或函数的全体所成的集等都是常见的集．几何学中的曲线和曲面都可以看成是由平面或空间的点所构成的集．

一般用大写字母如A,B,C等表示集，用小写字母如a,b,c等表示集的元素．若a是集A的元素，则用记号$a\in A$表示（读作a属于A）．若a不是集A的元素，则用记号$a\notin A$表示（读作a不属于A）．

不含任何元素的集称为空集，用符号$\varnothing$表示．我们约定分别用$\mathbb{R}^1$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{N}$和$\mathbb{Z}$表示实数集，有理数集，自然数集和整数集．

表示一个集的方法一般有两种．第一种方法是列举的方法，即列出给定集的全部元素．例如

$$A=\{a,b,c\}.$$

$$B=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}.$$

另一种方法是描述的方法．当集 A 是由具有某种性质 P 的元素的全体所构成时，用下面的方式表示集 A，

$$A=\{x:x\text{ 具有性质 P}\}.$$

例如，设 f 是定义在$\mathbb{R}^1$上的实值函数，则 f 的零点所成的集 A 可表示成

$$A=\{x:f(x)=0\}.$$

设 A 和 B 是两个集．如果 A 和 B 具有完全相同的元素，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 如果 A 的元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）. 若 $A\subset B$ 并且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集．按照这个定义，空集$\varnothing$是任何集的子集．由定义知道 $A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$.

设 A 和 B 是两个集．由 A 和 B 的所有元素所构成的集称为 A 与 B 的并集，简称为并，记为 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x:x\in A\text{ 或者 }x\in B\}.$$

由同时属于 A 和 B 的元素所构成的集称为 A 与 B 的交集，简称为交，记为 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{ 并且 }x\in B\}.$$

若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交．此时称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的不相交并．

类似地，可定义任意一族集的并与交运算．设 T 是一非空集（T 可以是有限集或无限集），$\{A_t\}_{t\in T}$是一族集．这一族集的并集和交集分别定义为

$$\bigcup_{t\in T}A_t=\{x:\text{存在某个 }t\in T\text{，使得 }x\in A_t\},$$
$$\bigcap_{t\in T}A_t=\{x:\text{对每个 }t\in T,x\in A_t\}.$$

特别地，当 $T=\mathbb{N}$ 为自然数集时，$\bigcup\limits_{n\in N}A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n\in N}A_n$ 分别记成 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 和

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$，分别称为$\{A_n\}$的可数并和可数交.

容易证明并与交运算具有如下性质：

(1) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$.（幂等性）

(2) $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(3) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.（交换律）

(4) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.（结合律）

(5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.（分配律）.

分配律可以推广到任意一族集的并与交的情形：

$$A\cap\left(\bigcup_{t\in T}B_t\right)=\bigcup_{t\in T}(A\cap B_t),$$

$$A\cup\left(\bigcap_{t\in T}B_t\right)=\bigcap_{t\in T}(A\cup B_t).$$

设A和B是两个集.由A中的不属于B的那些元素所构成的集称为A与B的差集，记为$A-B$或$A\backslash B$. 即

$$A-B=\{x;x\in A\text{ 并且 }x\notin B\}.$$

通常我们所讨论的集都是某一固定集X的子集.X称为全空间.我们称全空间X与子集A的差集$X-A$为A的余集，记为A^C. 设A和B是两个集.称集$(A-B)\cup(B-A)$为A与B的对称差集，记为$A\Delta B$.

容易知道关于差运算和余运算具有以下性质：

(6) $A\cup A^C=X$，$A\cap A^C=\varnothing$，$(A^C)^C=A$.

(7) $X^C=\varnothing$，$\varnothing^C=X$.

(8) $A-B=A\cap B^C$.

关于余运算还具有下面重要的运算法则.

定理 1.1.1 (De Morgan 公式)设$(A_t)_{t\in T}$是一族集.则

(1) $\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)^C=\bigcap_{t\in T}A_t^C$.(并的余集等于余集的交),

(2) $\left(\bigcap_{t\in T}A_t\right)^C=\bigcup_{t\in T}A_t^C$.(交的余集等于余集的并).

证明 (1) 设 $x\in\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)^C$,则 $x\notin\bigcup_{t\in T}A_t$. 故对任意 $t\in T$,$x\notin A_t$. 即对任意 $t\in T$,$x\in A_t^C$. 因此 $x\in\bigcap_{t\in T}A_t^C$. 这表明 $\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)^C\subset\bigcap_{t\in T}A_t^C$. 上述推理可以反过来,即从 $x\in\bigcap_{t\in T}A_t^C$ 可以推出 $x\in\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)^C$. 这表明 $\bigcap_{t\in T}A_t^C\subset\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)^C$. 因此(1)成立. 类似地可以证明(2). 定理证毕.

上述定理中的公式(1)和(2)称为 De Morgan 公式. De Morgan公式很重要,以后会经常用到它.

定理 1.1.1 的证明过程是证明两个集相等的典型方法. 下面再举一个例子.

例 1 设$\{f_n\}$是定义在集 X 上的一列实值函数. 令

$$A=\{x:\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0\}.$$

则成立

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}. \tag{1-1-1}$$

证明 由于 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ 当且仅当对任意 $k\geqslant1$,存在 $m\geqslant1$,使得对任意 $n\geqslant m$ 成立 $|f_n(x)|<\frac{1}{k}$. 因此我们有

$$\begin{aligned}x\in A&\Leftrightarrow\forall\, k\geqslant1,\exists\, m\geqslant1,\text{使得}\,\forall\, n\geqslant m,x\in\left\{x:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}\\&\Leftrightarrow\forall\, k\geqslant1,\exists\, m\geqslant1,\text{使得}\,x\in\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}\\&\Leftrightarrow\forall\, k\geqslant1,x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)|<\frac{1}{k}\right\}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{x: |f_n(x)| < \frac{1}{k}\right\}.$$

因此(1-1-1)式成立．证毕．

在例 1 中，集 A 的表达式(1-1-1)看起来较复杂，但它是通过比较简单的集$\left\{x: |f_n(x)| < \frac{1}{k}\right\}$的运算得到的，以后我们会看到集的这种表示方法是很有用的．

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个集．称集

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的乘积集(简称为乘积)，记为 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 或者 $\prod_{i=1}^{n} A_i$. 注意即使 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是 X 的子集，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 已经不是 X 的子集，它是 $X \times X \times \cdots \times X$ 的子集．

例如，二维欧氏空间$\mathbb{R}^2$可以看作是$\mathbb{R}^1$与$\mathbb{R}^1$的乘积，即$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. 又例如，$[a,b] \times [c,d]$就是平面上的长方形．

下面我们考虑集列的极限运算．设$\{A_n\}$是一列集．称集

$$\{x: x \text{ 属于无穷多个 } A_n, n \geqslant 1\}$$

为集列$\{A_n\}$的上极限，记为$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$. 称集

$$\{x: x \text{ 至多不属于有限个 } A_n, n \geqslant 1\}$$

为集列$\{A_n\}$的下极限，记为$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$. 显然$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$. 若$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$. 则称集列$\{A_n\}$存在极限，并称 $A = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 为集列$\{A_n\}$的极限，记为 $\lim_{n\to\infty} A_n$.

定理 1.1.2　设$\{A_n\}$是一列集．则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

证明　我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n = \{x: x\text{ 属于无穷多个 }A_n, n\geqslant 1\}$$

$$= \{x: \text{对任意 } n\geqslant 1, \text{存在 } k\geqslant n, \text{使得 } x\in A_k\}$$

$$= \{x: \text{对任意 } n\geqslant 1, x\in \bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$$

类似地可证明上述第二式．定理证毕．

设$\{A_n\}$是一列集．若对每个$n\geqslant 1$，均有$A_n\subset A_{n+1}$（相应地$A_{n+1}\subset A_n$），则称$\{A_n\}$是单调增加的，记为$A_n\uparrow$（相应地，称$\{A_n\}$是单调减少的，记为$A_n\downarrow$）．单调增加和单调减少的集列统称为单调集列．

定理 1.1.3 单调集列必存在极限．并且

(1)若$A_n\uparrow$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

(2)若$A_n\downarrow$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

证明 (1)因为$A_n\uparrow$，故对任意$n\geqslant 1$，有$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k=A_n$，$\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 因此由定理 1.1.2 得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

所以

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

这表明$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$存在，并且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 类似地可证明结论(2)．定理证毕．

例 2 设$A_n=(0,1-\frac{1}{n}]$，$B_n=(0,1+\frac{1}{n}]$，$n=1,2,\cdots$. 则

$A_n\uparrow$，$B_n\downarrow$，并且

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1),$$
$$\lim_{n\to\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=(0,1].$$

设 A 是 X 的子集．令

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in A\\ 0, & 若\ x\notin A.\end{cases}$$

则 $I_A(x)$为定义在 X 上的函数，称之为 A 的特征函数．集的特征函数以后会经常用到．习题中列举了它们的一些简单性质．

§1.2　映射　可数集与基数

在数学分析课程中我们对函数已经很熟悉．在数学分析中函数的定义域通常是$\mathbb{R}^n$ 的子集，值域是实数集或者复数集．若将函数的定义域和值域换成一般的集，就得到映射的概念．

定义 1.2.1　设 X，Y 是两个非空集．若 f 是某一法则，使得按照这个法则，对每个 $x\in X$，有惟一的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记为

$$f: X\to Y.$$

当 y 与 x 对应时，称 y 为 x 在映射 f 下的像，记为 $y=f(x)$．称 X 为 f 的定义域．

在上述定义中，若 Y 是实数集或复数集，习惯上仍称 f 为函数．

设 A 为 X 的子集．称 Y 的子集

$$\{y: 存在\ x\in A，使得\ y=f(x)\}$$

为 A 在映射 f 下的像，记为 $f(A)$．特别地，称 $f(X)$为 f 的值域．设 B 是 Y 的子集．称 X 的子集

$$\{x: f(x)\in B\}$$

为集 B 在映射 f 下的原像，记为 $f^{-1}(B)$.

在数学分析课程中研究的函数当然是一种映射．除此之外，我们还经常会遇到许多其他的映射．例如，定积分可以看作是可积函数集到实数集的映射，求导运算可以看作是可导函数集到函数集的映射，线性代数中的线性变换就是线性空间到线性空间的映射等．

定义 1.2.2 设 $f:X\to Y$ 是 X 到 Y 的映射．若 $f(X)=Y$，则称 f 为到上的(或满射)．若当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是一一的(或单射).

如果 f 是 X 到 Y 的一一的到上的映射，有时我们称 f 是 X 到 Y 的一一对应．

设 f 是 X 到 Y 的一一的到上的映射．则对每个 $y\in Y$，存在惟一的 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$. 因此我们可以定义一个 Y 到 X 的映射 g 如下：对每个 $y\in Y$，令 $g(y)=x$，其中 x 是 X 中的惟一存在的满足 $f(x)=y$ 的元．称这样定义的映射 g 为 f 的逆映射，记为 f^{-1}. 显然逆映射是反函数概念的推广．若 f 是 X 到 Y 的一一的到上的映射，则由逆映射的定义知道成立以下等式

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ x\in X. \tag{1-2-1}$$

$$f(f^{-1}(y)) = y,\ y\in Y. \tag{1-2-2}$$

设 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 分别是 X 到 Y 的和 Y 到 Z 的映射．令

$$h(x) = g(f(x)),\ x\in X.$$

则 h 是 X 到 Z 的映射．称 h 为 f 与 g 的复合映射，记为 $g\circ f$. 显然复合映射是复合函数概念的推广．利用复合映射的记号，式(1-2-1)、式(1-2-2)可以分别写成

$$f^{-1}\circ f = i_X,\ f\circ f^{-1} = i_Y.$$

其中 i_X 和 i_Y 分别为 X 和 Y 上的恒等映射．

设 A 是 X 的子集，f 和 $\tilde{f}$ 分别是 A 到 Y 的和 X 到 Y 的映射．

若对于每个 $x\in A$ 成立 $\tilde{f}(x)=f(x)$，则称 $\tilde{f}$ 是 f 在 X 上的延拓，称 f 是 $\tilde{f}$ 在 A 上的限制，记为 $f=\tilde{f}|_A$.

定义 1.2.3　设 A,B 是两个非空集．若存在一个从 A 到 B 的一一的到上的映射，则称 A 与 B 是对等的，记为 $A\sim B$. 此外规定 $\varnothing\sim\varnothing$.

容易验证集的对等关系具有如下性质：

(1) $A\sim A$.（自反性）.

(2) 若 $A\sim B$，则 $B\sim A$.（对称性）.

(3) 若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.（传递性）.

利用对等的概念，我们可以给出有限集和无限集的严格定义．设 A 是一非空集．若存在一个自然数 n，使得 A 与集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 对等，则称 A 为有限集．规定空集是有限集．若 A 不是有限集，则称 A 为无限集．在无限集中，有一类集是我们以后会经常遇到的，就是我们下面要讨论的可数集．

定义 1.2.4　与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集称为可数集．

显然，集 A 是可数集当且仅当 A 的所有元素可以编号排序成为一个无穷序列

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

由可数集的定义知道，若 A 是可数集，B 与 A 对等，则 B 是可数集．

例 1　自然数集 $\mathbb{N}$ 当然是可数集．

例 2　整数集 $\mathbb{Z}$，奇自然数集和偶自然数集都是可数集．这是因为它们可以分别排序成为无穷序列

$$\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\},$$

$$\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\},$$

$$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}.$$

例 3　若 A 是可数集，B 是有限集，则 $A\cup B$ 是可数集．

证明　不妨设 $A\cap B=\varnothing$. 否则用 $B-A$ 代替 B 即可．设

$A=\{a_1,a_2,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$．则 $A\cup B$ 的元素可以编号排序为

$$A \cup B = \{b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1,a_2,\cdots\}.$$

因此 $A\cup B$ 是可数集．证毕．

定理 1.2.5 可数集的任何无限子集还是可数集．

证明 设 A 为一可数集，则 A 的所有元素可以编号排序成为一个无穷序列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots.$$

设 B 是 A 的一个无限子集．则 B 中的元素是上述序列的一个子列

$$a_{n_1},a_{n_2},\cdots,a_{n_k},\cdots.$$

将 a_{n_k} 与 k 对应，即知 B 是可数集．定理证毕．

定理 1.2.6 可数集的有限并或可数并还是可数集．

证明 设 $A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nm},\cdots\}$，$n=1,2,\cdots$，是一列可数集．则集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元素可按如下方式编号排序

$$\begin{array}{lllll}
A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\cdots \\
A_2 & a_{21}\nearrow & a_{22}\nearrow & a_{23}\nearrow & a_{24}\cdots \\
A_3 & a_{31}\nearrow & a_{32}\nearrow & a_{33}\cdots & \\
A_4 & a_{41}\nearrow & a_{42}\cdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}$$

在编号时，若碰到前面已编号的重复元素，则跳过去不再编号．于是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元素可按上述方式编号排序成为一个无穷序列．所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可数集．由于 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的无限子集，由定理 1.2.5 知道 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 是可数集．定理证毕．

定理 1.2.7 有限集的可数并是有限集或可数集．

证明 设$\{A_n\}$是一列有限集．若$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$是有限集，则定理的结论已经成立．若$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$是无限集，则显然$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$的元素可以编号排序成为一个无穷序列．例如，可以先排A_1的元素，排完A_1的元素后再排A_2的元素，这样一直排下去，若碰到重复元素则跳过去不排．此时$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$是可数集．定理证毕．

定理 1.2.8 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是可数集，则它们的乘积集$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$是可数集．

证明 用数学归纳法．当$n=1$时定理的结论当然成立．假定$A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1}$是可数集．设$A_n=\{a_1,a_2,\cdots\}$．对于每个$k\geqslant 1$，令

$$E_k=A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1}\times\{a_k\}.$$

则E_k与$A_1\times A_2\times\cdots\times A_{n-1}$对等，故每个$E_k$是可数集．由于

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

因此由定理 1.2.6 知道$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$是可数集．定理证毕．

例 4 有理数集$\mathbb{Q}$是可数集．

证明 令$A_n=\left\{\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\dfrac{3}{n},\cdots\right\}$，$n=1,2,\cdots$．则每个$A_n$是可数集．由于正有理数集$\mathbb{Q}^+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，由定理 1.2.6 知$\mathbb{Q}^+$是可数集．类似地，可以证明负有理数集$\mathbb{Q}^-$是可数集．因此$\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\mathbb{Q}^-\cup\{0\}$是可数集．证毕．

例 5 设$\mathbb{Q}^n$是$\mathbb{R}^n$中的有理点(即坐标全为有理数的点)的全体所成的集．则

$$\mathbb{Q}^n=\underbrace{\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}}_{n}.$$

由例 4 和定理 1.2.8，$\mathbb{Q}^n$是可数集．

例 6 整系数多项式的全体是可数集．