

力学与实践

LIXUE YU SHIJIAN

力学与实践编辑部编
北京大学出版社

内 容 简 介

本书收集了《力学与实践》近年来稿40余篇,其中包括计算力学、固体力学和一般力学以及流体力学的内容。文章的内容侧重应用方面,也有少量关于理论方面的论文。本书可供广大工程技术人员、从事力学理论和应用研究人员,以及高等院校师生参考。

力学与实践

《力学与实践》编委会编

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米 16开本 13.5印张 335.4千字

1988年7月第一版 1988年7月第一次印刷

印数: 00001—2500册

ISBN7-301-00356-0/O·064

定价: 3.30元

前 言

《力学与实践》编辑部将近年来部分来稿单独汇编成册出版。收入本集的包括计算力学、固体力学以及流体力学和一般力学方面的论文40余篇。这些论文主要是反映实际问题方面的成果,也有少量理论成果。它将从一个侧面反映我国力学学术界的面貌,同时对从事应用和理论研究以及教学工作的力学工作者将有一定的参考价值。

计算机发展,大大改变了力学研究的面貌。本书中许多篇论文就是反映利用计算机解决力学问题的成果。断裂力学、弹塑性力学以及各种动力学问题,是近年来学术界比较关注的课题,在本集中我们选择了不少这些方面的论文。

作为联系读者的形式,《力学与实践》编辑部除了定期出版《力学与实践》杂志外,还将不定期地出版有关文集。文集的优点是比较集中地在一集内反映一批研究成果,它可以使读者看了犹如来自参加一次学术会议。同时它比起一般系统阐述某一方面内容的书籍又有及时的优点。基于这样的想法,经过编辑人员和论文作者的共同努力,在不长的时间里这本书即将与读者见面。编委会谨对他们表示感谢,同时热情希望关心《力学与实践》的读者提出宝贵意见。

《力学与实践》编委会

1987年12月30日

目 录

非均匀弹性地基连续梁的一种半解析解法	梁广基 张小秋 (1)
用 FEM-BEM 联合方法求解局部应力	徐宜桂 胡德明 (5)
横向载荷作用下平行四边形板弯曲的一个摄动解	李龙元 (8)
求解弹性梁弯曲大挠度问题的弦线法	魏铭森 (12)
简支矩形厚板的 Lamé 方程解	潘 岳 杨文成 (16)
三角形加劲板壳的刚度矩阵	黄 炎 (20)
具有轴对称几何缺陷圆柱壳的静力分析	高世桥 (24)
关于 I 型动裂纹尖端的塑性区	王 琦 梁士文 (28)
关于物体靠近边界层域内位移和应力的边界元法求解的研究	申光宪 肖 宏 (31)
窄环板位移的渐近分析	张蕴才 (35)
用叠加法求狭长矩形截面梁的应力函数	钱伯勤 (40)
极坐标下弹性力学二维问题的常系数线性算子解答	曾又林 (44)
矩形板的一种简单的传递矩阵法	张茂祥 (46)
带圆角方管的内力和变形计算	曹定秀 王本瑞 (50)
对偶数矩阵在力学中的应用	袁 震 (55)
文克尔介质上变弹簧常数、变截面梁的计算	葛孝椿 (59)
厚壁圆筒在内压与轴向力作用下的广义屈服条件	黄文彬 曾国平 (65)
大厚度压力容器强度计算的精确方法	黄载生 (69)
管材有芯头拉拔的一维功率场解法	赵德文 张 强 (75)
万能孔型轧制 H 型件的刚塑性有限元分析	刘相华 白光润 (81)
累积损伤理论用于结构疲劳试验	沈鹏飞 (86)
疲劳小裂纹的定义	姚卫星 (91)
一种估算半椭圆表面裂纹扩展寿命的工程方法	曹永利 (93)
铸铁单向压缩破坏分析	李中华 韩江波 杨仲民 匡震邦 (97)
山形切口弯曲试样的宽范围标定公式	何明元 (101)
正交各向异性复合材料的歪斜能强度理论	赵清望 (106)
碳纤维矩形薄壁梁弯曲和扭转刚度研究	成传贤 罗又华 章向群 (111)
成层复合岩石拉伸时的岩性和尺寸效应	吴 刚 肖长富 邱贤德 (116)
非圆形地下洞室的复变函数解法	刘允芳 (121)
摆线截面柱体在平面上摆动固有频率的计算	廖伯瑜 夏 季 (126)
强迫参数激励非线性振子的全局分叉和混沌	林 锐 黄克累 金志胜 (131)
δ 函数在求解具有集中质量及转动惯量边界条件下弹性梁响应时的应用	丁建国 (137)

一种对角绝对占优矩阵的特征值渐近解法.....	李龙元(140)
一种岩石单轴高温抗压强度、变形性质和蠕变实验方法介绍	赵阿兴 施良骥 崇秀兰(142)
真三轴材料力学性质试验设计原理.....	刘 雄(146)
约束条件下的最小二乘法在光弹数据处理中的应用.....	张远鹏 霍学锋 叶庆凯(150)
导弹主翼根部激光测量简介.....	付国宝(155)
确定膨胀波条纹级数的方法探讨.....	朱振海 杨善元(157)
关于悬链线参量的计算.....	李廷孝(160)
物理量对时间变化率的客观性分析.....	赵志文(163)
有关轴对称匀质刚体惯量主轴的几个定理.....	毕广吉(166)
哈密顿原理在变质量完整系统的推广.....	卢 倪(170)
二维风帆前缘奇性的研究.....	王献孚 何绍文(175)
关于固体力学中虚位移方程的一般形式的探讨.....	田学祥(179)
等参元的奇异性在不同弹塑性材料 J 积分计算中的应用.....	王志群(188)
中国力学学会1980年以来部分学术会议简介.....	(195)

非均匀弹性地基连续梁的一种半解析解法

梁广基 张小秋

(华中工学院)

提要 本文利用弹性地基梁的微分方程及其初参数法的解答形式, 在处理非均匀性问题上, 采用分段、递推的方法以计算机实现计算。

关键词 弹性地基梁, 微分方程, 集中力, 集中力偶, 中间支座

1. 微分方程及解的形式

图1为弹性地基连续梁, 梁的轴惯性矩 I , 材料的弹性模量 E , 地基的基床系数 K , 轴力 S 均沿轴向变化。将梁离散成 N 段, 各段和各剖面的号码分别为 $I, II, \dots, N$ 和 $1, 2, \dots, n+1$ 。剖分得当, 梁单元的 I, E, K, S 均可看作常数, 分布载荷 q 则视为线性分布, 这比采用均匀分布要合理和精确些。因此, 对任意(如第 J 段)梁单元(图2)来说, 分布载荷为

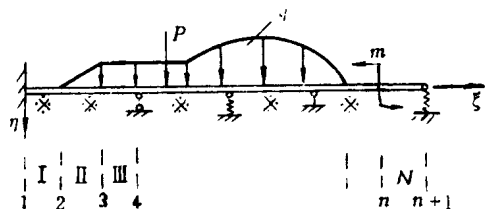


图 1

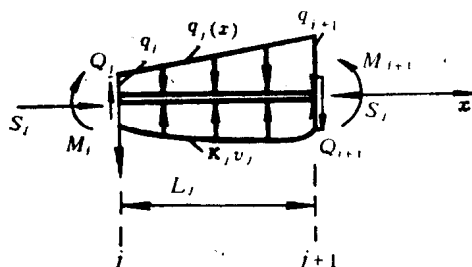


图 2

$$q_J(x) = q_j + \frac{(q_{j+1} - q_j)}{L_J} x \quad (1)$$

挠度 $v_J(x)$ 的微分方程为^[1]

$$E_J I_J \frac{d^4 v_J}{dx^4} + S_J \frac{d^2 v_J}{dx^2} + K_J v_J = q_J(x) \quad (2)$$

坐标及内力正向如图2所示。带下标 J 的量为第 J 段梁单元的物理量。将(1)式代入(2)式得

$$\frac{d^4 v_J}{dx^4} + H_1 \frac{d^2 v_J}{dx^2} + H_2 v_J = H_3 + H_4 x \quad (3)$$

其中

$$H_1 = \frac{S_J}{E_J I_J}, \quad H_2 = \frac{K_J}{E_J I_J}, \quad H_3 = \frac{q_j}{E_J I_J}, \quad H_4 = \frac{q_{j+1} - q_j}{E_J I_J L_J}$$

方程(3)的通解可写成

$$v_J(x) = \sum_{i=1}^4 C_{i,J} f_{i,J}(x) + f_{5,J}(x) \quad (4)$$

其中 $f_{i,J}(x)$ 是方程(3)对应的齐次解, $f_{5,J}(x)$ 是方程(3)的特解, 并应满足以下初始条件^[1]:

$$\left. \begin{aligned} f_{i,J}(0) &= \begin{cases} 1 & (i=1), \\ 0 & (i=2,3,4), \end{cases} & f'_{i,J}(0) &= \begin{cases} 1 & (i=2) \\ 0 & (i=1,3,4) \end{cases} \\ f''_{i,J}(0) &= \begin{cases} 1 & (i=3), \\ 0 & (i=1,2,4), \end{cases} & f'''_{i,J}(0) &= \begin{cases} 1 & (i=4) \\ 0 & (i=1,2,3) \end{cases} \\ f_{5,J}(0) &= f'_{5,J}(0) = f''_{5,J}(0) = f'''_{5,J}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由(4)和(5)式可知系数 $C_{i,J}$ 的力学意义为

$$C_{1,J} = v_J(0), \quad C_{2,J} = \theta_J(0), \quad C_{3,J} = -\frac{M_J(0)}{E_J I_J}, \quad C_{4,J} = -\frac{Q_J(0)}{E_J I_J} - \frac{\theta_J(0)}{E_J I_J} S_J \quad (6)$$

将(6)式代入(4)式得

$$\begin{aligned} v_J(x) &= v_J(0)f_{1,J}(x) + \theta_J(0)\left[f_{2,J}(x) - \frac{S_J}{E_J I_J}f_{4,J}(x)\right] \\ &\quad - M_J(0)\frac{f_{3,J}(x)}{E_J I_J} - Q_J(0)\frac{f_{4,J}(x)}{E_J I_J} + f_{5,J}(x) \end{aligned} \quad (7)$$

对(7)式分别求 $v'_J(x), v''_J(x), v'''_J(x)$, 并与(7)式一起令 $x = L_J$, 经整理得

$$[v_J(L_J), \theta_J(L_J), M_J(L_J), Q_J(L_J)]^T = \mathbf{A}_J [v_J(0), \theta_J(0), M_J(0), Q_J(0)]^T + \mathbf{B}_J \quad (8)$$

其中第 J 段梁单元的系数矩阵 $\mathbf{A}_J$ 为 4×4 方阵, $\mathbf{B}_J$ 为 4×1 列阵。只要求得四个初参数 $v_J(0), \theta_J(0), M_J(0), Q_J(0)$, 将(8)式中的 L_J 换成 x , 就可求梁单元任意处的挠度、转角、弯矩、剪力。(8)式实际上是第 $j+1$ 号剖面 and 第 j 号剖面的四个物理量之间的关系式, 因此可用更简单的记号表示为

$$[v_{j+1}, \theta_{j+1}, M_{j+1}, Q_{j+1}]^T = \mathbf{A}_J [v_j, \theta_j, M_j, Q_j]^T + \mathbf{B}_J \quad (9)$$

这是梁单元自左向右传递的通用公式。若要自右向左传递, 只需将图 2 的坐标原点置于第 $j+1$ 号剖面处(x 轴仍向右)即可, 其余不变。因此有

$$[v_j, \theta_j, M_j, Q_j]^T = \overline{\mathbf{A}}_J [v_{j+1}, \theta_{j+1}, M_{j+1}, Q_{j+1}]^T + \overline{\mathbf{B}}_J \quad (10)$$

其中 $\overline{\mathbf{A}}_J$ 和 $\overline{\mathbf{B}}_J$ 的元素与 $\mathbf{A}_J$ 和 $\mathbf{B}_J$ 的相同, 但 L_J 应换成 $-L_J$

2. 求解步骤

如果利用(9),(10)两式及梁两端的边界条件进行矩阵迁移, 计算将很繁琐, 且要解四阶矩阵方程。有中间支座(包括弹性支座)时更难于求解。现将(9)式中的 $\mathbf{A}_J$ 和 $\mathbf{B}_J$ 写成分块矩阵的形式

$$\mathbf{A}_J = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{J,1} & \mathbf{A}_{J,2} \\ \mathbf{A}_{J,3} & \mathbf{A}_{J,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_J = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{J,1} \\ \mathbf{B}_{J,2} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

并令

$$[M_j, Q_j]^T = \mathbf{G}_j^* [v_j, \theta_j]^T + \mathbf{D}_j^* \quad (12)$$

将(11),(12)式代入(9)式后经整理得

$$[M_{j+1}, Q_{j+1}]^T = \mathbf{G}_{j+1}^* [v_{j+1}, \theta_{j+1}]^T + \mathbf{D}_{j+1}^* \quad (13)$$

$\mathbf{G}_j^*, \mathbf{D}_j^*$ 和 $\mathbf{G}_{j+1}^*, \mathbf{D}_{j+1}^*$ 分别称为自左向右传递时 j 号和 $j+1$ 号剖面处的相关矩阵, 它们的关系式为

$$\left. \begin{aligned} G_{j+1}^a &= [A_{j,3} + A_{j,4} G_j^a] [A_{j,1} + A_{j,2} G_j^a]^{-1} \\ D_{j+1}^a &= [A_{j,4} - G_{j+1}^a A_{j,2}] D_j^a + B_{j,2} - G_{j+1}^a B_{j,1} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(14)式是从左向右传递时相邻剖面相关矩阵的递推公式。仍照上面的步骤，将(10)式中的 $\bar{A}_j$ 和 $\bar{B}_j$ 也写成分块矩阵的形式并令

$$[M_{j+1}, Q_{j+1}]^T = G_{j+1}^b [v_{j+1}, \theta_{j+1}]^T + D_{j+1}^b \quad (15)$$

将(15)式代入(10)式后经整理可得

$$[M_j, Q_j]^T = G_j^b [v_j, \theta_j]^T + D_j^b \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G_j^b &= [\bar{A}_{j,3} + \bar{A}_{j,4} G_{j+1}^b] [\bar{A}_{j,1} + \bar{A}_{j,2} G_{j+1}^b]^{-1} \\ D_j^b &= [\bar{A}_{j,4} - G_j^b \bar{A}_{j,2}] D_{j+1}^b + \bar{B}_{j,2} - G_j^b \bar{B}_{j,1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(17)式就是自右向左传递时相邻剖面相关矩阵的递推公式。由梁两端的边界条件可确定 2 号和 n 号剖面处的相关矩阵。例如梁左端为固定端，则有 $v_1 = 0, \theta_1 = 0$ ，由(9)式可推得 2 号剖面的相关矩阵为

$$G_2^a = A_{I,4} A_{I,1}^{-1}, \quad D_2^a = B_{I,2} - G_2^a B_{I,1}$$

再如梁右端为自由并有集中力 P_{n+1} (向下) 和集中力偶 m_{n+1} (反时针方向) 的作用，由(10)式可推得 n 号剖面的相关矩阵为

$$G_n^b = \bar{A}_{N,3} \bar{A}_{N,1}^{-1}, \quad D_n^b = \bar{B}_{N,2} - G_n^b \bar{B}_{N,1} + [\bar{A}_{N,4} - G_n^b \bar{A}_{N,2}] \begin{Bmatrix} m_{n+1} \\ P_{n+1} \end{Bmatrix}$$

若梁左端为弹性支座，支座反力 $F_1 = \beta_1 v_1$ ， β_1 为广义弹簧的刚性系数，由(9)式可推得

$$G_2^a = \begin{bmatrix} a_{I,31} + \beta_1 a_{I,34} & a_{I,32} \\ a_{I,41} + \beta_1 a_{I,44} & a_{I,42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{I,11} + \beta_1 a_{I,14} & a_{I,12} \\ a_{I,21} + \beta_1 a_{I,24} & a_{I,22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$D_2^a = B_{I,2} - G_2^a B_{I,1}$$

其中 $a_{I,ij}$ 是 A_I 的元素。梁两端为其它形式的支承亦可推得 2 号或 n 号剖面的相关矩阵，此处就不一一列举了。

有了 2 号和 n 号剖面的相关矩阵，就可按(14)和(17)式由两端向中间迁移，逐步算得所有剖面的相关矩阵，直至在第 h 号剖面处相汇合为止。由(12)和(16)式可知有

$$[M_h, Q_h]^T = G_h^a [v_h, \theta_h]^T + D_h^a \quad (18)$$

$$[M_h, Q_h]^T = G_h^b [v_h, \theta_h]^T + D_h^b \quad (19)$$

从(18),(19)式中消去 $[M_h, Q_h]^T$ 得

$$[G_h^a - G_h^b] [v_h, \theta_h]^T = D_h^b - D_h^a \quad (20)$$

这是二元一次线性代数方程组，极易解得 v_h 和 θ_h ，将它们回代(18)式即得 M_h 和 Q_h 。由于汇合剖面的号码 h 是任意的，因此利用微型计算机重复以上的计算可求得 2, 3, ..., n 号剖面处的挠度、转角、弯矩、剪力。再利用(10)式和(9)式可求得 1 号和 $n+1$ 号剖面的四个物理量。

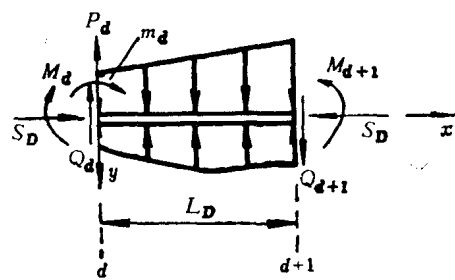


图 3

3. 集中力、集中力偶和中间支座（包括弹性支座）的处理

在剖分梁时，应将上述情况的地方作为剖分面，这些力和力偶有相应的下标。

3.1 集中力和集中力偶

设 d 号剖面处有已知的集中力 P_d 和集中力偶 m_d 。若 $h > d$ ，则认为它们作用在第 D 段梁单元的左端，其正向如图 3 所示。这时(9)式应改为

$$[v_{d+1}, \theta_{d+1}, M_{d+1}, Q_{d+1}]^T = \mathbf{A}_D [v_D, \theta_D, M_D + m_d, Q_D + P_d]^T + \mathbf{B}_D \quad (21)$$

仍令

$$[M_d, Q_d]^T = \mathbf{G}_d^a [v_d, \theta_d]^T + \mathbf{D}_d^a$$

代入(21)式，可推得 $\mathbf{G}_{D+1}^a$ 与(14)式相同，但 $\mathbf{D}_{D+1}^a$ 为

$$\mathbf{D}_{D+1}^a = [\mathbf{A}_{D,4} - \mathbf{G}_{D+1}^a \mathbf{A}_{D,2}] \{\mathbf{D}_D^a + [m_d, P_d]^T\} + \mathbf{B}_{D,2} - \mathbf{G}_{D+1}^a \mathbf{B}_{D,1} \quad (22)$$

这样，有集中力和集中力偶时，只需修改下一号剖面的相关矩阵 $\mathbf{D}$ 即可，其余不变。若 $h < d$ ，则认为 P_d 和 m_d 作用在第 $D-1$ 段梁单元的右端，其正向与右端的 Q_d 和 M_d 相同。这时可推得 $\mathbf{G}_{D-1}^a$ 与(17)式相同， $\mathbf{D}_{D-1}^a$ 与(22)式相同，不过上、下标应改为 b 和 $d-1$ ， $\mathbf{A}_D$ 和 $\mathbf{B}_D$ 应改为 $\bar{\mathbf{A}}_{D-1}$ 和 $\bar{\mathbf{B}}_{D-1}$ 。若 $h = d$ ，则一切无需改变。只要在(19)式中将左端 $[M_d, Q_d]^T$ 换成 $[M_d + m_d, Q_d + P_d]^T$ 即可 (m_d 顺时针方向为正， P_d 向上为正)。

3.2 中间铰支座

设 e 号剖面处有铰支座，同时已知有集中力偶 m_e 的作用。支座反力用 F_e 表示。若 $h > e$ ，按(1)的办法处理，它们的正向亦与图 3 相同。由(21)式得

$$[v_{e+1}, \theta_{e+1}, M_{e+1}, Q_{e+1}]^T = \mathbf{A}_E [0, \theta_e, M_e + m_e, Q_e + F_e]^T + \mathbf{B}_E \quad (23)$$

将(23)式展开并整理得

$$[\theta_e, F_e]^T = \mathbf{K}_E^{-1} \{ [v_{e+1}, \theta_{e+1}]^T - \mathbf{A}_{E,2} \mathbf{D}_e^a - m_e [a_{E,13}, a_{E,23}]^T - \mathbf{B}_{E,1} \} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{E+1}^a &= \mathbf{L}_E \mathbf{K}_E^{-1} \\ \mathbf{D}_{E+1}^a &= [\mathbf{A}_{E,4} - \mathbf{G}_{E+1}^a \mathbf{A}_{E,2}] \mathbf{D}_e^a + \mathbf{B}_{E,2} - \mathbf{G}_{E+1}^a \mathbf{B}_{E,1} \\ &\quad + m_e ([a_{E,33}, a_{E,43}]^T - \mathbf{G}_{E+1}^a [a_{E,13}, a_{E,23}]^T) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} a_{E,12} + a_{E,13}g_{e,12}^a + a_{E,14}g_{e,22}^a & a_{E,14} \\ a_{E,22} + a_{E,23}g_{e,12}^a + a_{E,24}g_{e,22}^a & a_{E,24} \\ a_{E,32} + a_{E,33}g_{e,12}^a + a_{E,34}g_{e,22}^a & a_{E,34} \\ a_{E,42} + a_{E,43}g_{e,12}^a + a_{E,44}g_{e,22}^a & a_{E,44} \end{bmatrix}$$

$g_{e,ij}^a$ 是 $\mathbf{G}_e^a$ 的元素。若 $h < e$ ，按(1)的方法处理，可得 $\mathbf{G}_{E-1}^a$ 和 $\mathbf{D}_{E-1}^a$ 与(25)式相似。从上可知，有中间支座时仍按无中间支座来处理，只是下一号或上一号剖面的相关矩阵需作修改，这比解三弯矩方程组及文献[2]的方法要简单得多。若 $h = e$ ，仿照(1)的方法可推得

$$\theta_e = (d_{e,1}^b - d_{e,1}^a - m_e) / (g_{e,12}^a - g_{e,12}^b), \quad F_e = d_{e,2}^b - d_{e,2}^a - \theta_e (g_{e,22}^a - g_{e,22}^b)$$

m_e, F_e 正向同(1)。 $d_{e,ij}^a$ 和 $d_{e,ij}^b$ 是 $\mathbf{D}_e^a$ 和 $\mathbf{D}_e^b$ 的元素。由 $v_e = 0$ 和 θ_e 可得 M_e 和 Q_e 。

3.3 中间弹性支座

设 f 号剖面处为弹性支座，支反力 $F_f = \beta_f v_f$ ，同时有已知集中力偶 m_f 作用。若 $h > f$ ，由(21)式经推导整理得

$$\mathbf{G}_{f,1}^a = [\mathbf{N}_F + \mathbf{A}_{F,4} \mathbf{G}_f^a][\mathbf{M}_F + \mathbf{A}_{F,2} \mathbf{G}_f^a]^{-1} \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{M}_F = \begin{bmatrix} a_{F,11} + \beta_f a_{F,14} & a_{F,12} \\ a_{F,21} + \beta_f a_{F,24} & a_{F,22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_F = \begin{bmatrix} a_{F,31} + \beta_f a_{F,34} & a_{F,32} \\ a_{F,41} + \beta_f a_{F,44} & a_{F,42} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{D}_{f+1}^a$ 与(25)式相同。若 $h < f$, 按(2)的方法处理。这样, 有中间弹性支座时仍按无中间支座来处理, 只是需修改右邻或左邻剖面的相关矩阵, 而无需解五弯矩方程, 比文献[3]也要简单得多。若 $h = f$, 可推得

$$[\mathbf{G}_f^a - \mathbf{G}_f^b + \mathbf{F}][v_f, \theta_f]^T = \mathbf{D}_f^b - \mathbf{D}_f^a - [m_f, 0]^T \quad (27)$$

与(20)式比较多了两项。 $\mathbf{F}$ 的元素 $f_{11} = f_{12} = f_{22} = 0$, $f_{21} = \beta_f$ 。

3.4 梁的中间支座(包括弹性支座)

有已知的微小位移或其它形式的广义弹性支承, 均可推导出相邻剖面的相关矩阵, 处理方法同上。

我们利用上述方法编出程序在 IMS-8000 微型机上计算了三个例子。从计算结果可以看出本文方法的可靠性和精度是令人十分满意的。

参 考 文 献

- [1] M.M. 费洛宁柯-鲍罗第契主编, 材料力学教程(第二卷), 高等教育出版社(1954)。
- [2] 王学理, 连续跨越多个支座的阶梯梁(轴)的三弯矩方程, 力学与实践, 4(1985)。
- [3] 李龙元, 求解五弯矩方程式的一种特定参数法, 力学与实践, 4(1985)。
- [4] 大连工学院、天津大学编, 结构力学(下册), 人民教育出版社(1980)。

(本文于1986年5月28日收到)

用 FEM-BEM 联合方法求解局部应力

徐宜桂 胡德明

(武汉海军工程学院)

提要 本文通过对有限元二次计算法和 BEM-FEM 耦合方法, 用于求解局部应力时的计算精度和适用性的讨论, 提出了求解局部应力的 FEM-BEM 联合方法, 计算实例表明, 该法既有较高的计算精度, 又有很强的实用性。

关键词 有限元, 边界元, 局部应力

1. 前言

在大型复杂的工程结构中, 往往有些地区产生应力集中, 因而需要进行局部应力分析。有效地分析计算局部应力, 一直是力学工作者感兴趣的问题, 也是工程实际中急需解决的课题。由于问题的复杂性, 以前一般只能通过应力集中系数和名义应力来估算。在 FEM 出现以后, 则常用二次计算的分析方法^[1]。近年来, 不少文献提出采用 BEM, 特别是 BEM-FEM 耦合方法来解决此类问题, 许多计算实例表明: 它们能够获得较高计算精度的局部解, 且不

需要进行二次计算,但有一定的使用条件。本文在分析比较,综合考虑上述数值方法的计算精度,计算时间,适用场合,以及所需机器内存和输入数据量大小的基础上,提出了 FEM-BEM 联合应用的局部应力分析方法,该法是关于有限元二次计算法和 BEM-FEM 耦合方法的一种折衷方案,因而既有较高的计算精度,又有很强的适用性。

2. BEM-FEM 耦合方法的计算精度和适用性讨论

为了兼顾 FEM 和 BEM 的各自优点,而又克服二者的不足,七十年代后期,不少学者开始研究 FEM 和 BEM 的耦合问题,目前已形成两种熟知的耦合方法,即将边界之区域处理成一等效的超级有限单元(以下简称 B.F.M);或由有限元方程提供部份边界条件,然后求解边界元方程(以下简称 F.B.M)的方法。

在 B.F.M 中, Kelly 基于最小势能原理, Brebbia 采用最小二乘方法,均导得了同样的对称直接边界元公式。但是,在 Kelly 的推导过程中,在计算系统的总位能时,忽略了因离散边界场变量所产生的附加约束力虚功^[2]的影响。而在 Brebbia 的推导过程中,则在系数矩阵 $[H]$ 的特性并非太好的情况下,采用了最小二乘方法来对称化系数矩阵。这些都无疑影响了对称直接边界元公式的计算精度。

文献[3]曾对受均匀温度作用的空心圆柱体,按对称直接边界元法和直接边界元法,计算了边界节点位移。计算结果表明,边界元系数矩阵的对称化处理,严重恶化了求解精度,有的节点误差已超出工程允许的范围。

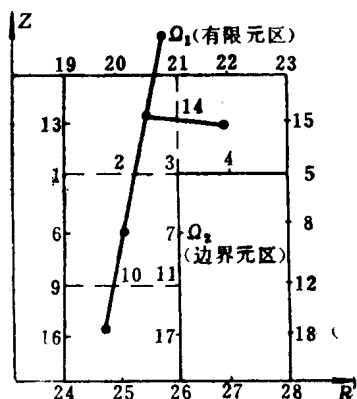


图 1

当将对称直接边界元公式,作为超级单元的刚度方程组装到有限元总体方程中时,对称化处理产生的误差也会影响整体求解的结果。本文对图 1 所示的模型,按照该法进行了计算,其中在 Ω_1 区域采用 FEM,在 Ω_2 区域采用 BEM,部份计算结果列于表 1 中,从中可以看到:边界节点位移的计算误差,令人难以接受。

若将边界元区域缩小,其计算精度则有所提高^[3],这是由于边界元区域的减少,改善了边界元系数矩阵的求解特性,且同时使对称化引起的误差影响,在总体方程中相对减弱的缘故。

所以,尽管 B.F.M 使用条件较宽,实现起来方便,并可受益于大量现有的有限元计算程序和处理方法,但一般情况下,计算精度较差,难以满足大型工程结构局部应力分析的要求,如为提高计算精度,进行相应的特殊处理,又会产生新的矛盾:

(1) 细分边界单元,显然会相应增加边界元方程的阶数,最终导致总体方程的存储空间和计算时间大大增加。不仅在计算费用上显得很经济,而且很有可能发生微型计算机容量危机,直接影响到问题的求解。

(2) 不经对称化处理,直接将边界元方程组装到有限元总体方程中去^[4],尽管可以获得较高的计算精度,但却破坏了原总体方程的对称性,使得方程数目,计算时间,计算所占内存成倍增加,文献[5]比较分析了这种处理方法的不经济性。

(3) 迭代-求解方法^[2]可在一定程度上解决上述矛盾,但却仅仅限于一般中小型结构的

局部应力分析。对于大型工程结构,受计算机容量或其它条件的限制,运用子结构分析方法有时成为一种必需的手段,此种情况下,迭代-求解方法难以实现。

至于 F.B.M, 由于该法仅仅经过一次等效节点力和面力的相互转化,不存在系数矩阵对称化或计算边界元区域系统位能等问题,因而具有较高的计算精度。然而,该法仅适用于对某一局部区域进行边界元分析的情况,无法对求解对象的两个或两个以上的局部地区同时进行边界元计算。在工程实际中,大型构体在多处同时出现应力集中则是相当普遍的现象。而且,该法难与子结构法相容,从而进一步限制了其在大型构件局部应力分析中的应用。

综上所述,尽管 BEM-FEM 耦合方法已在局部应力分析中,取得了大量研究成果。但对同时具有多处应力集中的大型工程结构而言,在运用有限计算机容量(如一般小型或微型计算机)求解的情况下,仍有许多不适用的地方。此外,在求解瞬态应力场的过程中,使用 BEM-FEM 耦合方法即在每一时间步长上,都采用 BEM 详细计算局部应力,也未必必要。

3. FEM-BEM 联合方法

基于上述分析,本文推荐采用 FEM-BEM 联合方法,分析大型工程构件的局部应力。该法的基本思想是:通过 FEM 计算求解区域的整体解,初步确定应力集中的地方,并提供该局部模型的部份边界条件(主要是节点位移值),然后在此基础上,运用 BEM 直接求解。

由于该法并不建立 FEM 和 BEM 直接耦合的关系,故两者之间不存在相互制约,可以充分发挥出各自最大的效能。采用直接边界元法求解,不需要进行系数矩阵的对称化处理,从而避免了 B.F.M 中的精度损失。由 FEM 预先计算提供局部模型的部份边界条件,使得能够对任何所要求的局部地区在任意中间计算时刻(如瞬态应力场计算过程中的任意步之间)进行再次分析,消除了原耦合计算中,对局部模型数量,位置,大小,边界单元数等的种种限制。

该法对局部模型的计算精度,主要取决于由 FEM 提供的部份边界条件的准确性。只要将局部模型的边界,扩展到应力集中现象基本消失的地方(而在此处是可以由 FEM 求得比较精确的解的),不难得到精度较高的局部模型的解。

与有限元二次算法相比,两者都采用了两次计算,但用 BEM 代替 FEM 对局部模型进行二次分析,其计算精度显然要高得多,而输入数据却少得多。

本文对图 1 所示模型的边界元区域 Ω_2 ,运用该法再次进行了计算,其中 5, 4, 3, 7, 11, 17, 26 等 7 个节点的位移由 FEM 首次计算提供, Ω_2 区域其它边界节点位移的计算值及相对误差亦列于表 1 中,可见,该法的计算精度是相当高的。

计算条件:空心圆柱体受 200℃ 的均匀温度作用,其内半径为 2.25cm,外半径为 4.25cm。各节点之间均为直线单元,长度均取为 0.5cm。材料的物性参数如下:

$$E = 2.14 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu = 0.3, \quad \beta = 2.1 \times 10^{-5} \text{ cm/cm} \cdot ^\circ\text{C}$$

因此处计算模型的目的,旨在相对比较 B.F.M 和 FEM-BEM 联合方法的计算精度,故应力计算结果不再给出。

FEM-BEM 联合方法已成功地应用于某舰用主机高压转子汽封,调节级叶轮和轴的圆角过渡处等局部地区的热应力分析中^[3]。

表1 位移的计算结果及相对误差

单位: cm

节 点 号	理 论 值		B. F. M				FEM-BEM 联合方法			
			计 算 值		相 对 误 差		计 算 值		相 对 误 差	
	$u_R \times 10^{-1}$	$u_Z \times 10^{-2}$	$u_R \times 10^{-1}$	$u_Z \times 10^{-2}$	$\delta u_R \times 10^2$	$\delta u_Z \times 10^2$	$u_R \times 10^{-1}$	$u_Z \times 10^{-2}$	$\delta u_R \times 10^2$	$\delta u_Z \times 10^2$
8	0.17850	0.00000	0.17489	0.02026	2.021		0.17849	0.00000	0.001	0.000
12	0.17850	-0.21000	0.18007	-0.20141	0.878	4.089	0.17849	-0.20998	0.001	0.008
18	0.17850	-0.42000	0.17690	-0.41499	0.896	1.193	0.17849	-0.42998	0.001	0.005
27	0.15750	-0.63000	0.15686	-0.59226	0.409	5.990	0.15750	-0.62995	0.000	0.009
28	0.17850	-0.63000	0.18134	-0.63006	1.591	0.009	0.17849	-0.62995	0.001	0.001

参 考 文 献

- [1] 徐次达, 华伯浩, 固体力学的有限元理论、方法及程序, 水利电力出版社 (1983).
- [2] 马景明等, 边界元法与有限元法耦合的对称-迭代求解, 西安交通大学学报, 19, 5(1985).
- [3] 徐宜桂, 计算涡轮机转子瞬态温度场、应力场的有限元子结构法和边界元法, 海军工程学院硕士论文(1986).
- [4] Brebbia C.A., Georgiou P., *Appl. Math. Modeling*, 3, 3 (1979), 212—220.
- [5] Hisatake M., Lto T., Ueda H., *proc. fifth. int. conf. on BE* (Brebbia, et. Eds), Hiroshima, Japan (1983), 985—994.

(本文于1986年12月15日收到)

横向载荷作用下平行四边形板 弯曲的一个摄动解

李 龙 元

(上海应用数学和力学研究新)

提要 本文对横向载荷作用下的平行四边形板的弯曲问题, 选取与板倾斜角有关的无量纲变量为小参数, 对弯曲方程和边界条件方程进行了摄动展开, 并得到了相应摄动方程的摄动解。文章还分析了倾斜角对挠度的影响敏感性问题。

关键词 平行四边形板, 摄动解, 弯曲

1. 引言

文献[1]曾指出,对称角铺设层合板在横向载荷作用下的弯曲问题可通过斜板刚度的等效转换来达到。而求解一般斜板的弯曲问题可归结为求解如下的基本方程^[2](图1):

$$W_{,xxxx} - 4\cos\theta W_{,xxxy} + 2(1 + 2\cos^2\theta)W_{,xxyy} - 4\cos\theta W_{,xyyy} + W_{,yyyy} = \frac{P_0}{D} \sin^4\theta \quad (1)$$

和如下的边界条件(对简支边)

$$\begin{aligned} x=0, a: \quad W=0; \quad W_{,xx} - 2\cos\theta W_{,xy} &= 0 \\ y=0, b: \quad W=0; \quad W_{,yy} - 2\cos\theta W_{,xy} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

方程(1)和(2)由于耦合项的出现,一般不可能用双重三角级数来分离求解。目前比较常用的是能量法或直接近似法^[3]。

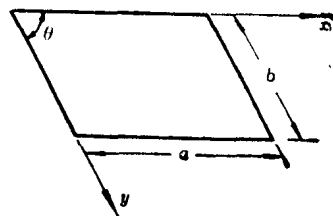


图 1

2. 摄动参数和摄动方程的建立

在对称角铺设层合板中,铺设角对层合板的挠度影响一般不是很大的^[3],因而,采用渐近方法将能得到较好的结果。为方便起见,这里可取无量纲小参数为

$$\varepsilon = \cos\theta + \sin\theta - 1 \quad (3)$$

从上式易知,当 $\theta \geq 45^\circ$ 时,有

$$\sin\theta = \frac{(1+\varepsilon) + \sqrt{1-2\varepsilon-\varepsilon^2}}{2}, \quad \cos\theta = \frac{(1+\varepsilon) - \sqrt{1-2\varepsilon-\varepsilon^2}}{2}$$

当 $\varepsilon < 1$, 有展开式

$$\sin\theta \doteq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{4} + \dots, \quad \cos\theta \doteq \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{4} + \dots \quad (4)$$

设方程(1)的挠度函数具有如下展开式

$$W = W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3 + \dots \quad (5)$$

将式(4),(5)代入式(1)和(2),得下列渐近递推方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W_0 &= P_0/D \\ x=0, a: \quad W_0 &= 0, \quad W_{0,xx} = 0 \\ y=0, b: \quad W_0 &= 0, \quad W_{0,yy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^4 W_1 &= 4(\nabla^2 W_0)_{,xy} \\ x=0, a: \quad W_1 &= 0, \quad W_{1,xx} = 2W_{0,xy} \\ y=0, b: \quad W_1 &= 0, \quad W_{1,yy} = 2W_{0,xy} \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

.....

3. 渐近方程的求解

显然,零阶渐近方程代表一普遍矩形板在横向载荷 P_0 作用下的弯曲问题,它的解可表示为

$$W_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (A-1)$$

其中

$$A_{mn}^0 = \frac{q_0}{D} \cdot \frac{1}{[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2}$$

$$q_0 = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b P_0(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

一阶渐近方程的解共有三部分组成，一是在横向载荷 $4(\nabla^2 W_0)_{,xy}$ 作用下的挠度 W_1^1 ，二和三是分别在 $x=0, a$ 和 $y=0, b$ 处的分布弯矩 $2W_{0,xy}$ 作用下的挠度 W_1^2 和 W_1^3 。根据正弦变换公式，上述三部分载荷可分别表示为

$$4(\nabla^2 W_0)_{,xy} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}^1 \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (B-1)$$

其中

$$q_{ij}^1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_0}{D} \cdot \frac{16ij}{[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} \cdot \frac{mn}{ab} \cdot \frac{1 - (-1)^{i+m}}{i^2 - m^2} \cdot \frac{1 - (-1)^{j+n}}{j^2 - n^2}$$

$$2W_{0,xy}|_{x=x_k} = \sum_{j=1}^{\infty} M_j \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (B-2)$$

$$2W_{0,xy}|_{y=y_k} = \sum_{i=1}^{\infty} M_i \sin \frac{i\pi x}{a} \quad (B-3)$$

其中

$$M_j = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4jmn\pi}{ab} \cdot \frac{1 - (-1)^{n+j}}{j^2 - n^2} A_{mn}^0 \cos \frac{m\pi x_k}{a}$$

$$M_i = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4imn\pi}{ab} \cdot \frac{1 - (-1)^{m+i}}{i^2 - m^2} A_{mn}^0 \cos \frac{n\pi y_k}{b}$$

根据(B-1)~(B-3)式，不难得到它们所对应的挠度函数为

$$W_1^1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_{ij}^1}{[(i\pi/a)^2 + (j\pi/b)^2]^2} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (C-1)$$

$$W_1^2(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(y) \sin \frac{i\pi x}{a} \quad (C-2)$$

$$W_1^3(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} X_j(x) \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (C-3)$$

其中

$$Y_i(y) = \alpha_{1i} \sinh \frac{i\pi y}{a} + \alpha_{2i} \cosh \frac{i\pi y}{a} + \alpha_{3i} \frac{i\pi y}{a} \sinh \frac{i\pi y}{a} + \alpha_{4i} \frac{i\pi y}{a} \cosh \frac{i\pi y}{a}$$

$$X_j(x) = \beta_{1j} \sinh \frac{j\pi x}{b} + \beta_{2j} \cosh \frac{j\pi x}{b} + \beta_{3j} \frac{j\pi x}{b} \sinh \frac{j\pi x}{b} + \beta_{4j} \frac{j\pi x}{b} \cosh \frac{j\pi x}{b}$$

根据边界条件，不难定出待定常数为

$$\begin{aligned} \alpha_{2i} &= 0, & \alpha_{3i} &= \frac{M_i(0)}{2} \cdot \left(\frac{a}{i\pi}\right)^2 \\ \alpha_{4i} &= \frac{M_i(b)}{2} \left(\frac{a}{i\pi}\right)^2 \sinh^{-1} \frac{i\pi b}{a} - \alpha_{3i} \operatorname{ctgh} \frac{i\pi b}{a} \\ \alpha_{1i} &= -\frac{i\pi b}{a} \left[\alpha_{3i} + \alpha_{4i} \operatorname{ctgh} \frac{i\pi b}{a} \right] \quad (i = 1, 2, \dots) \\ \beta_{2j} &= 0, & \beta_{3j} &= \frac{M_j(0)}{2} \left(\frac{b}{j\pi}\right)^2 \\ \beta_{4j} &= \frac{M_j(a)}{2} \left(\frac{b}{j\pi}\right)^2 \sinh^{-1} \frac{j\pi a}{b} - \beta_{3j} \operatorname{ctgh} \frac{j\pi a}{b} \\ \beta_{1j} &= -\frac{j\pi a}{b} \left[\beta_{3j} + \beta_{4j} \operatorname{ctgh} \frac{j\pi a}{b} \right] \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

4. 例题

采用上述摄动方法, 我们分别计算了受均布载荷和在板中心受一集中载荷作用下的平行四边形板弯曲问题, 其结果分别在图 2 和图 3 给出。图中的板中心挠度结果表明, 受均布载荷作用下的平行四边形板其板斜角对板中心挠度的影响要大于对应的受集中载荷的平行四边形板。

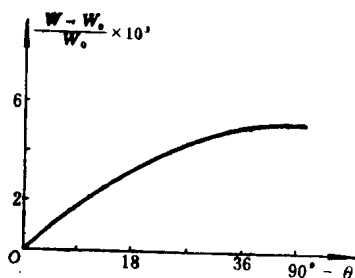


图 2 受均布载荷作用下的平行四边形板($a=b$)中心挠度曲线

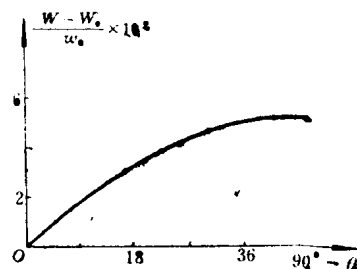


图 3 在板中心受集中载荷作用下的平行四边形板($a=b$)中心挠度曲线

5. 结论

从摄动参数和摄动方程所代表的物理意义看, 当平行四边形板的斜角 θ 较大时, 上述摄动解能给出较好的结果。但当 θ 接近 45° 时, 摄动解将会产生较大的误差。

本文虽然仅对平行四边形板弯曲问题作了讨论, 但方法本身可推广到任意对称角铺设复合材料板的弯曲问题中。

参 考 文 献

- [1] Ashton, J.E., An Analogy for Certain Anisotropic plates, *J. Composite Materials*, April (1969).
- [2] R.M. 琼斯, 复合材料力学 (中译本), 上海科学技术出版社 (1981).
- [3] 李龙元, 陈浩然, 应用力学学报, 2 (1985).

(本文于1986年1月27日收到)

求解弹性梁弯曲大挠度问题的弦线法

魏 铭 森

(南通纺织工学院)

提要 弦线法的基本思想是将在原基准坐标系中必须作为大变形来处理的问题, 转换到另一恰当的坐标系, 可近似作为小变形问题来处理, 使问题大大简化。

关键词 弹性梁, 大变形, 近似解析法

1. 弦线法的基本原理

以一受任意载荷作用的悬臂梁 OA 为例, 说明弦线法的基本原理。

设悬臂梁 OA 在外载荷作用下发生大挠度变形, 最终变形位置为图 1 中 OA' 曲线。通常采用的坐标系均为以梁未变形前的轴线方向为 X 轴, 即 XOY 坐标系。显然, 在该坐标系中此问题只能作为大变形问题来求解。然而, 如果变形后的挠曲线 OA' 相对于该曲线的弦线 OA' 而言可以近似看作为小挠度曲线的话, 那么在图 1 所示的以弦线 OA' 为 x 轴的 xoy 坐标系中原问题就可以简化成弯曲小变形问题来求解。

简化的理由如下:

首先考虑梁上各点的弯矩。显然, 坐标转换对弯矩不会产生影响。不过, 在原先的 XOY 坐标系中建立梁的弯矩方程 $M(X)$ 时必须考虑梁变形后载荷作用点位置的变化, 因此 $M(X)$ 的表达式比较复杂, 往往含有挠曲线 $y(X)$ 及其积分形式。而在 xOy 坐标系中, 由于挠曲线 OA' 可近似看作为小挠度曲线, 利用小变形梁的特点在该坐标系中就能够很简单地写出梁的弯矩方程 $M(x)$ 的表达式。其次, 由于 OA' 曲线在 XOY 坐标系中既然可近似地看作为小挠度曲线, 那么原问题在此坐标系中就可以作为小变形问题求解。在接合边界条件后即可得到原问题在 xOy 坐标系中的近似解析解。最后, 将计算结果返回到原坐标系, 就可获得原先的弯曲大变形问题的近似解。

如果挠曲线在以 OA' 弦线为 x 轴的 xoy 坐标系中还不能视为小挠度曲线, 则可以将 OA' 挠曲线分成若干段, 将每一段挠曲线均用其弦线作为坐标系的横轴建立各自的局部坐标系。图 2 所示即为将原挠曲线 OA' 分成 OO_1 与 O_1A' 两段的情况。显然从理论上说, 当梁段的数量无限增大, 且每一梁段的长度均趋近于零时, 本近似方法的计算结果将收敛于大变形问题的精确解。不

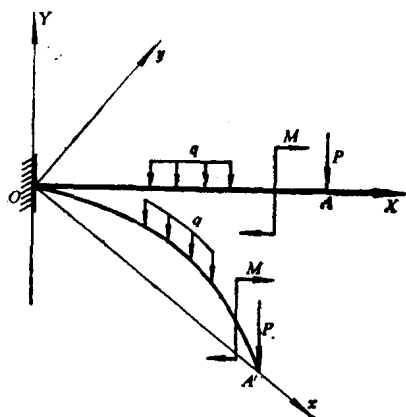


图 1 弦线法基本原理简图(一次近似)

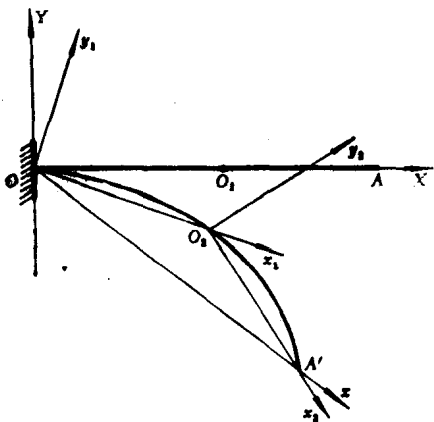


图 2 弦线法基本原理(二次近似法)