高等农業学校教学参考書

高等数学

余介石主編

齐植朵編

高等教育出版社

高等农業学校教学参考書

高等数学

余介石主編
齐植朵編

高等教育出版社

本書是根据前高教部編訂的高等农林院校七十学时适用的高等数学教学大綱編写的，于1956年編写完竣，經过北京农业大学，北京农业机械化学院等几个院校的两度試用修改，又經过評閱人程民德、陈藎民二教授审閱校訂才出版的。为了再提高書的質量，希望讀者无論是对于內容方面，或是講的方法方面提出宝貴意見——例如介紹积分概念时，就可有不同的講法——供再版时修正的参考。

本書可作为高等农林院校70学时适用的教科書或教学参考書。

高　等　数　学

余介石主編

齐植朵編

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·518　開本850×1168 $1/32$　印張6 $5/16$

字數164,000　印數0001—9,000　定價(8)¥0.75

1959年1月第1版　1959年1月北京第1次印刷

目　录

第二部分 数学分析

緒　論

§0.1. 什么是数学、数学的起源与發展

要了解什么是数学，首先讓我們引用恩格斯的一句話。他說："純数学是以現实世界的空間的形式和数量的关系……为对象的。"[1] 他对于数学本質的論述，是从批判杜林的荒謬观点，特别是所謂数学是研究同經驗无关的"理性"的創造物这一錯誤見解开始的。他着重指出了数学是反映現实世界的、是产生于人們的实际需要的。毛主席說过："世界上的知識只有两門，一門叫做生产斗爭知識，一門叫做阶級斗爭知識。自然科学、社会科学，就是这两門知識的結晶……。"[2] 数学当然不能例外，它的發生和發展，离开生产活动，是不能得到的。"周髀算經"是我国最古的算書，曾提到大禹王因治水需要数学知識。其次是"九章算术"，这書集古代数学知識的大成，書中所說，完全是田亩、倉庫、河堤、土方、生产品交換計算的材料，无一不是涉及生产活动的。在公元初年，中国和印度先后發生了計算数学的趋向，这是因为經济生活的需要，特别由于农业对天文学与历法的要求而發生的。这些历史事实，明白地指出数学知識起源于生产的要求，数学能解决生产上的問題，而生产实踐却丰富了数学的內容实質。

数学导源于生产活动，只是發展过程的第一阶段。毛主席指出："認識开始于經驗——这就是認識論的唯物論……，認識的感性阶段有待于發展到理性阶段——这就是認識論的辯証法。"他又

① "反杜林論"，1956 年中譯本 87 頁.

② "毛澤东选集"，1955 年三卷，817—818.

作出結論說："实践、認識、再实践、再認識，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和認識之每一循环的內容，都比較地进到了高一級的程度。这就是辯証唯物論的全部認識論，这就是辯証唯物論的知行統一觀。"[1] 从数学的發展来看，确实是先从事物的現象抽象出来，提高到一般原理，再应用到具体問題上面，如是循环往复發展起来的。

总的說来，在十七世紀前，算术、代数、几何、三角的內容，大体上都完备了，这些数学可以叫做初等数学。

在十七世紀以后，数学引入变量，这是由于当时社会生产力的發展，数学研究的对象轉移到变量間的关系。就是不但研究物質的个别問題，而且对于它們之間的变化和發展过程也要加以研究。变量概念是法国数学家笛卡兒所引进，他建立了坐标概念，并且利用坐标法描述了变量間的依从关系。恩格斯說，"笛卡兒的变数是数学中的轉折点。" 因此运动和辯証法便进入了数学，因此微分和积分也就立刻成为必要的了，而它們也就立刻产生出来……。"[2]

从十九世紀后，工业和农业生产的机械化，各門科学都有很大的进展，对于数学更提出了新的要求，需要数学有更高度的抽象与概括，从而在生产活动中，才能有广泛的应用。正如列宁所指出的："一切科学的（正确的、郑重的、非膳說的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。"[3] 我們不容許唯心論者把"抽象"歪曲成人心的自由創造。很明显地，要先有形象，然后能"抽"出它們的內在本質。恩格斯曾一再强調了概念的客观实在性，并且明确地提出数学的对象"是非常現实的資料…… 表現于非常抽象的形式

① "毛澤東选集"一卷，1955 年 279、285 頁。
② "自然辯証法"，1955 年中譯本 217 頁。
③ "黑格尔'邏輯学'一書摘要"。

之中。”[①]这些对象，完全不是空洞的幻想，而是有客观的物質根源，而抽象的概念，就是这些現实的朴素的形象与数量，經过人脑加工后的产品。因而就能更深刻、更正确、更全面地反映自然；也就有更广泛、更深远的应用。正因数学是从客观实踐中来，才能回到客观实踐中去，而受得起后者的考驗。苏联科学院院長涅司米揚諾夫說：“很难找一个科学部門与技术部門，在其中物理学和数学，不生重要作用的。”当前在我国工农业大跃进的形势下，科学技术革命已在萌芽，作为社会主义建設的干部，应当掌握数学这門基础科学来更好地为生产服务。因而在学習以前就应当对这門科学有正确的認識。

§0.2. 初等数学和高等数学

我們过去学的初等数学，有两个特点：一点，它所討論的問題是以常量为对象，例如解方程、解作圖題，都是求一个具体的数量。另一点，它所运用的方法缺少概括性，往往是个别的、零碎的，而不是一般的。如三角形和圆形面积的求法不能通用，也不能用来求其他的面积，且代数中的方法与几何方法，基本上也互不相通。在初等数学中也接触到了变量的問題，如代数里的变量和函数，几何里的动点軌迹；三角里三角函数的周期性变化情况等，这些也就为学習高等数学打下基础。

現在我們学習的高等数学，它的內容主要是解析几何和微积分，它們更深入且全面的研究了空間形式和数量关系。其中也有两个特点。一点，它是以变量为对象，例如一个运动問題，就得用路程和时間的变化关系，来說明速度的变化問題。另一点，它是运用了一般性、全面性的方法，例如在解析几何中，始終是建立几何

① “反杜林論”，37—38 頁。

軌迹和代数方程的关系，許多几何軌迹，都可用一般的方法，建立代数方程表示它。微积分中，是从无穷小变量为主而建立一系列的基本概念和一般的运算方法，例如对求面积問題就建立了一般的計算方法，应用这个一般的方法，不仅能求出在初等数学中的簡單几何圖形的面积，而更能求出許多复杂的几何圖形的面积。从初等数学进到高等数学是因为社会生产力發展，其他自然科学和技术科学上的实际需要，要求数学必須掌握着在变化过程中数量方面的相互关系。因为高等数学是以变量为主了，所以研究高等数学要用唯物辯証的思維規律来进行研究。

在进入高等数学的学習阶段，应該注意：首先要徹底了解基本概念的意义。听講固然是主要环节，課后复習也很重要，应該逐字逐句的看清楚書本中的內容。这样，才能眞正的掌握了应該了解的理論知識。其次，要应用已掌握的理論知識来解習題。經过这样的巩固，将来才能进一步解决專业中的問題。在学習中还应注意独立思考，不要不求甚解，急于求助于人。因为学習高等数学不但为了将来的应用，还应該借此培养辯証邏輯的思維能力，借以达到具备分析事物的本領，所以在学習中不可粗疏，不可急燥，必須經过辛勤的劳动，細心的体会，才能变成自己的学問，才能把自己的学習直接为祖国的社会主义建設服务。

§0.3. 中国数学的成就

中国劳动人民对于数学是擅長的，从古代就有了丰富的数学知識，为各种生产而服务着。在第一世紀就完成了一部“九章算术”，內容包括了面积、体积的計算方法、比例、百分法的运算、一次联立方程、二次方程正根的計算以及正負量的算法和意义等等。七世紀有了三次方程解法的提出，十三世紀秦九韶的“天元术”，可以求三次以至一般的高次方程的近似实根，較西方数学家的同样

方法早六百多年。无疑的，这都是中国数学家的偉大成就。

在几何方面，如"周髀算經"中的勾股定理，九章算术中就引用了。在三世紀时刘徽就用內接正 192 边形，算出圓周率 π 的近似値是 $\frac{157}{50}$，到五世紀时祖冲之就确定了 π 在 3.1415926 和 3.1415927 之間，并且用 $\frac{355}{113}$ 来近似地表达它。在解决几何的实用問題方面，刘徽的"海島算經"是値得提出的，他利用了相似三角形的比例性質解决了一些不可接近物的高度和距离的問題。

在計算技术上，中国更有杰出的貢献。九九表是古筹算的基础，至迟在齐桓公时（公元前 685—643）已完备。近似数的四舍五入，在二世紀时已明确規定，且以盈（有余）亏（不足）表达精密程度。在計算工具方面，除筹算外，算盘的創造也是很早，日本应用数学家还有認为計算机的起源就是中国的算盘的。可見計算数学确是中国数学的特色。

中古近古两个时期中的一千多年，是中国数学的黄金时代，明初起开始衰落，在封建制度保持不变的情况下，这是不可幸免的厄运，因此，从这时期以后，反落后于西方。只有劳动人民当家作主以后，中国数学家才眞正重新走上創造性的發展道路。在毛主席提出了向科学进軍的号召后，全国数学家提出了在十二年內赶上世界先进水平的保証，开始有計划地向自然科学和技术科学的各方面前进。几个五年計划的空前大建設与农业生产大跃进，使生产力得到空前的發展，还有苏联学术界对我們的无私援助，都为科学进軍开辟了广闊无边的大道。我們相信，在党和政府的大力支持下，在全国数学工作者的不断努力下，完全有可能在十二年內使我国的数学科学水平赶上世界先进水平，从而对生产建設作出更大的貢献。

第一部分　平面解析几何

第一章　直角坐标

在緒論中，我們提到高等数学对于形和数作了比較深入而全面的研究。解析几何首先給出形和数的連系方法，它首先把簡單的代数对象——数，与最基本的几何圖形——点，連系起来，也就是用数(一个或一組)来决定出一个点的位置。用数来确定点的位置的方法，叫做坐标法。坐标法不只一种，我們只講一种最簡單而且常用的直角坐标法，以及它在簡易問題上的一些应用。

§1.1. 直綫上点的坐标

在平面上取任一直綫，且在这直綫上取任意二点 A 和 B，我們在中学的几何里，已經知道这两点 A 和 B 之間的部分，叫做**綫段**，用記号 AB 或 BA 表示。选定一个适当的綫段 u 为單位，来度量 AB 时，得到的比值，就是綫段 AB 的**長度**，也就是二点 A 和 B 間的距离，这是一个正的数，这个数同样用記号 AB 来表示。在許多实际問題中，不但綫段的長度有意义，它的方向也有意义，如在物理学中利用一个綫段的長短和方向，表示一个力的大小和方向。这样的綫段也是局限于两个点之間，而且是以其中之一点做起点，另一点做为終点的，这样的綫段我們叫做**有向綫段**。如点 A 是起点，点 B 是終点，就用 $\overline{AB}$ 来記这有向綫段，必須指出，有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$，由于它們的方向相反，是不相同的。

每一条直綫都有两个方向，选其一是正向时，另一方向就是負方向。在圖上規定用箭头表示正向。直綫在水平位置时，通常将

从左到右的方向当作正向，如圖 1.1。在这直綫上取一固定点 O，作为决定直綫上其他各点位置的标准，这点叫做**原点**。再选一适当的綫段 u 作为度量綫段的單位。有了这三个条件——方向、原点、單位——的直綫，我們叫做**坐标軸**。在軸上的任一有向綫段，如方向与軸同向，就在它的長度上加"＋"号，反向时長度上加"－"号。这样得到一个正或負的数，叫做**有向綫段的数值**。两点重合时，可認为是数值为零的有向綫段。有向綫段 $\overline{AB}$ 的数值，同样用記号 $\overline{AB}$ 来表示。以后在算式中的 $\overline{AB}$，即表示这有向綫段的数值。应当注意，二有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$，長度相同，而方向相反，所以它們的数值，(絕对值)相等而符号相异，即

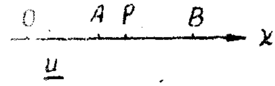

圖 1.1

$$\overline{AB}=-\overline{BA}.$$

若有向綫段 $\overline{OP}$ 的数值是 x，可写成 $\overline{OP}=x$。那么，点 P 就确定了这个唯一的正或負（或 0）的数 x，而这个数 x，我們就叫做**点 P 的坐标**。这就是說，坐标軸上任意一点 P，决定唯一的有向綫段 $\overline{OP}$ 与它的数值 x，也就是点 P 的位置唯一的决定了点 P 的坐标。反之，給定一个正或負(或 0)的数 x 时，可以在坐标軸上确定一个有向綫段 $\overline{OP}=x$，因而得到唯一的点 P：如 x 为正数，P 在原点 O 之右；x 为負数，P 在原点之左；x 为零，P 与原点重合。因此，一点的坐标，唯一的决定了它的位置。原点与零对应，直綫上的其他点則与正或負的数一一对应着，这个基本概念，必須熟記。我們把坐标是 x 的点 P 写成 $P(x)$，且常簡称为点 x。

如果在坐标軸上任意取二点 A 与 B 如圖 1.2。設它們的坐标是 a 与 b，即 $\overline{OA}=a$，$\overline{OB}=b$，那么由圖 1.2 三种不同的情况中可得关系式

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB},$$
$$\overline{AO}+\overline{OB}=\overline{AB},$$
$$\overline{AB}+\overline{BO}=\overline{AO}.$$

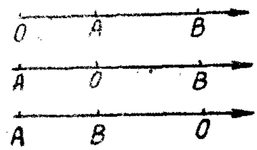

圖 1.2

因为 $\overline{AO}=-\overline{OA}$, $\overline{BO}=-\overline{OB}$，所以代入后二式即得統一結果

$$\boxed{\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}=b-a.} \qquad (1.1)$$

容易看出，若 B 在 A 左，上式仍旧成立，讀者可自己思考。

这就是說：坐标軸上任意有向綫段的数值等于它終点坐标减去始点的坐标。这个公式(1.1)对于两点 A 与 B 在坐标軸上任何位置都能成立。

§1.2. 平面上点的直角坐标

現在我們来看平面上的任一点如何与数連系。在平面上作两条互相垂直的直綫。在一般情形，一条是水平的，一条是鉛垂的。我們規定水平直綫从左向右为正向，鉛垂直綫从下向上为正向。取二直綫的交点为原点，且选出适当的綫段做單位[①](圖 1.3)。这样的二直綫叫做坐标軸，水平位置的叫做**横軸**或 **x 軸**，鉛垂位置的叫做**縱軸**或 **y 軸**。有了这两条互相垂直的坐标軸，平面上点的位置就可用两个数来确定了。确定的方法是这样的：取平面上任意一点 M，由点 M 作二坐标軸 Ox 和 Oy 的垂綫，如圖 1.3。根据平面几何的定理，由一点作到一直綫的垂綫只有一条，

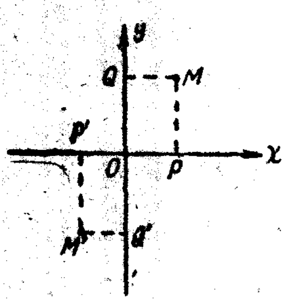

圖 1.3

① 二坐标軸上不一定用同样的綫段做單位（参看后文 §5.3）；但在本書的論証里，沒有附加說明时，都假定用同一綫段作單位的。

因而由点M至x軸的垂綫只有一条PM，P是垂足，至y軸的垂綫只有一条QM，Q是垂足。二垂足P和Q在x和y軸上的位置是用唯一的数来表示的，若$\overline{OP}=x$, $\overline{OQ}=y$, 那么，点M确定了唯一的一組数x与y，这两个数由点M的位置唯一的决定。反过来，若已知一組数(x, y)，可以在两坐标軸上，定出P与Q，使$\overline{OP}=x$, $\overline{OQ}=y$；再过P与Q引两軸的垂綫，就能在平面上决定出唯一的点M。这样就建立了平面上一点与一組数(x, y)的一一对应的关系。我們就把这两个数x和y叫做点M的坐标，x叫做点M的**横坐标**或簡称**横标**，y叫做点M的**縱坐标**或簡称**縱标**。用符号(x, y)来表示点M的坐标，可写成点$M(x, y)$，或簡称为点(x, y)。符号中一定要把横标x写在左边，縱标y写在右边。这就是用两个数x和y来确定了点M的位置。这个情形，同我們看戏时的坐位，按戏票上的第几排第几号入座是一样的。有一个坐位，就有一組排号；同样，有一組排号，就有一个坐位。这也就是一組数与平面上一个点一一对应的意义。

两个坐标軸Ox和Oy划分平面为四个部分，叫做**象限**，如圖1.4。我們規定在Ox和Oy正向間的部分叫做I象限，从I象限起按反时針向順序的各部分，依次叫做II、III、IV象限。在圖1.4中还表明了在各象限內的所有点，它們的横标x和縱标y的正或負的符号。在x軸上的点，如圖1.3的P或P'，它的縱标y等于零，即写成$(x, 0)$。在y軸上的点，如圖1.3的Q或Q'，它的横标x等于零，即写成$(0, y)$。应当注意，不但是x軸上的点，縱标为0，而且縱标为0的点，一定在x軸上。同理，在y軸上的点，横标为0，而且横标为0的点，一定在y軸上。原点O的

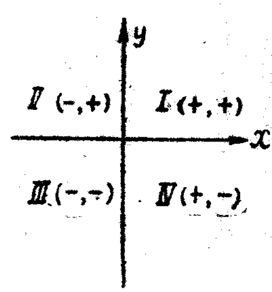

圖 1.4

坐标 x 和 y 都是零，所以原点坐标写成(0, 0)

用一个或一組数确定点的位置的方法，叫做**坐标法**。上面所說的一种坐标体系是利用两条垂直相交的坐标轴来决定平面上点 M 的位置，所以叫做平面上的直角坐标系，也叫做笛卡兒坐标系，这是因为法国大数学家笛卡兒（1596—1650）在 1637 年發表了关于解析几何学的最初的著作。

从上述的坐标法，可以得出两个基本問題的解答。

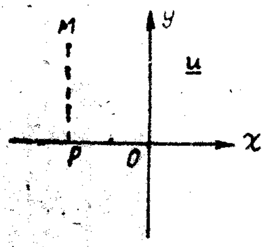

圖 1.5

問題 I. 已知点 M 的位置，求它的坐标。

从已知点 M，引 x 軸的垂綫 $\overline{PM}$，按 x 軸与 y 軸的正向，来定两个有向綫段 $\overline{OP}$ 和 $\overline{PM}$ 的数值，分别用两个数 x 和 y 来表示，即 $\overline{OP}=x$, $\overline{PM}=y$, 这样就得到了点 M 的坐标(x, y)。

例 1. 求圖 1.5 中一已知点 M 的坐标。

[解] 由点 M 作 x 軸的垂綫 $\overline{PM}$，量出从 O 到 P 的有向綫段 $\overline{OP}=-2$，从 P 到 M 的有向綫段 $\overline{PM}=2.5$。所以 $x=-2$, $y=2.5$, 即得点 M 的坐标是 $(-2, 2.5)$。

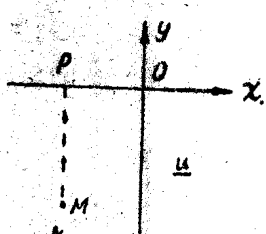

圖 1.6

問題 II. 已知点 M 的坐标 x 和 y，求出点 M 的位置。

在 x 軸上取坐标是 x 的 P 点，即 $\overline{OP}=x$。再由 P 起作 x 軸的垂綫，在这个垂綫上，作有向綫段 $\overline{PM}=y$。这样得到的点 M，就是所求的点，它的坐标是 (x, y)。

例 2. 在已知直角坐标系中按坐标$(-2, -3)$，作出这点的位置。

[解] 在 x 軸上取坐标是 -2 的点 P，即 $\overline{OP}=-2$，再由 P 向下作 x 軸的垂綫。在垂綫上量三單位長，作出有向綫段 $\overline{PM}=-3$，即得点 M，如圖 1.6，M 就是所求点，它的坐标是$(-2, -3)$。