朱有清　贺才兴　编

朱有清 贺才兴 编
朱有清

十

高等数学复习十五讲（上）

上海交通大学出版社

高等数学复习十五讲

（上）

朱有清　贺才兴　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是高等数学复习参考书，分上、下两册。

上册有十讲，内容为分析引论、一元函数微积分学、级数、空间解析几何、多元函数微积分学和微分方程，并精选了近千道难度较高的典型例题。

读者对象主要是：工科院校及成人高校学生、高等教育自学考生、报考工科院校研究生的广大读者。

高等数学复习第十五讲

（上）

上海交通大学出版社出版

（淮海中路 1984 弄 19 号）

新华书店上海发行所发行

太仓印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/32印张32.125字数721,000

1985年11月第1版　1988年3月第3次印刷

印数25,001—33,500

ISBN7—313—00118—5/O13

定价：7.20元

前　言

近七、八年来，编者为上海交通大学报考工科院校硕士研究生的应届毕业生及为参加高等教育自学考试的同志开设了高等数学复习讲座，编写了《高等数学复习讲座》的教材。通过多次实践，普遍反映实际效果良好，考生都获得了较好的成绩。《高等数学复习讲座》一书受到了校内外越来越多同志的欢迎，许多单位，许多同志纷纷来函、来电索要这本教材，有关方面也希望将此书公开出版。为满足各方的需要，我们在原有的基础上进行了整理、充实和提高，编写了这本书。

本书是高等数学的一本复习参考书，分上、下两册。上册为微积分部分，下册为工程数学部分。我们在编写时，力求内容完善、讲述详细而又重点突出，对于一些常用的定义的叙述、定理的证明和公式的推导一般从略或从简。考虑到工科院校的特点，对某些例题的结论就不过分强调它的成立条件了。本书侧重于提高解题能力，通过典型例题启发读者的解题思路。对于本书所提供的解题方法，编者都反复斟酌、推敲，以期使读者能收到举一反三的效果。

本书具备以下几个特点：（1）概念清楚，叙述简洁、易懂，重点突出。（2）例题丰富（有不少是上海交通大学本科生历年的试题及数学竞赛题），解法新颖。（3）上、下两册均选编了典型的综合例题，强调了内容的融会贯通。（4）编绘了常用的空间图形，以使直观的几何图形帮助抽象的思维分析。

本书是在上海交通大学应用数学系领导的关心和支持下出版的，许多同志为本书的出版做了很多工作，我们在此一并致谢。

由于我们水平有限，加之时间仓促，书中会有不少错误和不足之处，恳望读者批评指正。

编　者

1985年7月1日

目　　录

第一讲　分析引论——函数、极限和连续

本讲的重点是函数概念、极限概念和函数的连续性．函数是变量与变量之间相互依赖关系的一种数学抽象，是高等数学研究的主要对象．极限概念贯穿于高等数学的始终，所有重要的概念，如导数、定积分、重积分等，都是建立在极限概念基础上．连续函数是最基本的一类函数，高等数学的主要概念是以连续函数为基础的．因此，正确理解函数概念、极限概念和函数连续概念，对于高等数学的系统学习是必要的．

§1.1　内容要点

一、函数

1．函数概念

定义 1* 设有非空数集 A 和数集 B，如果对数集 A 中的每一个数 x，按照对应关系 f 都对应数集 B 中唯一的一个数 y，则称对应关系 f 是定义在数集 A 上的函数（或映照，变换），并记为

$$f:A\longrightarrow B.$$

*：用“$f:A\to B$”表示 f 是定义在数集 A 上的函数．在抽象的数学学科中特别显得清楚、明确和方便；但在高等数学中，当讨论大量具体的函数时，用这个符号就显得有些不便，我们在本书中有时仍采用符号“$y=f(x),\ x\in A$”．

数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，记为 $y=f(x)$；其中 x 称为自变量，y 称为因变量。数集 A 称为函数 f 的定义域，函数值的集合称为函数 f 的值域，记为 $f(A)$，即

$$f(A)=\{y \mid y=f(x),\ x\in A\}\subset B.$$

定义 2 设有两个函数 f 和 g，定义域分别为 A 和 B。若 $A=B$，且对一切 $x\in A$ 有 $f(x)=g(x)$ 成立，则称函数 $f=g$。

定义 3 如果函数 f 定义在数集 A 上，则平面点集 $\{(x,\ y)\mid x\in A,\ y=f(x)\}$ 称为函数 f 在数集 A 上的图像。

2. 几种特殊的函数

(1) 有界函数

定义 设函数 f 在数集 A 上有定义，若存在常数 $M>0$，对任意 $x\in A$，有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 f 在数集 A 上有界。

若存在常数 p(或 q)，对任意 $x\in A$，有

$$f(x)\leqslant p \quad (\text{或 } q\leqslant f(x)),$$

则称函数 f 在数集 A 上有上界（或有下界）。

(2) 单调函数

定义 设函数 f 在数集 A 上有定义，若对 A 上任意 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数 f 在 A 上单调增加（或单调减少）。

单调增加函数、单调减少函数统称为单调函数。

(3) 奇函数和偶函数

定义 设函数 f 在数集 A 上有定义，若对任意 $x\in A$，有 $-x\in A$，且

$$-f(x)=f(-x) \quad (\text{或 } f(x)=f(-x)),$$

则称函数 f 在 A 上为奇函数（或偶函数）。

（4）周期函数

定义 设函数 f 在数集 R 上有定义，若存在正数 l，对任意 $x\in R$，有 $x+l\in R$，且

$$f(x+l)=f(x),$$

则称函数 f 为周期函数，l 称为函数 f 的一个周期。

若函数 f 有最小的正周期，则称这个最小正周期为函数 f 的周期。

3．复合函数

定义 设函数 f 定义在数集 B 上，函数 φ 定义在数集 A 上，且

$$G=\{x|\ x\in A,\ \varphi(x)\in B\}$$

非空，若对每一个 $x\in G$，按照对应关系 φ 对应唯一一个 $y\in B$，再按照对应关系 f 对应唯一的一个 z，于是在 G 上定义了一个函数，这个函数称为函数 f 和 φ 在 G 上的复合函数，记为 $f\circ\varphi$。

4．反函数

定义 设函数 f 在数集 A 上有定义，若对每一个 $y\in f(A)$，有唯一的一个 $x\in A$ 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $f(A)$ 上定义了一个函数，这个函数称为函数 f 的反函数，记为 f^{-1}。

5．初等函数

定义 1 常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数。

定义 2 凡是由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合而构成的函数称为初等函数。

按运算关系，初等函数可分类如下：

$$
\text{初等函数}\begin{cases}
\text{代数函数}\begin{cases}
\text{有理函数}\begin{cases}\text{有理整函数(多项式)}\\ \text{有理分函数}\end{cases}\\
\text{无理函数}
\end{cases}\\
\text{超越函数(非代数函数)}\begin{cases}\text{三角、反三角函数}\\ \text{指数、对数函数}\\ \text{其他函数}\end{cases}
\end{cases}
$$

二、极限论

1. 预备知识

(1) 绝对值、不等式和数学归纳法

1° 绝对值的定义

$$
|a|=\begin{cases} a, & \text{当 } a>0;\\ 0, & \text{当 } a=0;\\ -a, & \text{当 } a<0. \end{cases}
$$

$$|a|=\sqrt{a^2}.$$

2° 关于绝对值的定理

(a) $|a|\leqslant b\Leftrightarrow -b\leqslant a\leqslant b \quad (b>0)$;

(b) $|a|\geqslant b\Leftrightarrow a\geqslant b$ 或 $a\leqslant -b$;

(c) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$;

(d) $||a|-|b||\leqslant |a\pm b|$;

(e) $|ab|=|a||b|$;

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|} \quad (b\neq 0).$$

（$\Leftrightarrow$表示“等价于”）

3° 几个常用的不等式

(a) 设 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 是 n 个正数，则有

84434

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

(b) 设 x_1, x_2, …, x_n 是 n 个符号相同且大于 -1 的数，则

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

(c) 设 $x > -1$，则

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad (n > 1).$$

(d) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$

4° 数学归纳法

设 P 是与自然数 n 有关的数学命题，

(a) 当 $n=1$ 时，P 成立；

(b) 若 $n=k$ 时 P 成立，能导出 $n=k+1$ 时 P 也成立，则命题 P 对一切自然数 n 成立。

5° Newton 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_n^k a^k b^{n-k} \qquad \text{其中} \quad c_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

6° 几条常用的规则：

(a) 设 C 为常数，则 $\sum_{k=1}^{n} Cf(k) = C\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} [f(k) + g(k)] = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k)$.

(c) 对和式 $\sum_{k=1}^{n} f(x)$ 分别作变换：

$k=j+1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{j=0}^{n-1} f(j+1) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1);$$

$k=j-1$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{j=2}^{n+1} f(j-1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k-1);$$

$k=j+l$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{j=1-l}^{n-l} f(j+l) = \sum_{k=1-l}^{n-l} f(k+l);$$

$k=j-l$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{j=1+l}^{n+l} f(j-l) = \sum_{k=1+l}^{n+l} f(k-l).$$

2．数列的极限

(1) 定义

定义 设有数列$\{a_n\}$，若存在数 a，对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列$\{a_n\}$存在极限（或收敛），极限是 a（或收敛于 a），记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

或

$$a_n\longrightarrow a \quad (n\to\infty);$$

若数列$\{a_n\}$极限不存在，则称数列$\{a_n\}$发散。

(2) 收敛数列的性质

1° 若数列$\{a_n\}$收敛，则它的极限是唯一的。

2° 若数列$\{a_n\}$收敛，则数列$\{a_n\}$有界，但其逆不真。

3° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，且 $a<b$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n<b_n$。

4° 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，且存在自然数$N$，当$n>N$ 时，有 $a_n\leqslant b_n$，则 $a\leqslant b$。

（3）收敛数列的运算法则

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

1° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$；

2° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$；

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$，　$(b \neq 0)$。

（4）数列的收敛判别法

1° 两边夹法则

若存在自然数N，当 $n>N$ 时，总有

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$。

2° 单调有界数列必有极限（即实数连续性）。

3° 数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数N，当 n、$m>N$ 时，恒有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{（柯西（Cauchy）收敛原理）}$$

（5）极限的求法

1° 直接用 ε-N（或 ε-δ）定义证明；

2° 运用求和公式求极限；

3° 利用数列的递推关系求极限；

4° 利用单调有界法则求极限；

5° 利用两边夹法则求极限；

6° 利用施笃兹(Stolz)法则求极限；

7° 利用函数的极限和连续的一些结论求极限；

8° 利用定积分求和式的极限；

9° 利用斯特林(Stirling)公式求极限；

10° 利用级数收敛的一些结论求极限；

11° 利用等价无穷小求极限；

12° 利用函数极限和数列极限的关系求极限；

13° 利用导数定义求极限；

14° 利用微分中值定理和泰勒(Taylor)公式求极限；

15° 利用积分中值定理求极限；

16° 利用洛比达(L'Hospital)法则求极限。

3. 函数的极限

(1) 定义

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 内有定义，若存在数 b，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $A>0$；当 $x>A$ 时，有
$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$
则称函数 $f(x)$（当 $x\to+\infty$ 时）存在极限（或收敛），极限是 b（或收敛于 b），记为
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$$
或
$$f(x)\longrightarrow b \quad (x\to+\infty).$$
（注：函数 $f(x)$ $(x\to+\infty)$ 的极限定义与数列 $\{a_n\}$ 的极限定义很相似。）

定义 2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a)$ 内有定义，若存在数 b，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $A>0$；当 $x<-A$ 时，有
$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$
则称函数 $f(x)$（当 $x\to-\infty$ 时）存在极限（或收敛），极限是 b（或收敛于 b），记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

或 $$f(x)\to b \quad (x\to-\infty).$$

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 $|x|\geqslant a$ 时有定义，若存在数 b，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $A>0$；当 $|x|>A$ 时，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$（当 $x\to\infty$ 时）存在极限（或收敛），极限是 b（或收敛于 b），记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

或 $$f(x)\to b \quad (x\to\infty).$$

定义 4 设函数 $f(x)$ 在 a 的邻域内有定义，若存在数 b，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$；当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$（当 $x\to a$ 时）存在极限，极限是 b，记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

或 $$f(x)\to b \quad (x\to a).$$

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 $(a,a+h)$（或 $(a-h,a)$）$(h>0)$ 内有定义，若存在数 b，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$ $(\delta<h)$，当 $a<x<a+\delta$（或 $a-\delta<x<a$）时，有

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 a 处存在右极限（或存在左极限），右（或左）极限是 b，记为

$$\lim_{x\to a+} f(x)=b \quad (\text{或} \lim_{x\to a-} f(x)=b)$$

或 $$f(a+0)=b \quad (\text{或 } f(a-0)=b).$$

我们可以证明：