

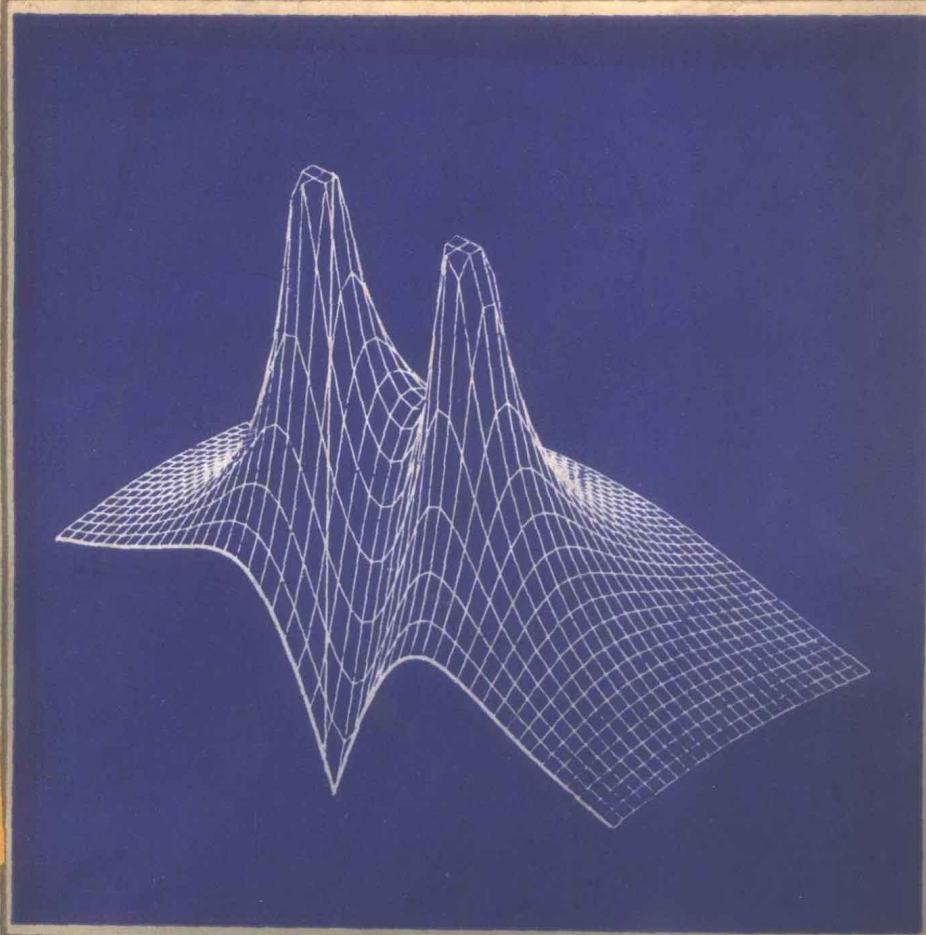
- 870105

5087
1/4724
T. 2

系统分析导论

(美) T.H. GLISSON 著

丁钟琦 朱寅生 等译



724

湖南大学出版社 出版

系统分析导论

下 册

〔美〕 T.H.Clisson 著

丁钟琦 朱寅生等译

湖南大学出版社

内 容 提 要

本书是美国T.H. Glisson的作品，细致地介绍了系统分析，原书有300个例题、450个习题及600个图形，易于自学。

译本分上下册出版，上册包括四章：系统分析原理、线性时不变系统、系统对正弦激励的响应及傅里叶分析。下册包括五章：拉氏变换、数字信号与系统、线性移不变系统、Z变换及计算机辅助分析与设计，此外还包括几个附录。

本书适于大专院校学生作为“系统分析”的自学课本和系统分析工作者参考。

T.H. Glisson

Introduction to System Analysis

Mc Graw-Hill Book Company, 1985

系 统 分 析 导 论

下 册

[美] T.H. Glisson 著

丁钟琦 朱寅生等合译

*

湖南大学出版社出版发行

湖南省新华书店经销

湖南环境保护学校印刷厂印装

*

787×1092毫米 16开本 19.875印张 字数：483千字

1987年12月第一版 1987年11月第一次印刷

印数 0001—2000

统一书号：15412·24 定价：4.70元

[ISBN7-314-00131-6/TN·1]

译 者 前 言

本书根据美国 McGraw-Hill 公司 1985 年出版、北卡罗利纳大学电气与计算机系 Glisson 所著《系统分析导论》一书译出。该书内容丰富、取材新颖、讲述细致、循循善诱、便于自学。每节有提要，每章有小结，全书有 300 个例题，450 个习题。本书将模拟、数字系统结合起来，避免了不必要的重复；同时，这两个系统的叙述，又具有相对独立性，为分别选学这两个系统的理论提供了方便。第九章计算机仿真及辅助分析设计以及许多实用程序，使本书增色不少，这些内容，在目前的系统分析教材中尚属少见。

参加本书翻译工作的有丁钟琦（前言及第1章）、张学孚（第2章）、秦建球（第3章）、朱寅生（第4章）、林国正（第5章一部分）、李宛平（第5章一部分）、丁少琦（第5章一半）、郭建军（第6章一部分）、郭长志（第6章一部分）、王照明（第6章一部分及附录）黎建（第7章及第5章一部分）、杨杰（第8章）、黄庆收（第9章）。校对工作分工如下：丁钟琦校第3、4、5、6章的一部分及第2章，黄庆收校第3章大部分及第5、7、8章，黎建校第6章一部分及第4章，杨杰校第9章。此外秦建球对第4章也作了一些校对工作。

本书出版过程中得到了湖南广播设备厂、广深茂源公司、湖南环保学校印刷厂的大力支持和帮助，谨此致谢。

由于译者水平有限，错误在所难免，敬希批评指正。

译 者

1987.11

目 录

第五章 拉普拉斯变换

第一节 拉普拉斯变换的定义和性质..... (1)	5—3E 松弛响应与受迫响应..... (26)
5—1A 收敛性和唯一性..... (2)	5—3F 暂态响应和稳态响应..... (28)
5—1B 右边拉普拉斯逆变换..... (3)	5—3G 传输函数和频率响应..... (29)
5—1C 与富里叶变换的关系..... (4)	5—3H 最小相位和非最小相位系统..... (32)
5—1D 线性..... (6)	5—3I 全通延迟均衡器..... (33)
5—1E 运算性质..... (7)	5—3J 主极点近似..... (40)
第二节 应用于线性时不变系统..... (9)	5—3K 根轨迹图..... (43)
5—2A 系统函数..... (9)	5—3L 随动系统..... (44)
5—2B 用微分方程描述的系统..... (10)	第四节 单边拉普拉斯变换..... (50)
5—2C 用方框图描述的系统..... (11)	5—4A 定义和性质..... (50)
5—2D 部分分式展开式..... (13)	5—4B 线性性质..... (51)
第三节 系统函数的解释..... (20)	5—4C 与双边拉普拉斯变换的关系..... (52)
5—3A 极点和零点..... (20)	5—4D 运算性质..... (53)
5—3B 冲激响应、固有模式和固有频率..... (21)	5—4E 应用于初值问题..... (54)
5—3C 稳定性..... (23)	小结..... (62)
5—3D 可实现性..... (24)	习题..... (67)

第六章 数字信号与系统

第一节 模数与数模转换..... (80)	第二节 数字信号与系统..... (100)
6—1A AD与DA转换系统..... (81)	6—2A 基本信号与系统..... (100)
6—1B AD转换所引起误差的定义..... (84)	6—2B 数字积分器和微分器..... (106)
6—1C 量化误差..... (84)	第三节 基本概念..... (109)
6—1D 采样误差..... (88)	6—3A 可实现性..... (109)
6—1E 恢复误差..... (97)	6—3B 稳定性..... (110)
6—1F 无误差AD和DA转换..... (98)	6—3C 暂态响应和稳态响应..... (111)
6—1G 机电式AD和DA转换器..... (99)	6—3D 保真度..... (112)
	6—3E 灵敏度..... (114)
	习题..... (116)

第七章 线性非移变数字系统

第一节 线性非移变系统的定义..... (123)	7—1B 非移变性..... (124)
7—1A 迭加性..... (123)	7—1C 线性非移变系统..... (125)

第二节 卷积.....(126)

7—2A δ 响应.....(126)

7—2B 卷积和.....(127)

7—2C 卷积和的图解.....(128)

7—2D 方框图与可交换性.....(130)

7—2E 阶跃响应.....(131)

7—2F 对矩形脉冲的响应.....(132)

7—2G 非移变性与非时变性
的比较.....(133)

第三节 δ 响应的解释.....(135)

7—3A 可实现性.....(135)

7—3B 稳定性.....(136)

7—3C 保真度.....(138)

第四节 由差分方程所描述

的系统.....(139)

7—4A 方框图.....(139)

7—4B 数字递推.....(140)

7—4C δ 响应与卷积和.....(141)

7—4D 可实现性.....(144)

第八章 z 变换

第一节 定义和基本特性.....(174)

8—1A z 变换的定义.....(174)

8—1B z 平面.....(175)

8—1C 唯一性和收敛性.....(175)

8—1D 右边逆 z 变换.....(177)

8—1E z 变换表.....(178)

8—1F 线性.....(179)

8—1G 部分分式展开.....(179)

8—1H 用长除法求数值逆.....(180)

8—1I 运算特性.....(181)

第二节 在线性非移变系统

中的应用.....(182)

8—2A 由 δ 响应描述的系统.....(182)

8—2B 由差分方程描述的系统.....(183)

8—2C 由方框图描述的系统.....(184)

8—2D 冲激不变法.....(185)

8—2E 阶跃不变法.....(188)

7—4E 稳定性.....(145)

第五节 对正弦激励的响应.....(145)

7—5A 正弦信号的表示.....(145)

7—5B 线性非移变系统的传递
函数.....(146)

7—5C 增益与相移.....(148)

7—5D 常量(直流)信号.....(149)

7—5E 由差分方程所描述
的系统.....(150)

7—5F 方框图的简化.....(150)

7—5G 迭加性.....(152)

第六节 数字滤波器.....(154)

7—6A 一阶递归滤波器的分析.....(154)

7—6B 一阶模拟和数字滤波器
的比较.....(156)

7—6C 非递归数字滤波器.....(159)

小结.....(165)

习题.....(166)

第三节 系统函数的解释.....(188)

8—3A 极点、零点和固有
模式.....(189)

8—3B 稳定性.....(189)

8—3C 可实现性.....(193)

8—3D 非强制响应和强制
响应.....(194)

8—3E 阶跃或正弦输入的
强制响应.....(195)

8—3F 瞬态响应和稳态响应.....(196)

8—3G 传递函数和频率响应.....(197)

第四节 由双线性变换设计递归数字

滤波器.....(204)

8—4A 双线性变换.....(204)

8—4B 利用双线性变换设计数字
滤波器.....(208)

小结.....(212)

习题	(21)
----	------

第九章 计算机辅助分析和设计

第一节 CSMP仿真简介	(220)	第二节 线性时不变系统	(239)
9—1A CSMP语句	(220)	9—2A 利用抽头延时线仿真	(239)
9—1B CSMP的保留字	(220)	9—2B 数字卷积	(245)
9—1C CSMP的变量名、常量和运算符	(221)	9—2C 由微分方程描述的系统	(247)
9—1D CSMP程序的格式	(221)	第三节 计算机辅助富里叶分析	(251)
9—1E 参数语句	(224)	9—3A 快速富里叶变换	(251)
9—1F 定时语句	(224)	9—3B 富里叶系数的计算	(253)
9—1G CSMP中的基本信号模型	(225)	9—3C 富里叶级数求和	(256)
9—1H CSMP中的基本系统模型	(226)	9—3D 富里叶变换的计算	(260)
9—1I 积分	(226)	9—3E 逆富里叶变换的计算	(263)
9—1J 延时	(229)	第四节 交互式计算机辅助分析	(270)
9—1K 微分	(231)	9—4A 多项式的根	(270)
9—1L 静态元件	(232)	9—4B 线性方程组	(276)
9—1M 反馈系统	(235)	9—4C 部分分式展开	(283)
9—1N 代数环	(237)	9—4D 递归数字滤波器的设计	(290)
9—1O 局部检验	(238)	小结	(294)
9—1P 小结	(239)	习题	(295)

附录

附录A 数学公式	(301)	附录E Z变换	(307)
附录B 富里叶级数	(302)	附录F 连续系统模型语言 (CSMP)	
附录C 富里叶变换	(304)	概要	(308)
附录D 拉普拉斯变换	(305)		

第五章 拉普拉斯变换

傅里叶变换是广泛用于信号和系统分析的少数几种变换之一。在本章里，我们叙述拉普拉斯变换¹⁾，它在数学上与傅里叶变换相似。的确，用拉普拉斯变换能解决的任何实际问题，用傅里叶变换也能解决，反之也一样。但是某些类型的问题用拉普拉斯变换更容易解决。拉普拉斯变换还能对某些类型的问题给出更透彻的分析。因此，在某些应用中最好用拉普拉斯变换。

在5—1节中给出了拉普拉斯变换的定义和基本性质。在5—2节中说明如何用拉普拉斯变换来求一个线性时不变系统的输出。5—3节叙述在系统的拉普拉斯变换的分析中怎样反映出该系统的可实现性、稳定性和其它的重要特性。5—4节介绍单边拉普拉斯变换，它特别适于解决初值问题。

5—1 拉普拉斯变换的定义和性质

函数 $e(t)$ 的拉普拉斯变换用 $E(s)$ 表示，定义为：

$$E(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-st} dt \quad (5-1)$$

为了简化，用算子 L 表示拉普拉斯变换，因此

$$E(s) = L\{e(t)\} \quad (5-2)$$

就表示式(5—1)右边的运算。

函数 $e(t)$ 的拉普拉斯变换为 $E(s)$ ，则 $e(t)$ 是 $E(s)$ 的拉普拉斯逆变换，我们用下式表示这一关系

$$e(t) = L^{-1}\{E(s)\} \quad (5-3)$$

求拉普拉斯逆变换的方法在后面叙述。

例5—1 δ 函数的拉普拉斯变换是

$$L\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

逆变换是

$$L^{-1}\{1\} = \delta(t)$$

拉普拉斯变换 $E(s) = L\{e(t)\}$ 的单位是 $e(t)$ 的单位；例如，如果 $e(t)$ 为电压而时间用秒表示，则 $E(s)$ 的单位为伏特一秒。拉普拉斯变换 $E(s)$ 的独立变量 s 是复数，量纲为 t^{-1} ，称为复频率。 s 的实数部分用 σ 表示，虚数部分用 ω 表示；于是

$$s = \sigma + j\omega \quad (5-4)$$

1) 以法国数学家皮埃尔·西蒙·拉普拉斯(1749—1827)命名。

复频率 s 的值可以与称为 s 平面 (图5—1) 的复数平面中的点对应。 s 平面在拉普拉斯变换的理论和应用中是一种重要的图形工具。

$\omega = \text{Im } s$

5—1A 收敛性和唯一性

通常, 式 (5—1) 的积分只对于 s 某些值收敛, 即在 s 平面的某一区域上收敛。式 (5—1) 的积分收敛的那些 s 值构成拉普拉斯变换 $E(s)$ 的收敛域。

例5—2 求函数

$$e_1(t) = e^{pt}u(t)$$

的拉普拉斯变换及其收敛域, 式中 p 是实数。

解 由式 (5—1)

图5—1 s 平面, 点 (σ_0, ω_0) 表示复频

$$E_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{pt}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-p)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s-p} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-p)t} - 1 \right\}$$

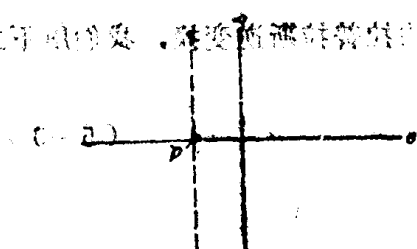
仅当 $\text{Re}(s-p) > 0$, 即 $\text{Re } s > p$ 时极限存在, 此时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-p)t} = 0, \text{Re } s > p$$

而

$$E_1(s) = \frac{1}{s-p}$$

图5—2表示出函数 $e_1(t)$ 的曲线和 $L\{e_1(t)\} = E_1(s)$ 的收敛域。



$e_1(t) = e^{pt}u(t)$

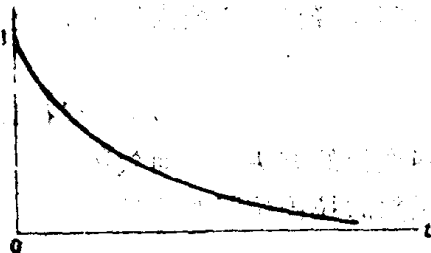


图5—2函数 $e_1(t) = e^{pt}u(t)$ 的曲线及 $L\{e_1(t)\}$ 的收敛域 $\text{Re } s > p$ 。

例5—3 求函数 $e_2(t) = -e^{pt}u(-t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域, 式中 p 是实数。

解 由式 (5—1)

$$E_2(s) = \int_{-\infty}^0 -e^{pt}e^{-st}dt = \frac{1}{s-p} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(s-p)t} \right)$$

仅当 $\text{Re}(s-p) < 0$ 即 $\text{Re } s < p$ 时, 极限才存在。

此时

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(s-p)t} = 0, \text{Re } s < p$$

而

$$E_2(s) = \frac{1}{s-p}$$

图5—3表明 $e_2(t)$ 的曲线和 $L\{e_2(t)\} = E_2(s)$ 的收敛域。

$L\{e_2(t)\}$ 的收敛域 $\text{Res} < p$

例 5—2和5—3表明，函数

$$e_1(t) = e^{pt}u(t)$$

$$e_2(t) = -e^{pt}u(-t)$$

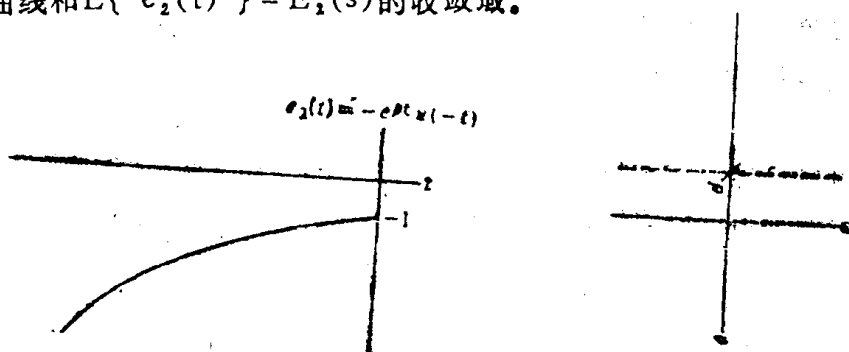


图5—3 函数 $e_2(t) = -e^{pt}u(-t)$ 的曲线和 $L\{e_2(t)\}$ 的收敛域 $\text{Res} < p$

具有相同的拉普拉斯变换，由下式给出

$$E(s) = \frac{1}{s-p}$$

这说明一个事实，通常当一个拉普拉斯变换要具有唯一的逆变换，其收敛域必须确定。例如，如果上述 $E(s)$ 的收敛域规定为 $\text{Res} > 0$ ，则

$$L^{-1}\{E(s)\} = e^{pt}u(t)$$

反之，如果收敛域规定为 $\text{Res} < 0$ ，则

$$L^{-1}\{E(s)\} = -e^{pt}u(-t)$$

因此，通常拉普拉斯变换包括 s 的函数及其收敛域；然而，在大多数实际应用中，对拉普拉斯变换规定收敛域可以用对相应的逆变换 $e(t)$ 规定一个更方便的等效条件来代替。我们将在下面叙述这个条件。

5—1B 右边拉普拉斯逆变换

一个时间 t 的右边函数是指仅在大于某固定时刻 t_0 的 t 时非零的函数，如图5—4a所示。时间的左边函数是指仅在小于某固定时刻 t_0 的 t 时非零的函数（图5—4b）。时间的双边函数则既不是右边的也不是左边的函数。一个具有有限持续时间的函数，如矩形脉冲既是右边的也是左边的函数。

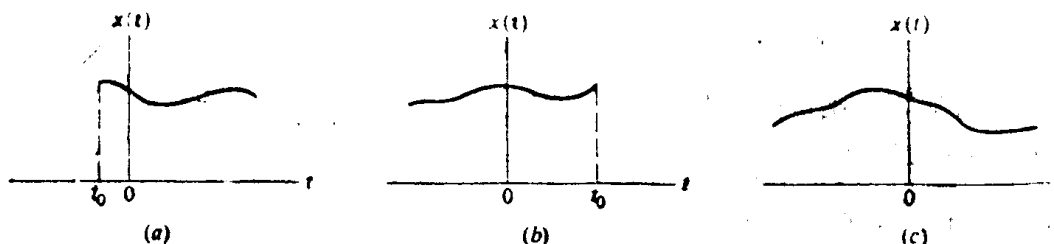


图5—4 (a)右边函数，(b)左边函数，和(c)双边函数定义的图解。

由图5—2知，规定右边区域 $\text{Res} > p$ 为 $E(s) = 1/(s-p)$ 的收敛域相当于规定右边函数

$e_1(t) = e^{pt}u(t)$ 为 $E(s)$ 的拉普拉斯逆变换。由图5—3知, 规定左边区域 $\text{Res} < p$ 为 $E(s)$ 的收敛域相当于规定左边函数 $e_2(t) = -e^{pt}u(-t)$ 为 $E(s)$ 的拉普拉斯逆变换。总的说来, 逆拉普拉斯变换可以是右的、左的或双边的函数, 取决于变换的形式和相应的收敛域。可以证明, 右边逆变换是唯一的 (见 Lepage, PP. 318—322)。因此, 当逆变换已知是右边的, 对变换就不必再规定其收敛域了。例如, 对于右边的输入信号, 一个可实现系统的输出信号的逆变换就是这样。在本章的其余部分, 除一处例外 (见5—3D节), 我们的讨论都限于右边信号。我们采用这样的约定, $L^{-1}\{E(s)\}$ 表示 $E(s)$ 的右边拉普拉斯变换; 例如

$$L\left\{\frac{1}{s-p}\right\} = e^{pt}u(t)$$

式中必须考虑到变换 $E(s)$ 的右边逆变换之外的情况, 我们将变换以及它的收敛域都放在算子 L^{-1} 之内; 例如

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p}, \text{Res} < p\right\} = -e^{pt}u(-t)$$

用式 (5—1), 我们可以制成一个拉普拉斯变换表, 由于右边拉普拉斯逆变换是唯一的, 我们可以用表求得右边拉普拉斯逆变换。表 D—1 包含了本书所需的全部拉普拉斯变换对。

5—1C 与傅里叶变换的关系

在定义式 (5—1) 中, 令 $s = \sigma + j\omega$, 函数 $e(t)$ 的拉普拉斯变换由下式给出:

$$L\{e(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

将此关系式与 $e(t)$ 的傅里叶变换定义式 (4—19) 比较, 表明

$$L\{e(t)\} = F\{e(t)e^{-\sigma t}\} \quad (5-5a)$$

这一关系式对于 $L\{e(t)\}$ 的收敛域中 $s = \sigma + j\omega$ 的所有值均成立。如果收敛域包括直线 $\sigma = 0$ ($s = j\omega$), 这样

$$F\{e(t)\} = L\{e(t)\}|_{\sigma=0} = L\{e(t)\}|_{s=j\omega} \quad (5-5b)$$

即如果 $e(t)$ 的拉普拉斯变换的收敛域包括 ω 轴时, $e(t)$ 的傅里叶变换就是 $e(t)$ 的拉普拉斯变换中用 $j\omega$ 置换 s , 而 $e(t)$ 的拉普拉斯变换就是 $e(t)$ 的傅里叶变换用 s 置换 $j\omega$ 。

例5—4 考察函数 $e(t) = e^{pt}u(t)$, 式中 p 是实数。由例5—2, $e(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$L\{e(t)\} = L\{e^{pt}u(t)\} = \frac{1}{s-p}$$

相应的收敛域是 $\text{Res} > p$ ($\sigma > p$)。对于 $p < 0$, 收敛域包括 ω 轴 (图5—2), 因此

$$F\{e(t)\} = L\{e(t)\}|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega - p}$$

对于 $p \geq 0$, 收敛域不包括 ω 轴 (图5—3), 因此,

$$F\{e(t)\} \neq L\{e(t)\}|_{s=j\omega}$$

例如, 对于 $p = 0$, $e(t) = u(t)$, 见表 D—1

$$L\{e(t)\} = \frac{1}{s}$$

而 (严格地)

$$F\{e(t)\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

函数 $e(t)$ 的傅里叶变换是一个以虚变量 $j\omega$ 为变量或（等效地）以实变量 ω 为变量的复函数。可在频率（ ω 或 f ）轴上画出傅里叶变换的幅度与角度的曲线。

$e(t)$ 的拉普拉斯变换是复变量 s 的复函数。可在 s 平面上画出拉普拉斯变换的幅度与其角度的平面图形。当一个变换 $E(s)$ 的收敛域包括 ω 轴，于是（从式5—5）

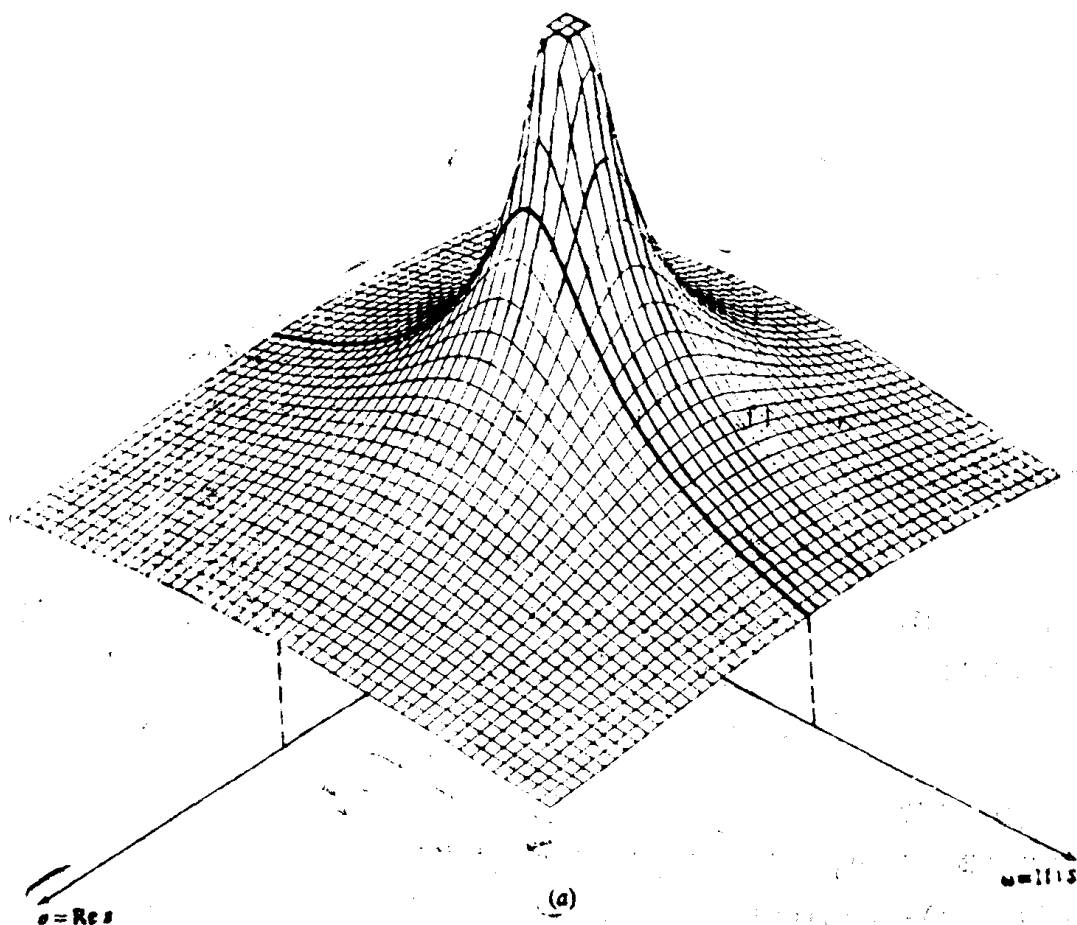
$$F\{e(t)\} = L\{e(t)\} \big|_{s=j\omega}$$

这意味着可以沿着 ω 轴分别地将 $|L\{e(t)\}|$ 和 $\angle L\{e(t)\}$ 切成薄片以求得 $|F\{e(t)\}|$ 和 $\angle F\{e(t)\}$ 的曲线。图5—5给出了函数 $e(t) = e^{pt}u(t)$ 的这种图形，式中 p 是实数且为负。 $e(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$L\{e(t)\} = \frac{1}{s-p}$$

这里对应的收敛域是 $\text{Re } s > p$ （ $\sigma > 0$ ）。由于 $p < 0$ ，收敛域包括 ω 轴（此处 $\sigma = 0$ ）。由此得出

$$F\{e(t)\} = L\{e(t)\} \big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega - p}$$



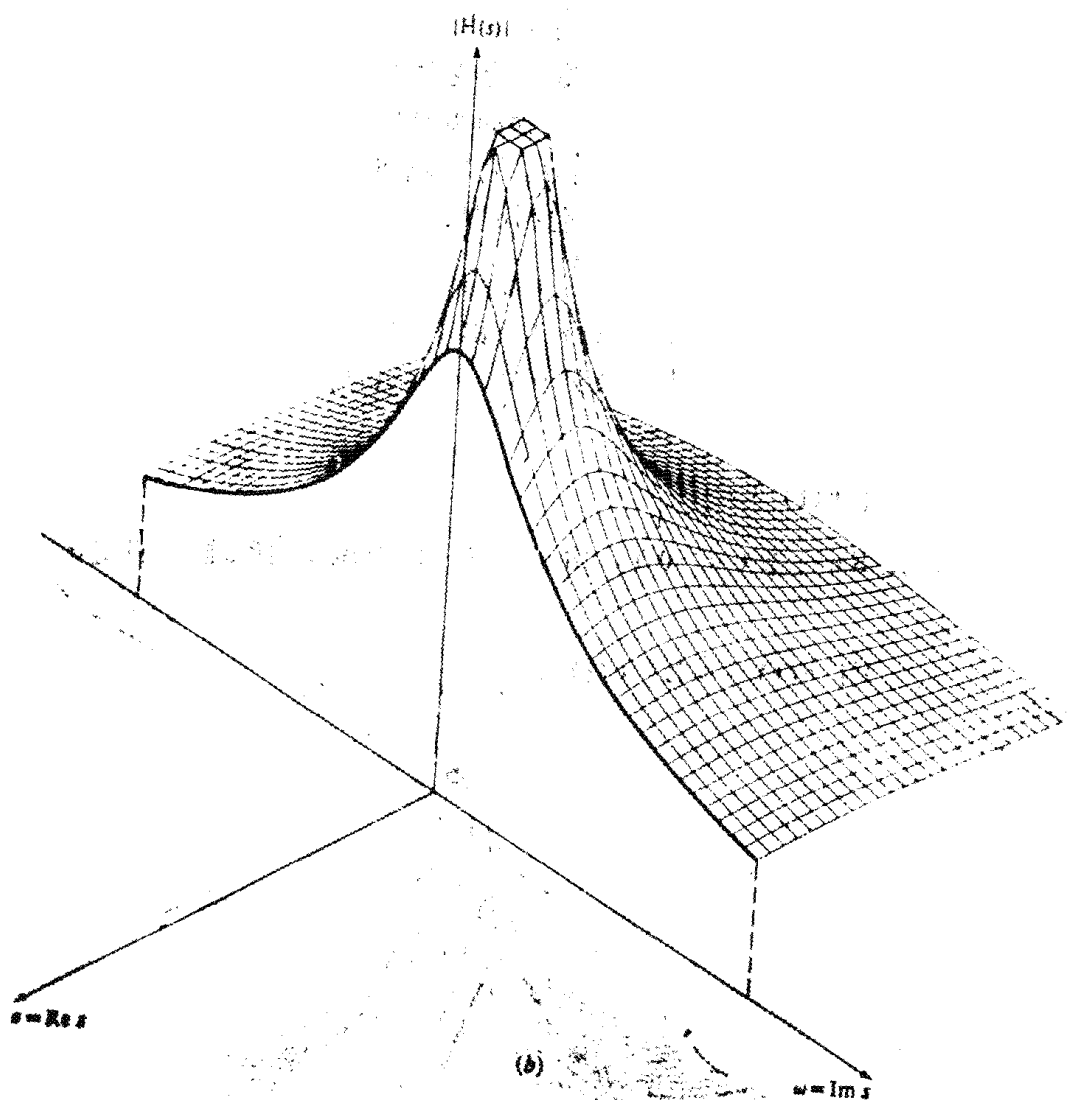


图5-5 $|L\{e(t)\}|$ 与 $\sigma = \text{Re } s$ 和 $\omega = \text{Im } s$ 的关系曲线, 其中 $e(t) = e^{pt}u(t)$

图5-5a 表明由下式

$$|L\{e(t)\}| = \frac{1}{|s-p|} = \frac{1}{|\sigma + j\omega - p|} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma-p)^2 + \omega^2}}$$

定义的平面图形。图5-5b表明图5-5a左半平面。由于 $L\{e(t)\}$ 的收敛域包括 ω 轴, 图5-5b的曲面的正面 (对于 $\sigma=0$) 是下式的图形。

$$|F\{e(t)\}| = \frac{1}{\sqrt{p^2 + \omega^2}}$$

5-1D 线性

拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换是线性运算。这意味着

$$L\{a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t) + \dots\} = a_1 L\{e_1(t)\} + a_2 L\{e_2(t)\} + \dots \quad (5-6)$$

$$L^{-1}\{a_1 E_1(s) + a_2 E_2(s) + \dots\} = a_1 L^{-1}\{E_1(s)\} + a_2 L^{-1}\{E_2(s)\} + \dots \quad (5-7)$$

F积分是一种线性运算, 式(5-6)是从式(5-1)得出的。由于线性运算的逆是线性运

算, 式(5-7)是从式(5-6)得出的。

例5-5 求信号

$$x(t) = a \delta(t) + x_0 u(t)$$

的拉普拉斯变换

解 从式(5-6)

$$L\{x(t)\} = aL\{\delta(t)\} + x_0L\{u(t)\}$$

从表D-1, $L\{\delta(t)\} = 1$ 和 $L\{u(t)\} = 1/s$, 于是

$$L\{x(t)\} = X(s) = a + x_0 \frac{1}{s}$$

例5-6 求 $X(s) = \frac{x_1}{s-p_1} + \frac{x_2}{s-p_2}$

的拉普拉斯逆变换

解 从式(5-7)

$$L^{-1}\{X(s)\} = x_1 L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_1}\right\} + x_2 L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_2}\right\}$$

从表D-1, $L^{-1}\{1/(s-p)\} = e^{pt}u(t)$, 于是

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = (x_1 e^{p_1 t} + x_2 e^{p_2 t})u(t)$$

例5-7 用欧拉恒等式和关系式

$$L\{e^{pt}u(t)\} = \frac{1}{s-p}$$

求信号 $x(t) = A(\cos\omega_0 t)u(t)$ 的拉普拉斯变换。

解 用欧拉恒等式 $2\cos\alpha \equiv e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}$ 得

$$x(t) = \frac{1}{2} A e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} A e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

用式(5-7) ($P = \pm j\omega_0$) 和上述关系式得

$$X(s) = L\{x(t)\} = \frac{A/2}{s-j\omega_0} + \frac{A/2}{s+j\omega_0} = \frac{As}{s^2 + \omega_0^2}$$

5-1E 运算性质

表D-2给出拉普拉斯变换最重要的运算性质。只要用 s 替换 $j\omega$, 它们与对应的傅里叶变换的运算性质是完全一样的。下面我们证明拉普拉斯变换的积分性质。拉普拉斯变换的其它性质实质上与所对应的傅里叶变换的性质完全相同, 其证明留作练习。

我们要证明

$$L\left\{\int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha\right\} = \frac{1}{s} L\{e(t)\} \quad (5-8)$$

根据拉普拉斯变换的定义(5-1)

$$L\left\{\int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha e^{-st} dt$$

部积分法¹⁾得

$$L\left\{\int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha\right\} = -\frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-st} \int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha \right] + \frac{1}{s} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[e^{-st} \int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha \right] \\ + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-st} dt$$

因为对任何有意义的函数 $e(t)$ 均存在一个收敛域, 因此

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{-st} \int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha \right] = 0$$

所以等式右边第一项可以略去。由于我们假定 $e(t)$ 是右边的, 故第二项也可以省略。这意味着存在有限值 t 使得

$$\int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha = 0$$

仅剩下一项需要处理

$$L\left\{\int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha\right\} = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-st} dt$$

等式右边的积分是 $e(t)$ 的拉普拉斯变换。等式(5—8)得证。

例5—8 在本例中, 我们利用积分性质求函数 $e(t) = tu(t)$ 的拉普拉斯变换。我们注意到

$$tu(t) = \int_{-\infty}^t u(\alpha) d\alpha$$

积分性质式(5—8)给出

$$L\{tu(t)\} = \frac{1}{s} L\{u(t)\}$$

从表D—1, $L\{u(t)\} = 1/s$, 于是

$$L\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$$

以下例题说明拉普拉斯变换的其它性质。

例5—9 求 $f(t) = tu(t - t_0)$ 的拉普拉斯变换。

解 我们可以写为

$$f(t) = (t - t_0)u(t - t_0) + t_0 u(t - t_0) = e(t - t_0)$$

式中 $e(t) = tu(t) + t_0 u(t)$

从表D—1 $L\{tu(t)\} = 1/s^2$ 和 $L\{u(t)\} = 1/s$ 。

1) 式中我们利用 $\int u dv = uv - \int v du$ $\begin{cases} u = \int_{-\infty}^t e(\alpha) d\alpha \\ dv = e^{-st} dt \end{cases}$

(参阅 Thomas and Finney PP. 363—368),

用拉普拉斯变换的线性性质得

$$L\{e(t)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{t_0}{s} = \frac{t_0 s + 1}{s^2}$$

用延迟性质 $L\{e(t-t_0)\} = e^{-st_0}L\{e(t)\}$ 给出

$$L\{f(t)\} = L\{e(t-t_0)\} = \frac{e^{-st_0}(t_0 s + 1)}{s^2}$$

例5—10 用拉普拉斯变换的平移性质求

$$f(t) = e^{pt}\cos(\omega_0 t - \theta)u(t)$$

解 从平移性质, $L\{e(t)e^{pt}\} = E(s-p)$, 式中 $E(s) = L\{e(t)\}$, 于是

$$L\{f(t)\} = L\{\cos(\omega_0 t - \theta)u(t)\} \Big|_{s \rightarrow s-p}$$

从表D—1

$$L\{\cos(\omega_0 t - \theta)u(t)\} = \frac{s\cos\theta + \omega_0\sin\theta}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\text{因此 } L\{f(t)\} = \frac{(s-p)\cos\theta + \omega_0\sin\theta}{(s-p)^2 + \omega_0^2}$$

5—2 应用于线性时不变系统

本节, 我们介绍怎样用拉普拉斯变换求线性时不变系统的输出。其步骤与4—3节中叙述过的傅里叶变换基本相同, 只需用 s 替换 $j\omega$ 作为变换变量。

5—2A 系统函数

一个线性时不变系统对于输入 $x(t)$ 的输出 $y(t)$ 由下式给出

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$

式中 $h(t)$ 是系统的冲激响应。取这个方程式的拉普拉斯变换得 (见表D—2)

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad \text{式中 } Y(s) = L\{y(t)\} \quad (5-9)$$

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

和

$$H(s) = L\{h(t)\} \quad (5-10)$$

注意式(5—9)和用傅里叶变换的对应关系式, $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ 除了以 s 替换 $j\omega$ 以外是完全一样的。由式(5—10)给出的函数称为冲激响应为 $h(t)$ 系统的系统函数。一个系统的系统函数 $H(s)$ 和传输函数 $H(j\omega)$ 具有类似的结构。的确, 在大多数实际应用中, 正如符号所暗示的一样, 系统的传递函数 $H(j\omega)$ 只要用 s 替换 $j\omega$ 就得到该系统的系统函数 $H(s)$ 。此外, 在大部分实际应用中, 如符号所暗示一个信号的傅里叶变换(频谱密度)用 s 代替 $j\omega$ 就得到该信号的拉普拉斯变换。然而也有例外, 如上所述, 仅当一个函数的拉普拉斯变换的收敛域包括 ω 轴在内时, 该函数的傅里叶变换在以 $j\omega$ 代替 s 的情况下才等于这个函数的拉普拉斯变换。因此, 虽然我们对传输函数和系统函数两者都使用同一符号(H), 有这样的情况, 即系统的传输函数 $H(j\omega)$ 用在 $j\omega$ 代替 s 时不等于这个系统的系统函数 $H(s)$ 。同样的论述适用于一个信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $x(s)$ 和傅里叶变换 $x(j\omega)$ 。除非我们能证明拉普拉斯变换的收敛域包括 ω 轴, 为慎重起见我们要把一个函数的拉普拉斯变换和该函数的傅里叶变换看作不同的函数。

对于输入 $x(t)$ ，用式 (5—9) 求一个线性时不变系统输出的步骤如下：

1. 利用表 D—1 或式 (5—1) 求输入 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $x(s)$ 。
2. 利用式 (5—9) 和表 D—1 或式 (5—1) 求系统的系统函数 $H(s)$ 。
3. 取乘积 $H(s)x(s)$ 的拉普拉斯逆变换求输出。即

$$y(t) = L^{-1}\{H(s)x(s)\}$$

下面的例题说明上述步骤。

例 5—11 求具有冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

的线性时不变系统的输出。输入为 $x(t) = x_0 u(t)$

解：由表 D—1，输入的拉普拉斯变换 $x(s)$ 和系统函数 $H(s)$ (冲激响应的拉普拉斯变换) 为

$$X(s) = x_0/s$$

$$H(s) = \frac{1/\tau}{s+1/\tau}$$

根据式 (5—9)，输出 $y(t)$ 的拉普拉斯变换 $Y(s)$ 为

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{x_0/\tau}{s(s+1/\tau)}$$

表 D—1 给出

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

式 (5—10) 仅给出了求由冲激响应描述系统的系统函数最直接的方法。实际中所分析的系统经常是用微分方程或方框图描述而不是用冲激响应描述。在 5—2B 和 5—2C 节中，将说明如何求由微分方程或方框图描述系统的系统函数。

5—2B 用微分方程描述的系统

由微分方程

$$\frac{d^m y}{dt^m} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x \quad (5-11)$$

表示系统的系统函数可以用微分性质求得

$$L\left\{\frac{d^m e(t)}{dt^m}\right\} = s^m L\{e(t)\} = s^m E(s) \quad (5-12)$$

取式 (5—11) 的拉普拉斯变换并利用式 (5—12) 得

$$s^m Y(s) + a_{n-1} s^{m-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_0 X(s)$$

式中 $X(s) = L\{x(t)\}$ 及 $Y(s) = L\{y(t)\}$ 。对 $Y(s)$ 求解得

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^m + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} X(s) \quad (5-13)$$

比较此式与式 (5—9) 表明由式 (5—11) 描述的系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^m + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (5-14)$$

例 5—12 某系统的输入 $x(t)$ 和对应的输出 $y(t)$ 的关系由下列微分方程表示