

俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部批准

师范学院用

射影几何学及
画法几何学
教学大纲

苏俄教育部教科書出版社

(1955)

高等教育出版社

1956

师范学院用

射影几何学及画法几何学教学大纲

программы педагогических институтов

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

учебная (1955)

别列标尔金(Д. П. Черепёлкин), 切别維魯辛(В. В. Чекушев)

北京师范大学朱鼎勋译

高等教育出版社出版

北京琉璃厂七条胡同

(北京市书刊出版业营业登记证出字第155号)

前门印刷一厂印刷 新华书店总经售

开本 787×1092 1/16 印张 57/16 字数 100,000

一九五六年九月北京第一次印刷

一九五六年九月北京第一次印刷

印数 0001—4,000 定价 1.50 元

统一书号 15.101.02

射影几何学教学大纲

1. 平面仿射几何学的基本概念

平面到平面上的平行射影。透视仿射对应。两个平面間的一般仿射对应当作是透视仿射鏈。

仿射几何学作为經過仿射变换、性質不变的几何学。仿射几何学基本概念摘要：直綫及它們間的平行性；三个共綫点間的簡單比；平行綫段的比；面积的比；圓的仿射性質以及轉化到橢圓上的这些性質。

由三对对应点給定仿射变换；已知三对对应点变换的唯一性。

平面上一般的仿射坐标系。

关于仿射变换解析表示式的定理：通过始点的坐标将变换点的坐标綫性地表出来；逆定理。

平面到它自身的仿射变换的不变点及不变方向。

2. 射影空間的構造

在欧氏空間平面到平面上的中心射影及平面間的透视对应。在这种对应下平行綫束的性質。透视对应的缺点：在每一平面上都有在其他一平面上無映像(影)之点存在。非正常元素引入的必要性。

用每一个平行綫叢与一个非正常点的一一对应的方法，和每一个平行面束与一个非正常直綫的一一对应的方法，以及非正常

平面的引入,从这三方面使欧氏空間补充了(非正常的)新元素。

这样構造的射影空間的基本概念摘要:关联(結合)公理以及它們对于正常元素和非正常元素的核驗。在空間以及在平面上的对偶原則。平面間透視对应的一一对应的性質。作为射影定理例子的笛沙格(Desargues)定理。

直綫当作閉曲綫。直綫上的点列(綫束)中一对点(射綫)分成两个区域。在直綫上或在綫束中可分的和不可分的元素对。

借綫叢之助对射影平面的說明。

3. 射影几何学原理

两个平面間射影对应当作透視鏈。平面射影几何学作为經過平面上射影变换、性質不变的几何学。射影几何学的基本概念摘要:点;直綫(不分正常的和非正常的);綫束;共綫四点及綫束中四直綫的复比;調和的四元素。完全四角形(四边形);調和四元素的構造。

透視的反射影的点列和綫束。由三对对应点(直綫)給定两个点列(綫束)間的射影对应。两个射影点列(綫束)成透視位置的條件。具有公共底(頂)的点列(綫束)。二重元素。直綫上(綫束中)的对合。由兩对对应元素給定对合。对合的二重元素以及在点列中和在綫束中对合对应的形式。在解决初等几何学作圖題中射影几何学的方法特别是射影对应性質的利用。

关于同素射影变换的概念。同素射影变换的基本性質。由四对对应点給定同素变换。

在直綫上及在平面上射影坐标的概念。

4. 二阶曲线的射影理论

二阶曲线的射影定义。用五个点(直线)给定二阶曲线(二班曲线束)。巴斯加(Pascal)定理,布立安香(Brianchon)定理以及它们的特殊情形。马克劳林(Maclaurin)定理。二阶曲线及二班曲线的恒等。关于二阶曲线的极和极线。配极变换。

关于一般形式异素射影变换的概念。用射影坐标表示二阶曲线。

5. 几何学与变换群

关于变换群的概念。在平面上所有同素射影变换的群。同素射影变换群的主要子群:仿射群,主群(相似变换群),运动群。

几何学分支的特征利用对应的群:射影的,仿射的,及计量的几何学。

6. 结 论

近世射影几何学的某些问题(公理法,射影的计算,高阶形象)以及苏维埃学者对于它们研究的作用[B. K. 伏拉索夫(B. K. Власов), Н. А. 哥拉哥列夫(Н. А. Глаголев)等等]。关于射影几何学各种应用的概念[透视学(перспектива), 摄影测量术(фотограмметрия), 列线图解(номография), 图解静力学(графостатика)]。

说 明

射影几何学教程的基本思想包括:由普通的欧氏几何学开始

發展到仿射的基本概念后再到平面射影几何学，使学生熟習在几何学中变换群的概念，并且指明它們如同在空間圖形到平面上的映像的作圖所适合的情况下仿射几何学及射影几何学的概念。

本大綱确立射影几何学的内容并且介紹这个課程可能作圖的方法之一而且这方法已經驗明了具有完全的实际应用。

第一、課程的导言部分講授平面仿射几何学。首先(利用平行射影)規定透視仿射变换，然后由平行射影鏈的帮助而进行一般仿射变换。这一部分的意义在于通过一个最簡單的例子来熟悉几何变换以及它的不变量的概念。

此后很自然的引到射影几何学，而將它当作一种几何学使圖形性質經過任何平面到平面上中心射影得以保持，然而在这里显示出对我们要求寻常欧氏直綫、平面及空間的推广——新的非正常元素的补充。大綱第二部分講授对于这类射影空間的構造以及它的基本性質。

此后在大綱的第三部分和第四部分載明：当射影空間構成后就可能將射影几何学的内容系統地叙述。

这样积累的仿射几何学和射影几何学的材料就有可能利用对应变换群来研究关于几何学分支的特征的一般主要問題。在这里仿射群当作射影群的子群而相似群則当作仿射群的子群。

在結論(第六部分)里学生們应当熟習近世射影几何学的若干問題以及它的实际应用。

参 考 文 献

教 科 書

Н. Ф. Четверухин: Проективная геометрия, 1953.

参 考 書

1. Н. А. Глаголев: Проективная геометрия, 1936.
2. Н. В. Ефимов: Высшая геометрия, 1953.
3. О. А. Вольберг: Основные идеи проективной геометрии, 1949.
4. Н. А. Глаголев: Теоретические основы номографии, 1943.

画法几何学 教学大綱

I. 射影方法以及它的若干基本性質

1. 非正常元素已經引入的欧氏空間的中心射影。射影映像的作圖。积聚的点及直綫。透視的同素射影变换。基本的位置問題及計量問題。在透視里圓的映像(圓錐截綫)。

2. 平行射影以及它的基本性質。透視仿射对应。橢圓, 它的作圖及性質。在平行射影里(特別是“半斜射影”)最簡單的平面圖形及空間圖形的映像。

3. 直角射影。“标准”射影。圓及球的映像。球面截綫。圓形体的問題。复杂的(兩個圖形的)圖形以及它在解决立体几何学問題上的应用[孟日(Monge)法]。

II. 完全及不完全映像以及它們在教学过程中的应用

1. 关于完全映像的概念。空間作圖中的位置問題

2. 映像計量的确定性。波立克-史瓦茲(Pohlke-Schwarz)定理。在射影圖上的計量問題。借問題条件的推广来簡化圖形。

3. 不完全映像。在學習立体几何学課程时, 不完全映像作为說明圖。

說 明

所提出的师范学院物理数学系画法几何学教学大綱, 系由兩

部分組成。

第一部分講授射影方法及它的主要性質。這部分應當是將射影幾何學(第五學期)課程的知識很自然地應用到画法幾何學(第六學期)里射影映像的研究上去。

這部分的第一點使學生熟悉透視映像(綫性映像)的初步概念。同時除了基本的位置問題及計量問題以外，圓或圓的一部分的映像考慮成為圓錐截綫和它們的弧的形式。

從任意平面上的點及直綫到映像的平面(制圖的平面)上的射影轉到眾所周知的“透視同素射影變換”中點的對應的概念。當映像的平面與制圖的平面相重合以後，這樣平面場的對應的研究是比較便利的(這種情形叫做“射影對應”)。

在第一部分第二點里平行射影作為中心射影特殊情形的研究，平行射影最主要性質的導出。由任意平面上的點及直綫到投射的平面上的射影，平面場的透視仿射對應(或同形對應)的概念是建立了。這個對應不變量的研究。橢圓作為圓的仿射形象的研究。這樣可以引入許多橢圓性質(中心、共軛直徑、切綫)並且得到它的合適的作圖方法。

自此以後可以轉到簡單的平面圖形及空間圖形(在平行射影里)的映像。如此來証空間任意正多面體(在平行射影里)的映像到棱柱體、棱錐體、圓柱體、圓錐體的映像。在“半斜”射影中用以映射若干圖形，例如立方體和具有已知高及底半徑的圓柱體等等。

第三點講授直角射影作為平行射影的特殊情形。特別是在直角射影(從前方來的形式，從左方來的形式)里，給出球面及其截綫(經綫，緯綫)的映像是很重要的。當圖形的某些部分在映像中不見(退縮)時，也應該討論被映射的(原始)圖的位置。與射影方向

平行的平面映射成的圖形是直綫，是值得注意的。例如当立方体經過到平面上的直角射影，它的平行平面映射成——正方形。这样的射影(当圖形对于投射的平面占有最簡單位置时)叫做“标准射影”。应当証明最簡几何体在“标准”射影里的映像的例題。

再有，“标准”射影可用以解立体几何学中圓形体及多面体的問題。在这里，于一系列的情形里实行用复杂的(或两个圖形的)圖形的作圖法，如众所周知的孟日法，是有用的。“标准”射影是解决立体几何作圖方法中的一个。同时它要求很好的發展空間的想像，能为达到这个目的而服务(参看文献 3 及 6)。

大綱第二部分討論关于射影映像在教学过程中的各种应用。为了适应这个，第一点給出关于映像完全性的概念。然后(通过例題)立体几何問題的解法出現在射影圖形上。假如这样圖形具有完全性的性質，則在其上的各种位置問題可用作圖法实际求解(参看文献 3、4 及 5)。

第二部分第二点討論关于射影圖形上的計量問題。为了解决這個問題，圖形应当具有“計量的确定性”(“計量的完全性”)的性質。这个概念的基础系借助于关于四面体射影的波立克-史瓦茲定理。应当給出作圖上計量問題解法的例題(参看文献 3、4 及 5)。

圖形的作圖常常可能有不少的簡化，假若不注意到問題的数值条件，亦即这样完成的圖形，假若这些条件表成文字的形式。構成“一般形式”的問題及作成对应圖形以后，然后以数值根据代替所求的解法(参看文献 3, 176 頁以后)。

大綱第二部分第三点講授在立体几何学課程中完成說明圖的問題。

这样的圖形伴随着全部課程的叙述并且具有教学上存在的价值。它应当是原則上正确并且不需花费很多時間就容易完成的。所提的大綱最末点講授的“不完全映像”是能很好地适合这个要求的。自然問題的出現应当是随着对学校教师工作上有用的大量例題。

所提出的大綱的推行要求到适应教科書的內容。目前大綱的必要知識可从文献表中所列已出版的書中找到。

参 考 文 献

1. Н. А. Глаголев: Начертательная геометрия, 1953.
2. О. А. Вольберг: Лекции по начертательной геометрии, 1947.
3. Н. Ф. Четверухин: Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии, 1946.
4. Н. Ф. Четверухин: Стереометрические задачи на проекционном чертеже, 1952.
5. Г. А. Владимирский и С. Ю. Калецкий: Черчение, 1952.
6. Н. С. Воробьев: Решение задач по стереометрии методом прямоугольных проекций “Математика в школе”, 1953, № 3.
7. Л. М. Лоповок: Сборник стереометрических задач на построение, 1950.

射影几何学教学大綱著者
画法几何学教学大綱著者
譯 者 北京师范大学

Д. И. 別列标尔金
Н. Ф. 切特維魯斯
朱 鼎 勛