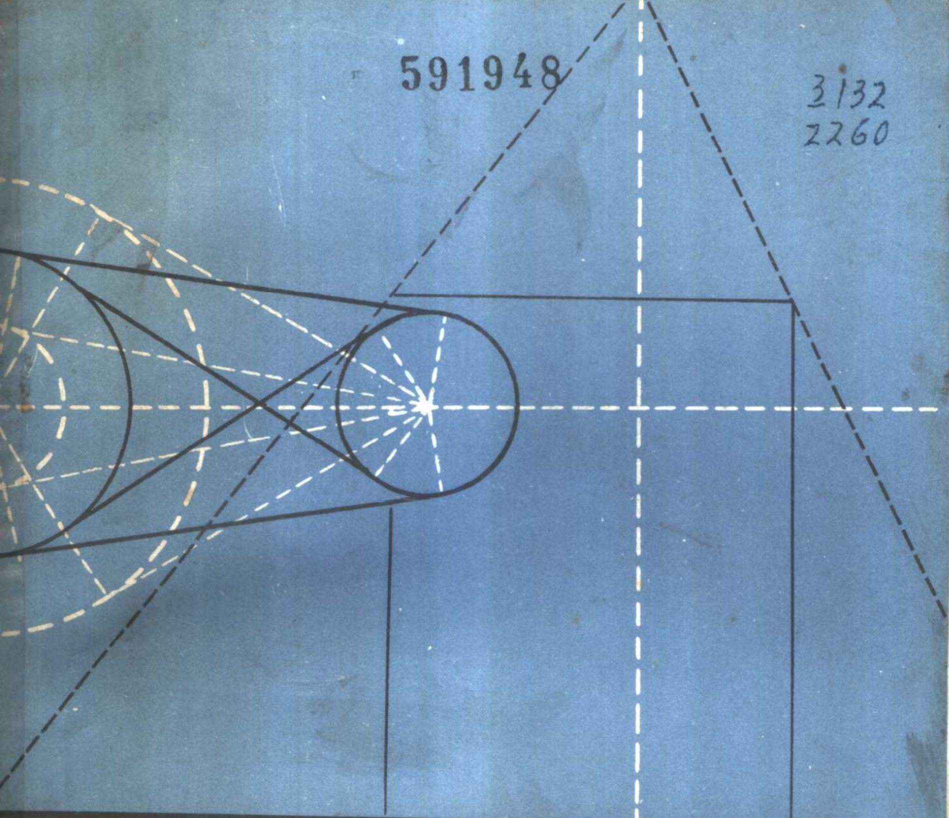


几何的证题与解题

乐嗣康

浙江人民出版社

几何的证题与解题

乐 嗣 康

浙 江 人 民 出 版 社

内 容 提 要

本书共分四个部分。第一部分用具体的实例来说明证题中的几个重要方法。第二部分通过典型例题的分析，浅述一些证题和解题的技巧。第三部分介绍一些几何与生产相结合的生动实例。第四部分联系学生实际，谈在数学教学中怎样培养学生逻辑推理和分析问题的能力。

本书内容比较丰富，文字简洁，可供中学数学教师教学参考。

几何的证题与解题

乐 嗣 康

*

浙江人民出版社出版

浙江新华印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 5,625 字数 138,000

1979年8月第 一 版

1980年5月第二次印刷

印数：17,001—297 000

统一书号：7103·1064

定 价： 0.46 元

目　　录

一、几何证题中的几个基本方法

学习几何的一种方法

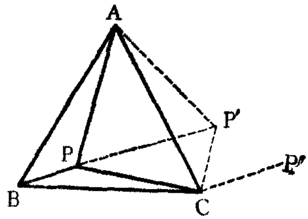
在研究三角形边角关系的时候，我们曾经遇到下面一个命题.

例 1 若P为正三角形ABC内一点，连结PA、PB、PC且

$$PA^2=PB^2+PC^2$$

试求 P点对底边BC的视角，即$\angle BPC$的大小.

解 由于$\triangle ABC$为正三角形，我们采用旋转变换的方法来解题. 假定P为适合题设条件的点，将$\triangle ABP$绕正三角形ABC的顶点A，以逆时针方向旋转$60°$，到达$\triangle ACP'$的位置，如图.



连结PP'则$AP=AP'$ $BP=CP'$ 且$\angle PAP'=\angle BAC=60°$.

$\therefore$ $\triangle APP'$为正三角形，$\therefore$ $PP'=AP$.

根据题设条件代入得

$$PP'^2=PA^2=PB^2+PC^2=P'C^2+PC^2,$$

即 $$PP'^2=P'C^2+PC^2.$$

显然，由勾股定理逆定理知$\triangle PP'C$为直角三角形，

即 $$\angle PCP'=90°.$$

又∵$\triangle ABP$绕A点旋转$60°$，不但AB、AP都分别转过$60°$而到达AC、AP'的位置，同样BP也跟着旋转$60°$而到达$P'C$的位置*．所以过C作$CP''\parallel BP$，则$\angle P'CP''=60°$。

显然，$\angle PCP''=90°+60°=150°$.

$$\because\quad BP\parallel CP'',\ \therefore \angle BPC=\angle PCP''=150°.$$

我们不难证明它的逆命题也是正确的．

事实上，若$\angle BPC=150°$，又$BP\parallel CP''$，

则
$$\angle PCP''=\angle BPC=150°,$$

而BP绕A点旋转$60°$后处于CP'处，

$$\therefore\quad \angle P'CP''=60°,$$

$$\therefore\quad \angle PCP'=150°-60°=90°.$$

∴　$\triangle PCP'$为直角三角形，且PP'为其斜边．

∴　由勾股定理知$PC^2+P'C^2=PP'^2$.

但$\triangle ACP'$由$\triangle ABP$绕A点旋转$60°$后而得．

$$\therefore\quad AP=AP',\ \angle PAP'=60°,$$

∴　$\triangle APP'$为正三角形．

$$\therefore\quad PP'=AP,$$

又
$$P'C=PB.$$

$$\therefore\quad PA^2=PB^2+PC^2.$$

由此可知，在正三角形ABC内一点P，连结PA, PB, PC，P点对BC的视角（即$\angle BPC$）为$150°$的充要条件为

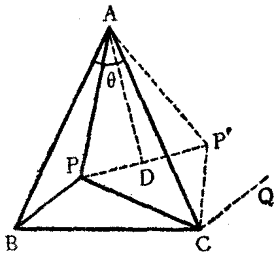
$$PA^2=PB^2+PC^2.$$

通过这个具体问题的启发，使我们容易想到它是否还具有更一般的性质．现在就来研究这个从特殊到一般的问题．

我们若将题设中的正三角形改为具有顶角为定顶角（如设为θ）的等腰三角形ABC，则其结果又将如何呢？见下面例2．

例2　假定等腰$\triangle ABC$，$AB=AC$，顶角$A=\theta$

若P为$\triangle ABC$内一点，连PA，PB，PC，同样将$\triangle ABP$绕A点以逆时针方向旋转θ角到达$\triangle ACP'$的位置，



连结PP'如图.

显然，$\triangle APP'$为一等腰三角形.

即$AP=AP'$，且其顶角$\angle PAP'=\angle BAC=\theta$.

我们若作等腰三角形APP'的顶角平分线AD，则AD也是底边PP'上的高或中线.

$$\therefore \quad PP'=2PA\sin\frac{\theta}{2}.$$

今欲使$\angle PCP'=90°$，则必须使$PP'^2=PC^2+P'C^2$，

即
$$PP'^2=PC^2+PB^2.$$

这就是说，若具有下列关系式，则$\triangle PP'C$必为直角三角形.

此关系式即为

$$\left(2PA\sin\frac{\theta}{2}\right)^2=PB^2+PC^2,$$

即
$$4\sin^2\frac{\theta}{2}PA^2=PB^2+PC^2.$$

同样，过C作$CQ\parallel BP$，

则
$$\angle BPC=\angle PCQ=\angle PCP'+\angle P'CQ$$
$$=90°+\theta.$$

($\because BP$也绕A点旋转θ而到达CP'的位置)

于是，我们得到较为一般的结论：

在顶角A为θ定角的等腰三角形ABC中，若P为其内部

一点，且具备下列条件：

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}PA^2=PB^2+PC^2,$$

则P点对BC边的视角（即$\angle BPC$）必为$90°+\theta$。

反之，也容易证明：

若在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，顶角$A=\theta$，P为其内部一点，

且 $$\angle BPC=90°+\theta,$$

则 $$4\sin^2\frac{\theta}{2}PA^2=PB^2+PC^2,$$

事实上，$\because CQ\parallel BP$，而$\angle P'CQ=\theta$.

$$\therefore\quad \angle BPC=\angle PCQ=\angle PCP'+\angle P'CQ$$
$$=\angle PCP'+\theta.$$

但 $$\angle BPC=90°+\theta,$$

$$\therefore\quad 90°+\theta=\angle PCP'+\theta.$$

$$\therefore\quad \angle PCP'=90°.$$

$$\therefore\quad PC^2+P'C^2=PP'^2,\ \text{但}\ P'C=PB.$$

$$\therefore\quad PC^2+PB^2=PP'^2.$$

但 $$PP'=2PA\cdot\sin\frac{\theta}{2},$$

代入得

$$PC^2+PB^2=4\sin^2\frac{\theta}{2}PA^2,$$

即 $$4\sin^2\frac{\theta}{2}PA^2=PB^2+PC^2.$$

由此可知，我们得到了一般结论：

若顶角为θ的等腰三角形内有一点P，欲使P点对底边的视角为$90°+\theta$，则其充要条件为：

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}PA^2=PB^2+PC^2.$$

容易验证它的各种特殊情况，都是适合的.

如 (1) 当 $\theta=60°$时，代入 $4\sin^2\frac{\theta}{2}PA^2=PB^2+PC^2$

得 $$4\sin^2\frac{60°}{2}PA^2=PB^2+PC^2.$$

即 $$PA^2=PB^2+PC^2.$$

这时， $\angle BPC=90°+\theta=90°+60°=150°$。

显然，这就是例 1 的情况.

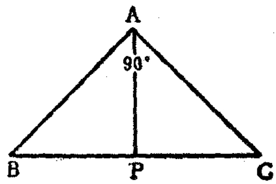
(2) 当 $\theta=90°$ 时，代入即得

$$4\sin^2\frac{90°}{2}PA^2=PB^2+PC^2,$$

即 $$4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2PA^2=PB^2+PC^2,$$

即 $$2PA^2=PB^2+PC^2.$$

这就是说，顶角为直角的等腰三角形，这时，三角形内部的P点，实际上已进入到直角三角形斜边上，且与斜边中点重合.



即 $$\angle BPC=90°+\theta$$
$$=90°+90°$$
$$=180°.$$ 如图.

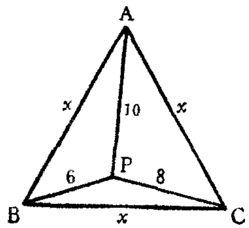
综上所述，给了我们一个启示：即

如何从一个特殊的具体问题推广到一般的情况. 当已知条件作了某些变更时（向一般情况变化），看看它的原来结论是否也跟着变化. 若有变化，其变化是否具有一定的规律；如果没

有变化，则这个几何性质将是一个不变的性质，也就是说，发现了一个较一般的、具有普遍意义的几何定理．我们学习几何，就是要研究和发现在某些条件下图形不变的性质．因为它们具有较高的抽象性，带着较普遍的性质．所以它们的应用范围也必然较为广泛．有时，为了方便，我们就把这些不变的性质称为几何定理．

下面我们再举一例，是上述几何命题的应用．

例 3　有一正三角形 ABC，P 为其内部一点，连结 PA、PB、PC，若 $PA=10$，$PB=6$，$PC=8$，试求 $\triangle ABC$ 各边的长．



解：$\because$　$10^2=8^2+6^2$，

$\therefore$　$PA^2=PB^2+PC^2$．

今 $\triangle ABC$ 为正三角形

$\therefore$　根据例 2（或例 1）的性质知道

$$\angle BPC=90°+\theta$$
$$=90°+60°$$
$$=150°.$$

又在 $\triangle PBC$ 中，由余弦定理可得

$$BC^2=x^2=6^2+8^2-2\times6\times8\cos150°.$$

$$\therefore\quad x^2=100+96\times\frac{\sqrt{3}}{2}=100+48\sqrt{3}.$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{100+48\sqrt{3}}=2\sqrt{25+12\sqrt{3}}.$$

此即为正三角形 ABC 各边的长．

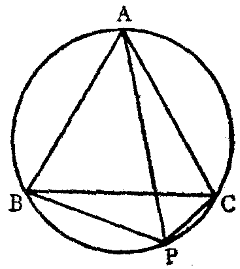
（这个命题是美国奥林匹克数学竞赛题）

很明显，这个例 3 是例 1 的特殊情形．因为例 1 带有比例 3 较高的普遍性．可是就例 1 对例 2 来说，前者又成为后者的

特例(特殊)，因为例 2 比例 1 具有更普遍的性质.

在几何中，我们不是常常遇到“任取一个，然后把它固定起来加以证明”这种情况吗？这里“任取一个”的意思，就是说它是特殊的一个，但同时又是一般的一个. 因为它是“任取”的，所以具有一般的性质，但这个图形一经画出，显然它已经是具体的特殊的一个了. 一切东西的特殊性质中间都包含着某种一般的性质. 数学的方法，就是要从特殊的事实中去寻求一般的普遍的性质. 这个一般的性质，前面已经提到过，就是一个定理，而这个定理更往往是另一个更普遍的定理的特殊. 前面所举的例 1、例 2 和例 3 的关系就是这样.

因此，所谓一般的，它的本身往往又是特殊的，而特殊的又包含着某种一般的特性. 这种从特殊到一般的过程，在数学上称为一般化或普遍化. 另一种过程，是要把我们所要想证的一般定理，不当作一般定理来证，而是把它当作一个特殊的定理加以证明，这种过程称为特殊化. 例如，命题“正三角形外接圆上任一点至三顶点的连结线，其长者必等于其余二者的和”. 我们可以直接证明它，但也可以把它当作托勒密 (*Ptolemy*) 定理：“圆内接凸四边形两双对边乘积的和等于两对角线的乘积”的特殊情形来加以证明.



设 $\triangle ABC$ 为正三角形. P 为其外接圆上任意一点，连结 PA、PB、PC，则
$$PA=PB+PC.$$

我们利用托勒密定理来证明：

因为 $ABPC$ 是一个圆内接凸四边形，按托勒密定理知：
$$AB\times PC+AC\times BP=AP\times BC.$$

今$\triangle ABC$为正三角形，

$$\therefore \quad AB=BC=AC.$$

代入上式得 $PC+PB=PA$.

很快就得到了证明.

这种证明在几何证题中的例子是很多的. 它的过程就是特殊化的过程. 不要说几何中有这种证法，在代数、三角等学科中也是很多的. 例如在代数中要证明奇数和的公式，即 $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$. 我们不把它看作一般公式，却把它看成是等差级数求和公式中的特殊情形，即当首项 $a=1$，公差 $d=2$ 的时候. 如果，我们把它代入等差级数求和公式就是：

$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{n}{2}[2+(n-1)\cdot 2]$$

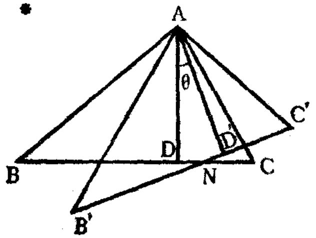
$$=\frac{n}{2}[2n]=n^2.$$

由此可知，我们在几何（数学）上的方法是：一方面通过特殊的真理去认识一般的真理，从局部提高到全部的认识；另一方面对于个别的问题，我们有时并不把它当作个别的问题来处理，而是把它当作某种一般定理的特殊情形来看待. 这种由特殊到一般，再由一般到高一级的特殊的方法过程是我们学习几何（数学）的一种很好的方法，也是一种辩证的正反合的方法. 在不同的场合采取不同的形式，把整体分拆开来成为许多个体，然后又把个别的合起来成为一个整体. 把每一件事情分别情况来加以研究，证明. 我们几何中的“枚举证法”，就是一个很好的例子.

在几何（数学）教学中，既要培养学生抽象化的能力，同时又要培养他们具体化的能力. 学生在考试或练习时，我们常常发现有时对数学上的公式或定理有些模糊或记不清楚，而不能

用特殊化的方法去加以判断，造成束手无策的困难局面．这就是缺乏具体化的能力的表现．

总之，在研究学习几何图形性质的时候，既要研究它的特殊性，又要分析，推导它是否具有更一般的普遍性质，提高抽象化的能力．另一方面恰恰相反，掌握了一般定理之后就要在具体中能灵活运用，培养具体化的能力．这种用从特殊到一般，又从一般回到特殊的方法去研究几何，不但能深刻地理解几何图形的各种性质和其应用，而且有可能使我们在熟练的基础上发现一些新的图形的性质．这种学习方法，不仅适用于几何，其实也同样适用于其他学科的学习与研究．



设$\triangle ABC$绕顶点A，以逆时针方向旋转θ，到达$\triangle AB'C'$的位置，如图．若$\triangle ABC$的BC上的高为AD，$\triangle AB'C'$的$B'C'$上的高为AD'．

显然，AB转到AB'位置，AC转到AC'位置，BC也转到$B'C'$的位置，则BC与$B'C'$相交于N．

这样，四边形$ADND'$有一个外接圆（$\angle ADN+\angle AD'N=180°$）

$\therefore \angle CNC'=\angle DAD'=\theta$．

这就是说，$\triangle ABC$的第三边BC也绕着A点以逆时针方向转过θ角度而到达$B'C'$的位置．

反　证　法　浅　谈

有的数学教师对数学中的反证法比较生疏，甚至尽量避开用反证法来证明题目．这里想简单地谈一下关于反证法的概念和运用它证题的方法．

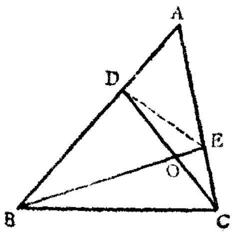
我们在证题时，常常会遇到一些命题（或定理）不易或甚至不能从原命题直接证明．这时，不妨改而证明它的等效命题

（等价命题），结果也能间接地达到目的．这种证法就叫做间接证法．用间接证法证明命题时，大多数是证明命题的逆否命题成立，这种方法便叫做“反证法”．除此之外，在间接证法中，尚有一种较特殊的证法，叫做“同一证法”，这是在同一法则下证明命题的逆命题成立的一种方法．为了节省篇幅，这里只谈反证法．

大家知道，一个命题与它的逆否命题是等价的．例如一个命题“若A则B”成立，显然它的逆否命题“若不B则不A”也必成立．“等腰三角形的底角相等”，它的逆否命题“两底角不相等的三角形一定不是等腰三角形”，两者也是一致的，是等价的．因此，我们要证明“若A则B”，可以间接地去证明它的逆否命题“若不B则不A”．B是原命题中的结论（求证）．今将“若不B”作为已知，经过推理达到“不A”，也就是说，要把原命题中的结论加以否定，然后通过各种推理而达到否定原命题的已知条件，亦即要达到与已知条件相矛盾的结论．当然，引出的结论与公理或前定理或自相矛盾都可以，这样就间接地证明了原命题．因为命题与它的逆否命题是等价的，所以说原命题证明是正确的．

所以，反证法实际上就是证明原命题的逆否命题．

例如　在$\triangle ABC$的两边AB和AC上各取一点D、E，连结CD和BE，则CD和BE是不可能互相平分的．



已知　$\triangle ABC$在AB上取一点D，在AC上取一点E，连BE、CD，相交于O点．

求证　BE和CD不可能互相平分于O点．

证 假定 BE 和 CD 互相平分于 O 点，即 $BO=OE$，$OD=OC$，连结 DE，则 $BCED$ 为一个平行四边形，

$$\therefore \quad BD /\!/ CE.$$

但题目中已知 $\triangle ABC$，且 D、E 分别在它的两边 AB、AC 上，

$$\therefore \quad BD \nparallel CE.$$

这就是说，推理得出的 $BD /\!/ CE$ 与已知 $BD \nparallel CE$ 发生了矛盾. 所以 BE 和 CD 决不能互相平分. 于是本题得到了证明.

上述的证法就是反证法.

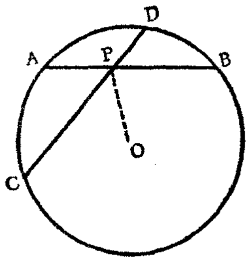
在反证法中，由于否定求证中的事项有一面的，也有不止一面的，因而又可分为两种，即归谬法与穷举法.

一、归谬法

只否定求证中事项的一面的，如上面的例子一样，它是一种比较单纯的反证法. 有些数学课本中也称反证法为归谬法的，下面再举几例. 如：

例 1 圆内不过圆心的两弦必不能互相平分.

已知 AB、CD 为 O 圆不过圆心 O 的任意两弦.



求证 AB 和 CD 不可能互相平分.

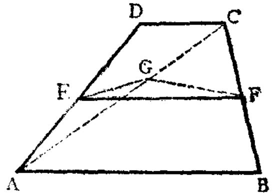
证 假定 AB 和 CD 互相平分于 P 点如右图，连结 OP，则 $AP=BP$，$CP=DP$，即 P 点为 AB 之中点又为 CD 之中点，

$$\therefore \quad OP \perp AB, \quad OP \perp CD.$$

这就是说，通过 P 点可以有两条直线 AB 与 CD 同时垂直于直线 OP. 这与已知定理矛盾，是不可能的. $\therefore$ AB 和 CD 不可能互相平分. 于是本题得到了证明.

反证法这个间接证法还常常被应用到证明逆定理中去，有时要比采用直接证法来得简单．如

例 2 若四边形中有一双对边中点的连线等于它双对边的半和，则它双对边必互相平行．



已知 四边形 $ABCD$，E、F 各为 AD、BC 之中点，且

$$EF=\frac{1}{2}(AB+CD).$$

求证 $AB /\!/ CD$.

证 假定 $AB \nparallel CD$．连结 AC，并取 AC 的中点 G，连结 EG 和 GF，则

$$EG /\!/ DC, \quad GF /\!/ AB.$$

但 $AB \nparallel CD$，$\therefore EG \nparallel GF$，即 EGF 不是一条直线，

$$\therefore EG+GF>EF.$$

但 $EG=\frac{1}{2}DC$，$GF=\frac{1}{2}AB$，代入得

$$EG+GF=\frac{1}{2}DC+\frac{1}{2}AB$$

$$=\frac{1}{2}(DC+AB)>EF,$$

即 $$EF<\frac{1}{2}(AB+CD).$$

显然，这个结论与已知 $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$ 发生了矛盾．所以 $AB \nparallel CD$ 是错误的．

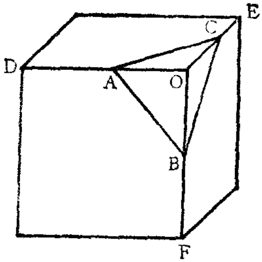
$$\therefore \quad AB /\!/ CD.$$

于是本题获得了证明．

反证法不但可以应用在平面几何中，还大量应用于立体几

何中．如

例 3　一平面截去立方体之一角，其截面不可能得到一个直角三角形*.



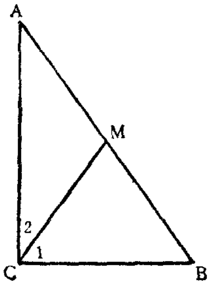
已知　右图为一立方体，有一平面 ABC 截立方体于一角，与相邻三面之交线为 AB、BC 和 AC.

求证　$\triangle ABC$ 不可能是一个直角三角形.

证　假定 $\triangle ABC$ 为一直角三角形，设 $\angle ACB=90°$，则 $AC\perp BC$. 但 $OB\perp$ 平面 ODE，$\therefore$ $OB\perp AC$. 这就是说，AC 垂直于 BC 和 OB，$\therefore$ $AC\perp$ 平面 OEF. 但 $AO\perp$ 平面 OEF，也就是，过一点 A 有两条直线垂直于一个平面 OEF. 显然这与已知定理矛盾，是不可能的. $\therefore$ $\angle ACB\neq 90°$. 同理可证 $\angle CAB\neq 90°$，$\angle ABC\neq 90°$. 即 $\triangle ABC$ 决不能是一个直角三角形. 于是本题得到了证明.

二、穷举证法

否定求证中事项不止一面，此时必须面面驳倒，才能说明原来的求证是成立的. 这种较繁一些的反证法叫做穷举证法.



例 1　试用反证法证明直角三角形斜边中点与直角顶点的连线必为斜边之半.

已知　直角三角形 ABC，$\angle C=90°$，M 为斜边 AB 之中点.

求证　$CM=\frac{1}{2}AB$.