

中学数理化读物

数列 | 求和 | 方法 | 拾缀

杨迅文



中学数理化读物

数列求和方法拾缀

杨 迅 文

福建人民出版社

一九八二年·福州

数列求和方法拾缀

中学数理化课外读物

杨迅文

*

福建人民出版社出版

(福州得贵巷27号)

福建省新华书店发行

福建新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 7.375印张 161千字

1983年3月第1版

1983年3月第1次印刷

印数: 1—7,800

书号: 7173·555 定价: 0.60元

序 言

正值福州一中八十周年校庆之际，校友杨迅文送来了他的书稿《数列求和方法拾缀》，作为他献给母校的一份礼物。

这是一本数学课外读物，谈的是高中数学中最使学生感到兴趣，同时又最让学生觉得头痛的一个课题——数列的求和。

在数列这一源远流长、应用广泛的数学领域里，数列求和是最有特色的研究课题。它不断地吸收数学其他领域里层出不穷的思想、方法和技巧，形成了非常深刻的理论。

我从事中学数学教学工作四十多年，对数列求和这一内容并不陌生，但这一本《数列求和方法拾缀》仍使我感到极大的兴趣。因为，它不但内容丰富，介绍了许多世纪以来数学巨匠们发现的各种巧妙的求和术的精华，特别是介绍了我国古代数学家在数列求和这一领域里的杰出成就，而且结构新巧，不落窠臼，脉络清晰，科学性、趣味性结合得好，能引人入胜。

打开这本书，我们犹如被带进了一座百花荟萃的数学圣坛。在这里，我们会看到，几种性质迥异的数列是怎样被统一在循环数列中，而同一种类型的求和问题，又是怎样可以用各种截然不同的方法加以解决。数学的抽象概括和求异思维的作用，在这里得到了充分的体现。

《数列求和方法拾缀》深入浅出、循序渐进地向读者介绍了几乎包括中学学习阶段能接触到的所有数列类型以及它们和的多种求法。在《练习与思考》里还用精选的习题，给读者留下了承前启后、探索求知的回旋余地，使之能对概念和方法进一步消化吸收、融汇贯通。而“殊途之中有捷径”——这一饱含哲理的真知灼见，更是作者竭力要让读者领悟的真谛。可以说，这本书不仅向读者展示了繁花似锦的种种求和方法，更重要的还是让读者学会怎样去思考和剖析问题，从而提高读者的思维能力和数学素养。

这本书的魅力还在于作者的写作技巧。它不但写得通俗流畅，有浓郁的趣味性，而且前后呼应，各讲自成段落，全书又一气呵成。往往让你读到一段结束，疑是曲终术穷，可作者笔锋一转，又在你面前展现出更加广阔的视野。读者会从这里得到无穷的乐趣。

目前，各种数学课外读物正在增加，但是，其中能够考虑到中学生的心理和需求，既写得系统严密，又不乏生动有趣的为数还不多。《数列求和方法拾缀》一书在这方面就处理得比较好，看过这本书稿的老师们无不赞赏这是一本科学性和趣味性具备的好书。

现在，这本书就要和大家见面了，我谨向高中的学生和自学的青年们推荐这本很有特色的好书。愿它成为你们的良师益友，使你们课外、业余的学习生活更加丰富多彩。

中国数学会理事 林碧英

一九八二年八月

目 录

序言.....	林碧英
引言.....	1
第一讲 各有巧妙不同.....	5
第二讲 串值递推求 $\sum_{k=1}^n k^r$	21
第三讲 r 阶等差数列.....	40
第四讲 殊途之中有捷径.....	56
第五讲 有趣的斐波那契数列.....	76
第六讲 它们都是循环数列.....	96
第七讲 混合数列的错位求和.....	119
第八讲 母函数法和组合数数列.....	134
第九讲 倒数数列和它的混合形式.....	155
第十讲 几种特殊的三角数列.....	176
第十一讲 当 n 无限增大的时候.....	194
结束语.....	216
附录 练习题提示.....	217
后记.....	228

引 言

如果一些分支专题对于
数学的心脏无所贡献，它们
就不会开花结果。

——M·克莱因



在浩瀚的数学海洋中，许多著名的问题就象一颗颗璀璨的珍珠，闪耀着人类智慧的光芒。数列和它的求和问题，就是这些珍珠中的一颗。

数列问题的研究起源很早，我国公元五世纪的《张丘建算经》一书中就有关于“有女善织^①”一类数列问题的记载。此外，古希腊关于“乌龟和阿基里斯赛跑^②”的诡辩问

① 《张丘建算经》：“今有女善织，日益功疾。初日织五尺，今一月，日织九匹三丈。问日益几何？”

② 希腊诡辩派哲学家芝诺（Zeno）曾提出有名的诡辩难题：“假设乌龟和阿基里斯（希腊神话中的善跑的英雄）赛跑，乌龟提前跑了一段，那么，当阿基里斯跑到乌龟起跑点时，乌龟也爬了一段距离，当阿基里斯再跑完这段距离时，乌龟又往前跑了一段，如此直至无穷，所以阿基里斯是永远追不上乌龟的。”

题，古巴比伦关于“十个兄弟分银子①”的分配问题，印度关于“象棋发明人的报酬②”的古老传说，意大利著名的“斐波那契兔子问题③”，美国的“我赴圣地爱弗司④”的诗歌体算题……都是有关数列的历史名题。但是，论起最早产生的数列问题，还得追溯到埃及历史上最古老的时代——

1858年，英国人林特在埃及发掘到一批公元前1700年左右的古埃及草纸卷。一份开首写着“获知一切奥秘的指南”的草纸卷上记载着一些产生于公元前3500年左右的数学问题。其中有一个问题是这样的：

“把十斗大麦分给十个人，使每相邻两人所得的大麦都

① 巴比伦古算题：“10个兄弟分100两银子，前一人比后一人多，只知道每级相差的数量都一样，但究竟相差多少不知道。现在第八个兄弟分到8两银子，问一级相差多少？”

② 这是印度的一个古老的传说，舍罕王打算重赏象棋的发明人——宰相西萨·班·达依尔。宰相请求舍罕王在棋盘的第一个小格内，赏给他一粒麦子，在第二个格子内给两粒，第三格内给四粒，照此下去，每一小格内的麦子都比前一小格加一倍。舍罕王认为这样摆满棋盘上所有64格的麦粒也不过是一小袋，就答应了宰相的要求。可是当宫廷数学家计算了这个数目以后，才发现整个国家仓库里的所有麦子全部给宰相也还不够，甚至在全世界的土地上也不能收获这么多的麦子。

③ 见本书第五讲《有趣的斐波那契数列》。

④ 美国人阿达姆斯(D. Adams)在19世纪初写的《学者算术》中有一首诗歌：

“我赴圣地爱弗司，

路遇妇人数有七，

一人七袋手中携，

一袋七猫无差池，

一猫七子紧相随，

猫及猫子，布袋及妇人，

共有几何同赴圣地爱弗司？”

相差 $\frac{1}{8}$ 斗。”

我们知道，这是一个有关等差数列的问题。

这份草纸卷上还记载着另一些同数列有关的问题，其中包括唯一的一个等比数列问题：

“有7座房子，每座房子里有7只猫，每只猫吃了7只老鼠，每只老鼠吃了7穗大麦，每穗大麦种子可以长出7斗大麦。请算出房子、猫、老鼠、大麦穗和斗数的总数。”

草纸卷上也给出了这些问题的解法和它们的答案。这是迄今发现的最早见诸文字记载的数列问题。

数列和它的求和，是数学中重要而又饶有趣味的问题之一。除了等差数列及等比数列之外，在初等数学中，还时常可以见到下面这些类型的数列求和问题：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2;$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2);$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2^3} + \cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{2^n};$$

$$C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + \cdots + (2n+1)C_n^n;$$

$$\sin \alpha + 2\sin 2\alpha + 3\sin 3\alpha + \cdots + n\sin n\alpha$$

.....

这些数列求和问题，灵活性较大，应用也较广泛，多少世纪以来，吸引着无数数学爱好者对它们的解法的探求，耗费了许多数学大师的精力，产生了各种不同的巧妙解法。这些方法争胜斗巧，闪耀着大师们才华的光芒。它们或以思路简捷赢人，或以方法奇巧取胜，或以原理浅显为用，或以应

用广泛见长……如果把数列的领域比作一座花园的话，这些方法正如盛开的百花，千姿百态，万紫千红，争芳斗妍。

本书的目的，在于为读者观赏这座花园的一隅作一次导游，让每人采撷一些自己喜爱的花朵。

第一讲 各有巧妙不同

数学的真本领在于熟练地处理数学方法，总是选择最简捷而可靠的途径，至于解问题的方法究竟属于算术、代数、几何抑或其他领域倒可不必过问。

——Я.И. 别莱利曼



卡尔·弗列德里希·高斯是十八世纪德国著名的数学家。他一生在数学上作出许多卓越的贡献，被誉为“数学王子”。高斯在小时候就表现出非凡的数学才能。据说他十岁时就独立地发现了求出 $1+2+3+\cdots+100$ 的快捷算法。那是在一次算术课上，老师出了一道题：

$$1+2+3+\cdots+97+98+99+100=?$$

老师刚把题目写完，小高斯就得出了答案：5050。原来他发现从1到100这一百个数，挨次把首尾两个数加起来都得到

$101; 1+100=101, 2+99=101,$
 $3+98=101, \dots 50+51=101$. 这
 样的数共有50对, 所以这一百个数
 的总和就是 $50 \times 101 = 5050$.

现在让每一个学过等差数列的
 读者解上面这道题都不会觉得困
 难。更一般地, 读者还知道, 从1
 到 n 这 n 个自然数的和是①:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

$$\frac{1}{2}n(n+1).$$



青年时代的高斯

如果要求的是前 n 个自然数的平方和,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

恐怕就不是每一个读者都知道该怎样解答的了。

关于前 n 个自然数平方和公式的获得, 有不少巧妙而有趣的方法。第一个推导出这个公式的是古希腊数学家阿基米德(我们都已从物理学上著名的浮力定律熟悉了他的名字)。嗣后, 许多数学家又通过不同的途径得到同样的结果。下面, 我们先向读者介绍其中的七种方法, 在后文中, 读者还可以

① 一般地, 用 $\sum_{k=1}^n f(k)$ 作为 $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ 的缩写。例

如: $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$; $\sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots +$
 $n \cdot (n+1)$; 等等。

看到另外六种方法。这些方法思路迥异，殊途同归，各有巧妙不同。

〔解法一〕利用恒等式法

这种方法借助于下面这个恒等式：

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

分别用1, 2, 3, ..., $n-1$, n 代替这个恒等式中的 k , 就得出一系列式子：

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1;$$

$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1;$$

$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1;$$

.....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1;$$

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.$$

把所得到的 n 个等式的左右分别相加，可得到

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n,$$

即：

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n.$$

再把公式

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

代入上式，并加以整理，即得：



阿基米德

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

〔解法二〕物理法

利用物理学中的重心和静力矩的知识来推导前 n 个自然数的平方和公式，是一种颇为有趣的方法。这种方法基于下面的质点系统设计：

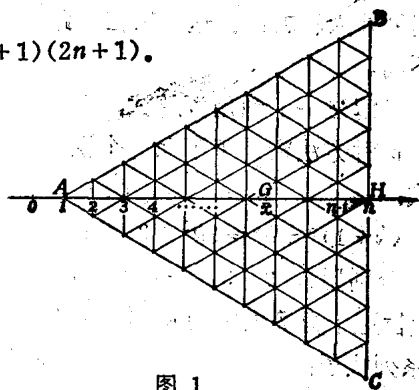


图 1

如图1，我们在一根数轴上，以坐标为1的A点为一个顶点，以坐标为 n 的H点为底边上中垂线的垂足作一个等边三角形 ABC 。再在该等边三角形内过坐标为 2、3、4...、 $(n-1)$ 的各点分别作数轴的垂线，把三角形的两腰 AB 和 AC 分别分成 $(n-1)$ 等分，然后过这两组分点分别作平行于两腰的两组平行线，把三角形 ABC 分成许多完全相等的小等边三角形。

这时，容易看出：点1（也就是A点）是一个小三角形的顶点，点2的垂线上有两个小三角形的顶点，点3的垂线上有3个小三角形的顶点，...点 n 的垂线上有 n 个小三角形的顶点。

最后，我们在所有小等边三角形的顶点上都放上一个单位质量的质点，就构成了我们所需要的质点系。

现在，我们来讨论这个质点系对于数轴原点 O 的静力矩 M 。

首先， M 等于每个质点对原点 O 的静力矩的总和。显然有：

$$M = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + n \cdot n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

然而，根据力学原理，整个质点系对 O 点的力矩又可等于在质点系的重心 G 处集中了整个质点系的质量后关于 O 点的力矩。

整个质点系的质量是所有质点的质量和：

$$m = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

而重心 G ，从平几知识知道，它在 AH 上，并且 $AG = \frac{2}{3}AH$ ，坐标为：

$$\bar{x} = \frac{2}{3}(n-1) + 1 = \frac{2n+1}{3}.$$

所以又有

$$M = m \cdot \bar{x} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

故得：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

杨振宁博士说过：“物理和数学可以比作一个树叉上生长着的两片叶子。”物理需要数学，这是大家所习知的；应用物理方法也能解答某些数学问题，恐怕就不是每一个读者都熟悉的了。这里的解法二给我们一个范例，一些数列的求和问题，如能正确地设计质点系，往往能出奇制胜地解决问题。

〔解法三〕数学归纳法

数学归纳法，这是读者很熟悉的一种证明方法，它也是证明数列求和公式的重要方法。它是在已经猜出数列前 n 项和的解析式（这式子在未得到证明时，还仅仅是一种假设）的情况下，对这个命题（或称为猜测）加以严格的证明。

对于前 n 个自然数的平方和，如果已经给出命题

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

我们就可以用数学归纳法对它作出如下证明：

(i) 当 $n=1$ 时，上式左边 $=1^2=1$ ，右边 $=\frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3=1$ ，左=右，命题正确。

(ii) 设 $n=k$ 时命题正确，即：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),$$

那么，

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]. \end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时命题也成立。

所以原命题对于任意自然数都是正确的，即

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

这种证明固然无可挑剔，但是它总使人感到不满足，我们不禁要问：这个公式在用数学归纳法证明之前是怎样知道的？如果它已经用前面的解法一或解法二那样的方法求出

来，那何必多此一举再加以证明？如果说是“直观”地看出来的，又难以令人信服。然而，确有不少的公式或定理是先有猜测，尔后才加以证明的。不过，这里要用到一些技巧罢了。下面的解法四就是猜测前 n 个自然数平方和的方法之一。

【解法四】归纳假设法

归纳假设法，也叫“发现法”，这是发现数学公式的重要方法之一。下面我们所引的这种发现前 n 个自然数平方和公式的方法，是美国数学家、教育家G·波利阿提出的，它给予我们“没有公式之前怎样去找出公式”的一个很好的范例。

首先，波利阿对 n 的最初几个值，计算出 $\sum_{k=1}^n k^2$ ，并把它与 $\sum_{k=1}^n k$ 列在一张表格中(如下表)，试图从中发现一些规律。

n	1	2	3	4	5	6	
$1+2+3+\dots+n$	1	3	6	10	15	21	
$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$	1	5	14	30	55	91	

可是，单从上表并不能看出这几行数之间有什么内在的联系，因此，波利阿进而计算出上表中下面两行的比：

n	1	2	3	4	5	6	
$\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1+2+3+\dots+n}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	

这时就很容易发现其中的规律了，只要我们将上表的下行都写成以3为分母的分数：