现代应用数学丛书

经济理论中的数学方法

〔日〕安井琢磨　二階堂 副包　著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

經济理論中的数学方法

——平衡解存在問題——

〔日〕安井琢磨 二階堂副包 著

談祥柏 譯

刘源張 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。以凸集理論为中心，討論了經济理論中較新的数学方法，集合論方法的性质与特征，并且介紹了若干应用这种方法所取得的成果。全书分經济学中基础概念的数学表現及 Walras 式平衡模型与不动点定理两章。可供大专院校有关专业师生以及計划、經济理論有关研究工作者参考。

現代应用数学丛书

經济理論中的数学方法

——平衡解存在問題——

原 书 名 経済理論における数学的方法
——均衡解の存在問題——

原 著 者 〔日〕安 井 琢 磨
二 階 堂 副 包

原出版者 岩 波 书 店 1958

譯 者 談 祥 柏

校 者 刘 源 張

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張2 16/32 字数57,000

1963年5月第1版 1963年5月第1次印刷

印数1—4,600

統一书号：13119・346

定 价：(十四) 0.46元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数·	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程*	福原滿洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程*	福田武雄	穆鸿基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数值計算法*	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論*	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論* 变形几何学	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論·	喜安善市等	陆志刚
自动控制理論*	喜安善市等	翟立林
网絡拓扑学·	近藤一夫	張設
信息論*	喜安善市等	李文清
推断統計过程論	北川敏男	刘璋温
統計分析*	森口繁一	刘璋温
試驗設計法*	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論·	宫澤光一	張毓椿
綫性規划*	森口繁一等	刘源張
經济理論中的数学方法·	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已經出版，有·者即将出版。

譯 者 序

本书叙述的主要内容是平衡解存在定理。如所周知，所謂一般均衡理論是以 Walras(法国)，Pareto(意大利)为代表的洛桑学派所創始的。本书的理論是古典一般均衡理論的继續发展，作者运用了集合論的方法，利用欧氏空間綫性代数与初等拓扑学作为工具，对一些經济理論問題作了定量的探討，并給出了平衡解存在定理的証明。

作者二階堂是日本有名的經济計量学家，在这方面有許多研究工作。本书第 1 章叙述了如何用凸集的基本性质来解釋生产、消費等經济現象，以作为后面的准备。第 2 章談到了不动点定理，并証明了平衡解的存在(单純交換模型与 Arrow-Debreu 模型)。

对于通曉計量經济学的讀者来説，閱讀本书需要具备一些集合論与拓扑学的知識，这方面的入門书不少，对那些打算在較短时間內掌握这些基础知識的讀者来說，可以先看本丛书中的《集合·拓扑·測度》(河田敬义著，賴英华譯)一书。

本书內容是以資本主义經济为背景，所以本书所述某些“法則”和提法，如“完全竞爭”，“利潤最大原則”，“边际效用”，“收获率不变法則”，“收获率非递增法則”等，对我国社会主义經济并不适用。此外，本书中某些名詞，如“財貨”，也与我国經济文献中的“財貨”含义不同。尽管如此，这本书对于我們了解現代經济計量学的某些理論和学說，探討集合論方法和其他高深数学在經济学中应用的可能性，以及如何构造經济数学模型等，仍有一定参考价值。翻譯本书的目的也在于此。

譯稿承中国科学院数学研究所刘源張先生审閱，提出了許多宝貴意見，在此表示感謝。限于譯者的水平，因此疏漏錯誤之处，在所不免，切望讀者加以指正。

談祥柏 1962 年 6月 於上海

序

自从 A. A. Cournot 开始，在經济理論中有系統地引进了数学方法，特别是从 L. Walras, V. Pareto 形成了一般平衡理論以来，数学作为經济理論的不可缺少的工具，其重要性已越发增加了。大致說，直到本世紀三十年代的末期为止，在經济学上所用到的数学，是以微积分学为主，此外，包含微分方程、差分方程、古典代数等部分。由于这样一些数学方法的引用，使經济理論取得了很大进步，不容否认，显著地提高了精确性，然而，微积分学的机械运用，对于闡明經济現象是不是一种很合适的方法，这一点尙成疑問。由于这种方法，在遇到經济現象的数学的定式化时，不仅需要作出不必要的强假定，而且又多方回避了构成理論基础的中心命題的証明。对于这一点的重新考虑，以 1944 年 von Neumann 与 Morgenstern 的“博奕論与經济行为”一书的出現为轉折而頓然加深。在这以后不久，对在三十年代中叶就已写出但一直被忽略的 A. Wald 与 J. von Neumann 的經济学論文的首創性意义，重新引起了注意。从这样的情况出发，形成了使用更为适合于經济現象的数学，并且充分发揮了数学所具有的論証能力与分析能力的新的研究方向。其研究成果，一方面成为利用产业关联理論与綫性规划所作的經济分析，另一方面重新构成了古典的平衡理論，而在这个平衡理論的基础上，正在出現向新的領域前进的趋势。本书将討論这个經济理論的新动向中所見到的数学方法。在内容方面，本书的目的，是闡述上面两种成果中属于后面那一部分的一些成就。至于前者，特别是綫性规划，以及与之有密切关系的博奕論，已經在本丛书的其他书里談到了。此外，在历来經济理論上所利用的古

典的数学，由于叙述它們的书籍已很多，所以凡是涉及到它們时，本书只好割爱了。

本书所讲到的方法，就是一部分經济学者所說的集合論的方法。这是对于引用 Euclid 空間中的綫性代数与初等拓扑学的一种倾向的一般性称呼。目前的发展状况是：成为其中心內容的是有关凸集的一些定理，因而，本书一方面也是凸集理論。

第1章解釋了凸集的基本性质，并考察了怎样将生产、消費等經济現象用凸集概念来表示。这是为后面的本論部分做好数学与經济学的准备。但是，对有广泛应用（特别是用来証明博奕論中的鞍点定理以后）的分离定理的解釋，这里只好割爱了。这是因为篇幅的限制，本书叙述的內容只能以一个課題——即平衡解存在問題——作为中心而予以統一起来的緣故。事实上，在目前情况下，有鉴于闡明这个問題，要涉及較之分离定理更深一层地触及凸集性质的定理（即不动点定理），这也許是不得不采取的措施。

第2章叙述了关于平衡解存在定理的最近研究成果，这是从 Walras 以来一般平衡理論中沒有解决的基本問題之一。Wald 排除了那种方程数与未知数个数相一致的朴素方法，第一次严格証明了平衡理論中特别情形（即 Cassel 方程）的解的存在性。这个問題，最近由于 K. J. Arrow 和 G. Debreu, D. Gale, L. McKenzie, 与二階堂等人的工作而取得了很大的进展。这里，重要点是，在經济学上所得的循环（后文要說到的 Walras 法則），就是数学上的不动点定理。在遇到 Arrow-Debreu 模型的說明时，避开了不必要地以一般定理为依据的办法，問題的解决在必要与可能范圍內尽可能采用簡明易懂的办法来闡述。

本书原計划由古谷弘教授撰写，由于教授突然亡故，仓卒間才由笔者二人担任这一任务，并商定由二階堂执笔，由安井作一些整理加工。

目　录

第1章 經济学中基础概念的数学表現

經济学上的財貨空間(或商品空間),无非就是把 Euclid 空間給与适当的經济学的解釋。成为生产、消費等經济活动对象的財貨,除了谷物、煤炭、化学纤維等物理的財貨之外,还包含各种劳动(例如熟练劳动与不熟练劳动)与各种服务(例如輸送等服务)。根据問題的性质与研究的角度,把它們分成 n 类,并用号碼区别,例如可分別記为第一种財貨,第二种財貨,……,以及一般地,第 j 种財貨等等。如果由各該相应的度量单位所决定的各种財貨的量值用实数来表示,即如果第 j 种財貨的量值为 x_j,則財貨的組合 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就可以看作是 n 維 Euclid 空間 R^n 的一个点。此时,除去例外的一些情况,在經济学上的財貨的量值作为連續量来处理,就可以应用 Euclid 空間的綫性代数、点集論等方面的許多研究成果。

在研究数理經济学的学者中間,虽然微积分,最近还有綫性代数等方面的知識已相当普及,但是,点集論,特別是有关 Euclid 空間拓扑学的知識,很明显是貧乏的。这本书假定讀者已經有了拓扑学的极初步的修养。由于篇幅的限制,要把本书的叙述做到完整独立,遺憾得很,是做不到的。幸而,在本丛书中,河田教授著的《集合·拓扑·测度》一书中已将有关的知識闡述了,此外,这方面較好的入門书籍也不少,讀者可以用各自适当的方法学习和掌握这方面的最低限度的知識。这里所謂拓扑学的修养,也不过是指关于一些最基本的、常識性的东西,例如收斂、邻域、閉包、閉集、开集、內点、境界点、外点、連通、同胚、紧性等等。这些在一般微积分学开头的地方就有出現,对于学习近代数学以及有志于研究其应用的人,不論其专攻領域如何,都是必需的常識,这一点,必需予以强調。

§1 凸 集

以 Euclid 空間 R^n 中两个点 x, y **为端点的綫段**,是由

$$\alpha x+\beta y;\quad \alpha,\ \beta\geqq 0,\quad \alpha+\beta=1 \tag{1.1}$$

表示的点的集合。这集合用記号$[x, y]$表示。必要时，还使用記号(x, y)，$[x, y)$，$(x, y]$等等。它們分別表示着下列集合：

$$(x, y)=\{\alpha x+\beta y\,|\,\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1\},$$
$$[x, y)=\{\alpha x+\beta y\,|\,\alpha>0,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1\},$$
$$(x, y]=\{\alpha x+\beta y\,|\,\alpha\geqq 0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1\}.$$

綫段$[x, y]$的各个点，叫做x与y的**凸組合**。

"如果R^n的子集X包含两个点x, y，則X必同时包含綫段$[x, y]$"，滿足这样的性质时，X叫做**凸集**。上述凸集定义中："如果包含两个点$x, y\cdots$"等一段幷沒有說X一定不是空集，空集亦是凸集的一种。然而，今后遇到其意义很明显，不会引起混淆的时候，諸如"非空集的凸集"等冗长的叙述，当极力避免。除去空集以外，还有R^n全体、超平面、直綫等的部分綫性空間、一个点、球的內部等等，总之，凸集的例子非常之多。

例1　正象限　在R^n的点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中，所有的坐标分量都是非負时，則一切这样点的集合称为R^n的**正象限**，用R^n_+表示，即

$$R^n_+=\{x\,|\,x_j\geqq 0\quad (j=1, 2, \cdots, n)\}. \tag{1.2}$$

当$n=2$时，如图1.1所示，R^2_+相当于第一象限。由上可見，R^n_+是凸集。

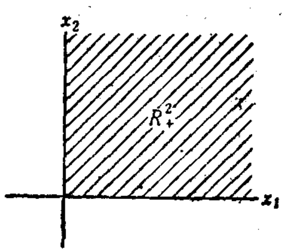

图　1.1

例2　一次不等式的解集合　在R^n中給定有限个或无限个一次函数

$$f_\lambda(x)=\sum_{j=1}^n a_{\lambda j}x_j+b_\lambda\quad (\lambda\in\Lambda),$$

不等式組$f_\lambda(x)\geqq 0$的解集合，即

$$X=\{x\,|\,f_\lambda(x)\geqq 0,\ \lambda\in\Lambda\} \tag{1.3}$$

是一个凸集。这里，Λ是下标的集合。如果把全部不等号"≧"或其中的若干个用严格不等号">"或用等号代替，或改变不等号的方向，亦得到同样的結果。

証明　如果$x, y\in X$，則

$$f_\lambda(x)=\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}x_j+b_\lambda\geqq 0,$$

$$f_\lambda(y)=\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}y_j+b_\lambda\geqq 0\quad(\lambda\in\Lambda).$$

故对于 $\alpha,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1$，有

$$\begin{aligned}f_\lambda(\alpha x+\beta y)&=\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}(\alpha x_j+\beta y_j)+b_\lambda\\&=\alpha\left(\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}x_j+b_\lambda\right)+\beta\left(\sum_{j=1}^{n}a_{\lambda j}y_j+b_\lambda\right)\\&=\alpha f_\lambda(x)+\beta f_\lambda(y)\geqq 0\quad(\lambda\in\Lambda).\end{aligned}$$

因此

$$\alpha x+\beta y\in X.$$

其余情况亦可同样地証明。

在例 2 中，若下标的集合 Λ 只含有一个元素，则 X 称为半空間(說得更完整些，是半閉空間)。由解析几何可知，对于一个一次函数

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j+b,$$

$L=\{x|f(x)=0\}$ 表示超平面，这个超平面把 R^n 分成两部分，即所謂正領域 $\{x|f(x)>0\}$ 与負領域 $\{x|f(x)<0\}$。这些領域各与超平面 L 的和集是半空間

$$X_+=\{x|f(x)\geqq 0\}\ 与\ X_-=\{x|f(x)\leqq 0\}.$$

这样情况下，系数 a_j 中一定要有非 0 的数，这一点显然是要作为前提的。

此外，对 $\Lambda=\{1,\ 2,\cdots,\ n\}$，如果 $a_{\lambda j}=\delta_{\lambda j}$ (Kronecker 的 δ) ❶，$b_\lambda=0$，则 X 就是例 1 的正象限。Λ 作为无限集的例子，如果設

$$f_\lambda(x)=-x_1\cos\lambda-x_2\sin\lambda+1\quad(0\leqq\lambda<2\pi),$$

则 X 就是 R^2 中以原点为中心，半徑为 1 的圓。

对应于在例 2 中規定 X 的各个一次函数 f_λ 的集合，则可得

$$X_\lambda=\{x|f_\lambda(x)\geqq 0\}.$$

如果 $a_{\lambda j}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 中有非 0 的数，这些集合是半空間，如果 $a_{\lambda j}=0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则有二种情况：当 $b_\lambda\geqq 0$ 时是 R^n 全体；当 $b_\lambda<0$ 时则成为空集。总之，不管怎样，由于 $X=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$，所以 X 是有限个或无限个半空間的公共部分。

---

❶ $\delta_{\lambda j}=\begin{cases}0\ (\lambda\neq j),\\1\ (\lambda=j).\end{cases}$

許多点的凸組合 对 R^n 的 s 个点 $x^1, x^2, \cdots, x^s$ 加数分别是 $\alpha_i \geqq 0$，且 $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1$ 所作的一次組合 $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i x^i$ 叫做这些点的凸組合。如果 X 为凸集，$x^i \in X\,(i=1, 2, \cdots, s)$，$\alpha_i \geqq 0$，$\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1$，则 X 含有这些点的凸組合。

証明 当 $s=2$ 时，由 X 是凸集的定义，本定理的結論显然是正确的。假定 $s=m$ 时，結論亦是正确的。如果有一个 α_i 是 0，那末 $m+1$ 个点 $x^1, x^2, \cdots, x^{m+1}$ 的凸組合可以看作是 m 个点的凸組合，于是由归納法的假設可知 X 是包含凸組合的。以下設 $\alpha_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, m+1)$，则有

$$\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i x^i=\alpha_1 x^1+(1-\alpha_1)\sum_{i=2}^{m+1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}x^i. \tag{1.4}$$

上式可以看作是 X 的两个点 x^1，$\sum_{i=2}^{m+1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}x^i$ 的凸組合，所以 (1.4) 含于 X 中。这是由于 x^1 按照原来的假設，而 $\sum_{i=2}^{m+1}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_1}x^i$ 由归納法的假設都分别含于 X 中，故知定理为真。

§2 凸集与集的运算

(i) **几个凸集的公共部分** 給定有限个或无限个凸集 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$，则它們的公共部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 也是凸集。

証明 如果 $x, y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$，则 $x, y \in X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$。故

$$[x, y] \subset X_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda),$$

所以

$$[x, y] \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda.$$

(ii) **凸集的直积** 給定 X_λ 作为 n_λ 維財貨空間 R^{n_λ} 的凸集 $(\lambda=1, 2, \cdots, s)$，则直积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_s$ 是直积 $R^{n_1}\times R^{n_2}\times\cdots\times R^{n_s}$ $\left(\text{或者亦可記为 } R^n,\ n=\sum_{\lambda=1}^{s}n_\lambda\right)$ 的子集，它也是一个凸集。

証明 把 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_s$ 中的两个点用

$$x=[x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^s],\quad y=[y^1,\ y^2,\ \cdots,\ y^s]$$

来表示，如果 $x^\lambda,\ y^\lambda\in X_\lambda\ (\lambda=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$，那末对于 $\alpha,\ \beta\geqq 0$, $\alpha+\beta=1$, 有

$$\alpha x+\beta y=[\alpha x^1+\beta y^1,\ \alpha x^2+\beta y^2,\ \cdots,\ \alpha x^s+\beta y^s].$$

这里，由于各个 X_λ 是凸的，故

$$\alpha x^\lambda+\beta y^\lambda\in X_\lambda.$$

于是由直积的定义推得

$$\alpha x+\beta y\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_s.$$

(iii) **凸集在仿射映象下的象** 所謂仿射映象 $f: R^n\to R^m$，即是对于使得 $\alpha+\beta=1$ 的 $\alpha,\ \beta$ 值，能使

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

成立的映象。在这里，关于 $\alpha,\ \beta$ 的正負不受限制。如所周知，仿射映象是綫性映象与平行移动相結合的一种映象。如果 X 是 R^n 的凸集，則其象 $f(X)$ 也是凸集。

証明 如果 $f(X)\ni f(x),\ f(y)$，則对 $\alpha,\ \beta\geqq 0,\ \alpha+\beta=1$ 有

$$\alpha f(x)+\beta f(y)=f(\alpha x+\beta y),$$

并且 $\alpha x+\beta y\in X$. 故而

$$\alpha f(x)+\beta f(y)\in f(X).$$

应用例 1 凸集与純数的乘积 若集合 $X\subset R^n$，則当 α 为实数时，集合 $\alpha X=\{\alpha x\mid x\in X\}$ 称为 X 的 α 倍。如果 X 是凸集，那末 αX 也是凸集。

証明 由于映象 $f(x)=\alpha x$: $R^n\to R^n$ 是仿射映象，并且 $\alpha X=f(X)$，故可視为上述第 (iii) 种情形的特例。

应用例 2 几个凸集的矢量和 对于集合 $X_\lambda\subset R^n\ (\lambda=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$，把集合 $\left\{\sum\limits_{\lambda=1}^{s}x^\lambda\,\middle|\,x^\lambda\in X_\lambda\right\}$ 用 $\sum\limits_{\lambda=1}^{s}X_\lambda$ 来表示，或者把它記为

$X_1+X_2+\cdots+X_s$❶，称为这些集合的矢量和。如果各个 X_λ 是凸集，則其矢量和亦是凸集。

証明 映象

$$f(x^1, x^2, \cdots, x^s)=\sum_{\lambda=1}^{s} x^\lambda: R^n\times R^n\times\cdots\times R^n\rightarrow R^n$$

是仿射映象，且

$$\sum_{\lambda=1}^{s} X_\lambda=f(X_1\times X_2\times\cdots\times X_s).$$

故根据(ii)，$X_1\times X_2\times\cdots\times X_s$ 是凸集，又根据(iii)可知，它的仿射映照下的象亦是凸集。

由上面两个例子可見，当 X 与 Y 是凸集时，其矢量差 $X-Y$ 也是凸集。

§3 生产活动与凸集

在国民經济再生产的各个环节中，生产、消費等經济活动，有着很复杂的相互影响关系。在这样的相互关系中，我們把具有經济学意义的、行施决策的行动单位叫做經济主体，例如国际貿易論中的国家，作为国民經济构成单位的企业，家庭經济，以及在計划經济理論中的計划行政部門等等，都是經济主体的例子。

所謂生产，就是結合一些生产要素(如劳动力、原料等等)把它們变換成产品。如果形式地加以規定，則在 n 种財貨里，有些是作为投入物，有些是作为产品。同一种类的財貨，有可能既是投入物又是产品，并且所有的財貨都是純数，卽是說，产品与投入物的差額可用 y_j $(j=1, 2, \cdots, n)$来表示。如果 $y_j>0$，則理解为把第 j 种財貨看作产品，如果 $y_j<0$，則理解为将 $-y_j$ 个单位作为投入物。这样一来，就可把**生产活动**(或者更簡短一些，把它叫做活动 process, activity)作为投入物与产品之間的技术变換来处理，于是就

❶ 注意不要把矢量和 $X_1+X_2+\cdots+X_s$ 与和集 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_s$ 相混淆。

可由財貨空間中的点 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 来表示。再进一步，我們将某个經济主体的所有那些在技术上可能的活动 y 的集合用 Y 来表示。这里所謂"技术上可能"的意思是指：只要所需要的投入物能够保証供应❶，則 Y 内的 y 是可能实现的(feasible)。对于活动 $\alpha y\,(\alpha\geqq 0)$，$y\in Y$，如果 $\alpha=0$，則是投入物与产品同时为 0，也就是說，它对应着經济上的无活动状态。当 $\alpha>0$ 时，則表示着以活动 y 的投入物与产品的 α 倍作为其投入物与产品的活动，亦即对应着以 y 的 α 倍規模来运轉的活动。α 称为**活动水平** (activity level)❷。因而，可以看作 $\alpha y\in Y$。此外，当 $y^1, y^2\in Y$ 成立时，由于 y^1+y^2 的投入物与产品分别是 y^1, y^2 的投入物与产品之和，故它对应于两种活动的并行的运轉。由于这在技术上也是可能的，所以 $y^1+y^2\in Y$ 可以成立。

在上述經济学的解釋之下，Y 的这种性质："如果 $y, y^1, y^2\in Y$，若 $\alpha\geqq 0$，則 $\alpha y, y^1+y^2\in Y$"，相当于数学上**凸錐**的定义。容易看到，凸錐是一个凸集。

技术矩陣 給定有限个活动 $a^1, a^2, \cdots, a^m\in R^n$，我們来考虑两种情况：第一种是把这些活动并行地运轉的活动，第二种是以种种不同的活动水平进行着的活动。显然，这两者結合起来时，就能产生无数的活动。此等活动集合就成为上面所說的 Y 的一个实例，即

$$Y=\left\{\sum_{i=1}^{m} x_i a^i \,\middle|\, x_i\geqq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)\right\}. \tag{3.1}$$

現在作一个以 a^i 为第 i 行的矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix}.$$

---

❶ 一般說来，由于 y 是表示現有投入物与現有产品之間的技术变换关系，因而是在投入物与該項資本設备得到保証的前提之下来說的。

❷ 更詳細一些說，当 $z=\alpha y$ 时，我們把 α 叫做在把 y 作为单位活动时的活动水平。

又若 $x \in R_+^m$，则(3.1)就成为

$$Y=\{y \mid y=xA,\ x \in R_+^m\}. \tag{3.2}$$

A 叫做**技术矩陣**(technology matrix)，A 的元素称为**生产系数**，而 x 是**活动水平矢量**(activity level vector)。

关于生产活动集合的一些公設　在上面的解說中，活动的集合 Y 是一个凸錐，作为凸錐条件之一的："如果 $y \in Y$，则 $\alpha y \in Y$"，就是通常所称的"**收获率不变法則**"。但若按照 Arrow-Debreu 的看法，Y 不一定是凸錐，只当作为凸集，不过为此另外附加 Y 包含 0 的条件，则 $0 \leqq \alpha \leqq 1$，故对于 $y \in Y$，便有

$$\alpha y=\alpha y+(1-\alpha)0 \in Y,$$

这就是**收获率非递增法則**。$n=2$ 时，如图 3.1 所示。設 $y=(y_1, y_2)$，$y_1<0$，$y_2>0$，则把第一种財貨 $-y_1$ 个单位投入后，第二种財貨 y_2 个单位就被生产出来。如果把通过 αy 且平行于 x_2 軸的直綫与 Y 的边界的交点取为 $z=(z_1, z_2)$，则有 $z_1=\alpha y_1$ 成立，并且一般地說，$\frac{z}{\alpha} \notin Y$。因而，在 Y 的活动中，只要 $\frac{z}{\alpha}$ 与第一种財貨的投入量相等，并且伴随着关于第二种財貨的生产量的最有利的 y，就使 $y_2<\frac{z_2}{\alpha}$ 成立。这时，就是**收获率递减法則**得以成立的情况。这个法則意味着：尽管将投入物增加到 $\frac{1}{\alpha}$ 倍，产品亦按相同比例来增高这一点在技术上不可能。Arrow-Debreu 为了顾及到經济現实，关于活动的集合 Y 必須有妥善的假定，他对于活动的集合，加上下列三个条件❶：

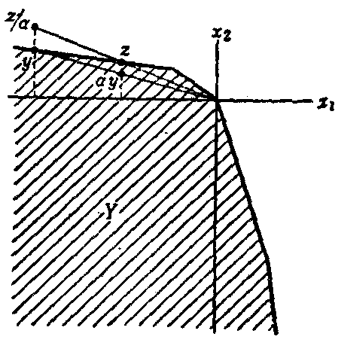

图　3.1

---

❶ 参閱本书参考文献 Arrow & Debreu [2]。