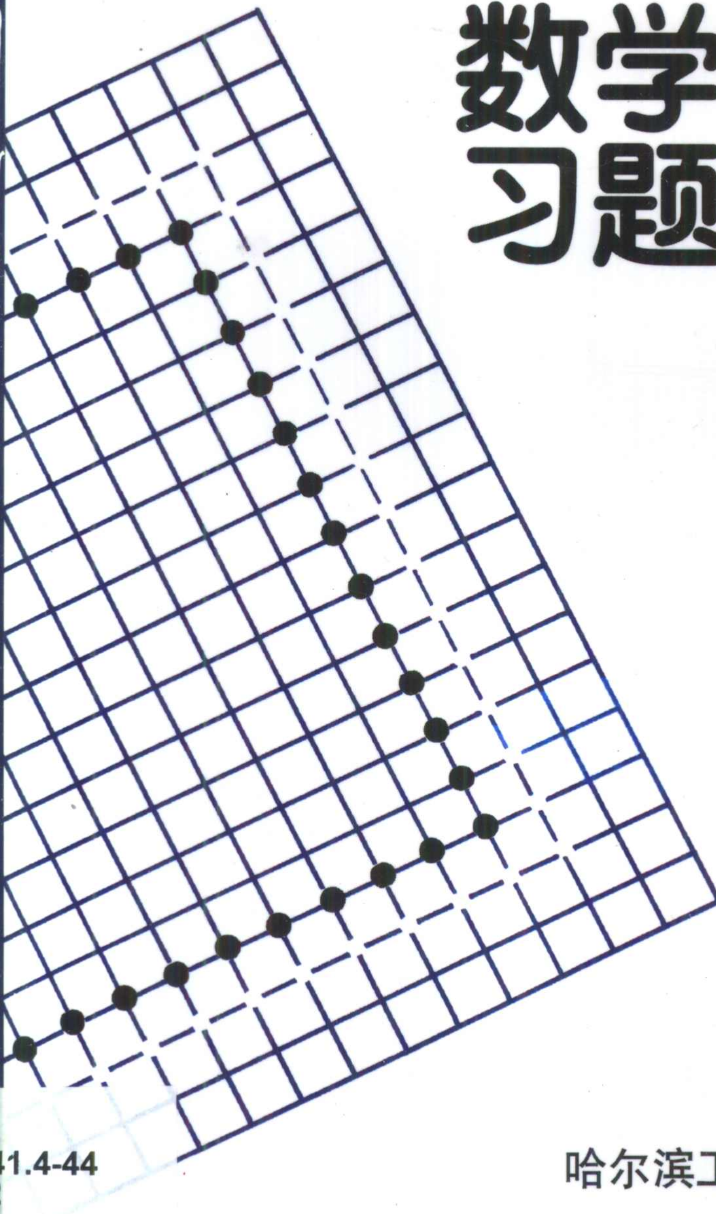
SHUXUE JIANMO XITI JIEDA ● SHUXUE JIANMO XITI JIEDA



数学建模习题解答

主编 沈继红
主审 施久玉

哈尔滨工程大学出版社

数学建模习题解答

主　编　沈继红
主　审　施久玉

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模习题解答/沈继红主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2002.6
ISBN 7-81073-327-3

Ⅰ.数… Ⅱ.沈… Ⅲ.数学模型-高等学校-解题 Ⅳ.O141 4-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036385 号

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈工程大学11号楼
发行部电话:(0451)2519328 邮编:150001
新 华 书 店 经 销
肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷
*
开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 6.3125 字数 160 千字
2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷
印数:1—2 000 册
定价:9.00 元

前　　言

本书是与哈尔滨工程大学出版社出版的《数学建模》一书配套编写的习题指导书，对《数学建模》书中的习题做了解答。本书为初学《数学建模》一书的读者提供了学习的参考。

考虑到某些题目的篇幅及容量，个别题目作了提示性或构思性的部分解答。由于《数学建模》书中第10章综合习题部分都是选自生产实践中的实际问题，解答篇幅过大，因此，第10章只选择部分题目给出参考性解答。

本书由哈尔滨工程大学的沈继红教授主编，施久玉教授主审，哈尔滨工程大学的罗跃生、高振滨、张晓威及牡丹江师范学院的韩明莲参与了编写工作。

由于数学建模课程的特点，其习题目多与客观实际接轨。编者尽管参考了大量的文献，本书提供的方法很难说一定正确或标准；不完善甚至错误的地方在所难免，请读者谅解。编者真诚地希望读者提供更加符合实际的好的答案。

编　者

2002.5 于哈尔滨

目　　录

习题 1 解答

1－1　兄妹二人沿某街分别在离家 3 公里与 2 公里处同向散步回家，家中的狗一直在二人之间来回奔跑。已知哥哥的速度为 3 公里／小时，妹妹的速度为 2 公里／小时，狗的速度为 5 公里／小时。试分析半小时后，狗在何处？一小时后，狗在何处？

解　(1) 注意到本题并未给出开始散步时狗的具体位置，因此，我们无法确定半个小时后狗在何处。即使假设开始散步时狗在哥哥处，我们仍然无法确定狗在半小时后的位置，因为题目中并没有给出的狗的奔跑方式（比如说狗是从哥哥处沿街道跑到妹妹处，再沿路返回，周而复始）。因此，最后的答案仍是狗可以在任何位置。

(2) 注意到哥哥与妹妹的速度分别为 3 公里／小时及 2 公里／小时，因此一小时后，哥哥与妹妹都已到家，而狗一直在二人之间，因此狗也到家。

题外的话：一定有读者对本题答案不以为然，或有被戏耍的感觉。我们一直有这样的习惯心理，就是给你的题目一定都有明确的答案。在一般的教科书里是这样，但在现实的客观世界里未必如此！很多人一见本题就自然联想到初中的“追击或相遇问题”，题目还没有看清，便开始列方程了。长期的灌输式教育已使我们在某种程度上逐渐丧失了思考的习惯，而逐渐进入某种框定的思维定式。归根到底，我们过分相信我们的理论，过分相信我们所学的知识，又过分依赖我们手中的笔，而惟独没有启用的是我们头脑中或许还尚存的创造性思维！仅以此题为戒。

1－2　请查阅开卜勒(kepler)三定律，并利用这三个定律及牛顿第二定律证明万有引力定律。

证明：开卜勒三定律如下：

(1) 行星轨道是一个椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上。

(2) 行星在单位时间内扫过的面积不变。

(3) 行星运行周期的平方正比于椭圆长轴的三次方，比例系数不随行星而改变。极坐标系及变动的直角坐标系如图 1.1 所示。由条件(2)，行星在单位时间内扫过的面积为

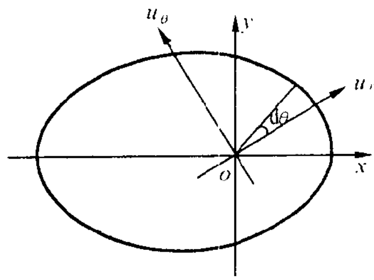


图 1.1

$$A = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

引入单位向量

$$\boldsymbol{u}_r = \cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{u}_\theta = -\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j}$$

则 $\boldsymbol{r}$ 又可表示为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r = r\cos\theta \boldsymbol{i} + r\sin\theta \boldsymbol{j} \tag{1.1}$$

利用

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{u}}_r = \dot{\theta}\ \boldsymbol{u}_\theta \\ \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = -\dot{\theta}\ \boldsymbol{u}_r \end{cases}$$

可得出

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\ \boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\ \boldsymbol{u}_\theta$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r \tag{1.2}$$

(1.2) 中 $\boldsymbol{u}_\theta$ 方向的分量为零，这说明 $\ddot{\boldsymbol{r}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{r}$。

现将椭圆方程改写成

$$\begin{cases} r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta} \\ p = a(1 - e^2),b^2 = a^2(1 - e^2) \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 a、b 为椭圆的两个半轴，e 为离心率。

对(1.3) 中的 r 关于 t 求导两次：

$$\dot{r} = \frac{pe\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}\dot{\theta} = (\frac{p}{1 + e\cos\theta})^2\dot{\theta}\ \frac{e}{p}\sin\theta$$

$$= \frac{2Ae}{p}\sin\theta$$

$$\ddot{r} = \frac{2Ae}{p}\dot{\theta}\ \cos\theta = 2A\dot{e}\ (\frac{1 + e\cos\theta}{p}) - \frac{2A\dot{e}}{p}$$

$$= \frac{2A\dot{\theta}}{pr}(p - r)$$

注意到 $\dot{\theta} = \dfrac{2A}{r^2}$，故

$$\ddot{r} = \frac{(2A)^2(p - r)}{pr^3} \tag{1.4}$$

根据(1.4) 可计算得

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{(2A)^2(p - r)}{pr^3} - r\frac{(2A)^2}{r^4} = -\frac{(2A)^2}{pr^2} \tag{1.5}$$

将(1.5) 代入(1.2)，并根据牛顿第二定律立即可知，作用力与 r^2 成反比。进而可以证明，比例系数 $(2A)^2/p$ 是一个绝对常数，即与哪一颗行星无关。事实上，记行星运行周期为 T，则 $TA = ab\pi$。由(1.3)，$T^2 = Ka^3$，K 为绝对常数，故

$$\frac{A^2}{p} = \frac{(ab\pi)^2}{T^2p} = \frac{(ab\pi)^2}{Ka^3p} = \frac{\pi^2}{K}$$

此即需证。根据以上分析可知，作用于任一行星上的力，方向在太阳与行星的连线上，指向太阳；其大小与两者之间距离的平方成反比，比例系数 $(2A^2)/p$ 是一个绝对常数，这就是万有引力定律。

1－3　有一条逻辑定理是：随便一句假话都能推出任何一句

话。结果真的有人要英国大哲学家罗素证明：从“2 + 2 = 5”推出“罗素是教皇”。你能否帮助罗素解决这个问题。

解　从 $2+2=5$ 可以推出 $1=2$，这说明两个人就是一个人，罗素与教皇是两个人，因此他俩是一个人。

题外的话：本题似乎与数学建模没什么联系，我们想通过这样一个题目强调逻辑的严谨性与思维的开放性的结合。要学会推导的严密性，同时要发挥想像力，使思维插上翱翔的翅膀。

习题 2 解答

2－1　甲乙两人约定中午 12:00 至 13:00 在市中心某地见面，并事先约定先到者在那等待 10 分钟，若另一个 10 分钟内没有到达，先到者将离去。用图解法计算，甲乙两人见面的可能性有多大。

解　设甲、乙两人分别在 12 点 x 分及 y 分等可能到达约定地点，显然，$0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60$。

若两个相遇则有 $|x-y| \leqslant 10$。这是一个几何概率问题，其中，样本空间为

$$A = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$$

它构成了平面直角坐标系中的正方形，见图 2.1。相遇空间为

$$G = \{(x,y) \mid |x-y| \leqslant 10\}$$

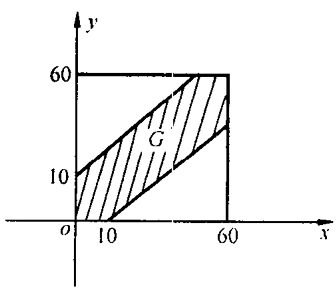


图 2.1

其图形见图2.1阴影处。用 S_A，S_G 分别表示区域A 与G 的面积。从而相遇的概率为

$$P=\frac{S_G}{S_A}=\frac{60\times 60-2\times\frac{1}{2}\times 50^2}{60\times 60}\approx 0.306$$

2-2　设有 N 个人参加某一宴会，已知没有人认识所有的人，证明：至少存在两人，他们认识的人一样多。

证明　设第 i 个人认识的人数为 $S(i)$，则 $S(i)\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$。我们利用反证法证明本题。假设没有 2 个人认识的人数一样多，则 $S(1)$、$S(2)$、…、$S(N)$ 互不相等，则 $S(i)(i=1,2,\cdots,N)$ 将取遍集合 $\{0,1,2,\cdots,N-1\}$ 中的每一个值，即至少存在某两人 k_1,k_2 使 $S(k_1)=N-1,S(k_2)=0$。而对第 k_1 人，由于 $S(k_1)=N-1$，故他必然认识第 k_2 人，故 $S(k_2)$ 至少为 1，与 $S(k_2)=0$ 矛盾，得证。

2-3　某人第一天上午 8:00 由 A 点出发，于下午 6:00 到达 B 处。第二天上午 8:00 他又从 B 处出发按原路返回，并于下午 6:00 回到 A 处。证明：途中至少存在一点，此人在两天中同一时间到达该处。

解　我们从 A 点为始点记路程，设从 A 点到 B 点的路程函数为 $f(t)$，即 t 时刻走的距离为 $f(t)$；同样，设从 B 点到 A 点的路程函数为 $g(t)$。由题意有

$$f(8)=0,f(18)=|AB|,g(8)=|AB|,g(18)=0。$$

令 $h(t)=f(t)-g(t)$，则有

$$h(8)=f(8)-g(8)=-|AB|<0,$$
$$h(6)=f(6)-g(6)=|AB|>0$$

又注意 $f(t)$，$g(t)$ 都是时刻 t 的连续函数，因此 $h(t)$ 也是时刻 t 的连续函数，由连续函数的介值定理，一定存在某时刻 t_0 使 $h(t_0)=0$，即 $f(t_0)=g(t_0)$。

2-4　你要在雨中从一处沿直线走到另一处，雨速是常数，方向不变。你是否走得越快，淋雨量越少呢？

(1) 人体简化为长方柱，表面积之比为前：侧：顶 $=1:a:b$。

选坐标系将人的速度表为$(v,0,0)$，即沿x轴方向行走，$v>0$，而设雨速为(u_x,u_y,u_z)，行走距离为L，写出淋雨量的表示式。

(2) 用图解法说明在什么情况下，走得越快淋雨量越少，在什么情况下则不是这样。

解 淋雨量

$$Q(v)=[|u_x-v|+a|u_y|+b|u_z|]\cdot\frac{L}{v}$$

记$q=a|u_y|+b|u_z|$，则

$$Q(v)=\begin{cases}L(\frac{q+u_x}{v}-1), & v\leqslant u_x\\ L(\frac{q-u_x}{v}+1), & v>u_x\end{cases}$$

在$q\geqslant u_x$和$q<u_x$两种情形下作图2.2。

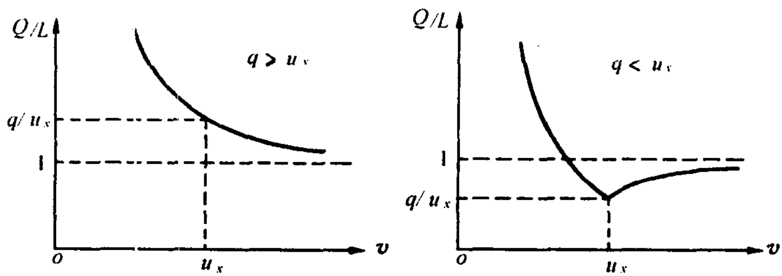


图2.2

从图2.2易看出，当$q\geqslant u_x$时，走的速度越快，淋雨量越小；当$q<u_x$时，如果人的速度不超过雨的水平速度u_x，人走的速度越快，淋雨量越小，但当人的速度超过雨的水平速度u_x时，人走得越快，淋雨量越增加。

2-5 建立铅球投掷的模型。不计空气阻力，在初速度、出手高度一定的条件下，求最佳出手角度。如果你理解铁饼的运动方

式，试建立铁饼掷远的模型。

解 设初速度为 v，出手高度为 h，出手角度为 a，则在下图所示的坐标系下，铅球运动方程为

$$\ddot{x} = 0, \dot{y} = - y, x(0) = 0, y(0) = h,$$
$$\dot{x}(0) = v\cos a, \dot{y}(0) = v\sin a,$$

从中解出 $x(t), y(t)$ 后，可以求得铅球投掷距离为

$$R = \frac{v^2}{g}\sin a\cos a + \left(\frac{v^2}{g^2}\sin^2 a + \frac{2h}{g}\right)^{1/2} v\cos a$$

令 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}a} = 0$，得到最佳出手角度 a^* 及最佳投掷距离 R^* 如下：

$$a^* = \arcsin\frac{v}{\sqrt{2(v^2 + gh)}}, \quad R^* = \frac{v}{g}\sqrt{v^2 + 2gh}$$

2 - 6 在不允许缺货的存贮模型中，某公司边生产边出售，生产速度 K 大于销售速率 r（K，r 均为常数）。时刻 t_0 以后只销售不生产。公司仓库的贮存量 q 呈图 2.3 的周期状。设每次生产开工费为 c_1，单位时间每件产品的贮存费为 c_2，问周期 T 为多大时才使总费用最少？讨论 $K \gg r$ 及 $K \approx r$ 的情况。

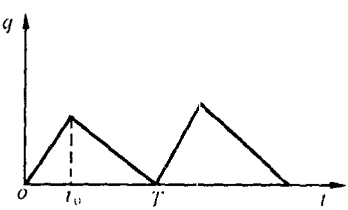


图 2.3

解 单位时间总费用

$$C(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r(K - r)}{2K} \cdot T$$

令 $\frac{\mathrm{d}C(T)}{\mathrm{d}T} = 0$，我们可得到使 $C(T)$ 最小的最佳周期

$$T^* = \sqrt{\frac{2c_1 K}{c_2 r(K-r)}}$$

讨论：

(1) 当 $K \gg r$ 时，$T^* = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}$，相当于不生产的情况。

(2) 当 $K \approx r$ 时，$T^* \to \infty$，因为产量被销售量抵消，所以无法形成贮存量。

2-7　观察鱼在水中的运动发现，它不是水平地游动，而是突发性地、锯齿状地向上游动和向下滑动。可以认为这是在长期进化过程中，鱼类选择的消耗能量最小的运动方式。

(1) 鱼类是以常数 v 运动，鱼在水中的净重是 W，向下滑动的阻力是 W 在运动方向的分力；向上游动时付出的力是 W 在运动方向的分力与游动所受阻力之和，而游动的阻力是滑行阻力的 k 倍；水平游动的阻力也是滑行阻力的 k 倍。写出这些力。

(2) 如图 2.4，证明当鱼从 A 点运动到同一水平线上的 B 点时，沿折线 ACB 运动消耗的能量与沿水平线 AB 运动消耗的能量之比为

$$\frac{k\sin\alpha + \sin\beta}{k\sin(\alpha+\beta)}$$

可认为向下滑行不消耗能量。

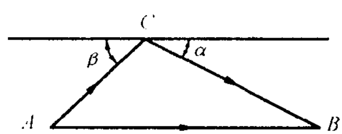


图 2.4

(3) 从经验观察到 $\tan\alpha \approx 0.2$，针对不同的 k 值（$k = 1.5, 2, 3$）根据消耗能量最小的原则，估计最佳的 β 角。

解　(1) 由图形分析易看出，向下滑行的阻力是 $f_1 = W\sin\alpha$，向上游动的力是 $f_2 = W\sin\beta + kW\sin\alpha$，水平游动的阻力为 $f_3 = kW\sin\alpha$。

(2) 由于沿 ACB 运动的能量 $E_{ACB} = f_2 |AB|$，沿 AB 运动的能量 $E_{AB} = f_3 |AB|$，又 $|AC|/|AB| = \sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$，

从而 E_{ACB} 与 E_{AB} 之比为

$$Q = (k\sin\alpha + \sin\beta)/k\sin(\alpha + \beta)$$

(3) 由 $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$,可求得最佳角度 α,β 满足

$$\cos(\alpha + \beta) = 1/k \quad (k > 1)$$

由 $\tan\alpha = 0.2$,得 $\alpha = 11.3°$,对于 $k = 1.5,2,3$ 分别求出 $\beta = 37°$, $45°,59°$。

2-8　报童每天订购的报纸,每卖出一份赢利 a 元,如果卖不出去并将报纸退回发行单位,将赔本 b 元。每天买报人数不定,报童订报份数如超过实际需要,就要受到供过于求的损失;反之,要受到供不应求的损失。设 $P(m)$ 是售出 m 份报纸的概率,试确定合理的订报份数,使报童的期望损失最小。

解　设报童每天订购 Q 份报纸,则其收益函数为

$$y(m) = \begin{cases} am - (Q - m)b, & m \leqslant Q \\ am & m > Q \end{cases}$$

利润的期望为

$$E[y(m)] = \sum_{m=0}^{Q}[(a + b)m - bQ]P(m) + \sum_{m=Q+1}^{+\infty} aQP(m)$$

比较各个 m 的 $E[y(m)]$ 值,使其最大者即为所求。若 m 的取值过多,可将 $E[y(m)]$ 当成 m 的连续函数或借鉴连续函数求极值的办法令 $\frac{dE[y(m)]}{dm} = 0$。

2-9　水库在 t 时刻的水位线高度为 $x(t)$,水库蓄水速度为 $y(t)$,且 $0 \leqslant y(t) \leqslant y_0$,$y_0$ 为某个常数。水库排水发电,排水速度为 m,因此水位高度的变化为

$$\frac{dx}{dt} = y(t) - m \tag{2.2}$$

又已知 $x(0) = x_1$,$x(T) = R$,且水库的效益函数为

$$U(x,y) = a[y - Y]^2 + b[x - X]^2$$

其中 X 为合理水位,Y 为合理的蓄水速度,那么,在时间 $[0,T]$

内,应如何控制 $y(t)$,使水库的效益达到最大?

解 由题目的意思,我们理解,水库的效益最大应是指蓄水速度与水位都达到合理的标准。换句话说,由 $U(x,y)$ 的表达式,水位的效益最大应是效益函数 $U(x,y)$ 达到最小。据此,我们对 $U(x,y)$ 求导,得到

$$2a(y-Y)(y'-Y')+2b(x-X)(x'-X')=0 \quad (2.3)$$

再将(2.2)式从 0 到 t 积分,得到

$$x(t)-x(0)=\int_0^t y(t)\mathrm{d}t-mt \quad (2.4)$$

再由题给条件,得到

$$\int_0^T y(t)\mathrm{d}t=mT+x_1-R \quad (2.5)$$

又将(2.4)式代到(2.3)式,得到

$$2a(y-Y)(y'-Y')=$$

$$-2b\left(\int_0^t y(t)\mathrm{d}t-mt+x_1-X\right)(y(t)-m-X') \quad (2.6)$$

(2.5)式及(2.6)式联合构成了对 $y(t)$ 的控制。

2－10 遗传病属于常染色体遗传模型。记正常基因为 A,不正常基因为 a,其后代 AA,Aa 及 aa 分别表示正常人、隐性患者和显性患者。为防止出现显性患者,我们要求正常人或隐性患者必须与正常人结合。试建立此遗传模型,并讨论若干代之后,正常人与隐性患者的分布趋势。

解 假设 $a_n,b_n(n=0,1,2,\cdots)$ 分别表示第 n 代中,基因型为 AA,Aa 的后代占后代总数的百分比。令 $x^{(n)}=(a_n,b_n)^{\mathrm{T}}$ 为第 n 代的基因分布,$x^{(0)}=(a_0,b_0)^{\mathrm{T}}$ 表示人的基因型的初始分布,显然有

$$a_0+b_0=1 \quad (2.7)$$

我们现在考虑第 n 代与第 $n-1$ 代之间的遗传关系。注意到,第 $n-1$ 代的 AA 型与 AA 型结合,后代全部为 AA 型;第 $n-1$ 代的 Aa

型与 AA 型结合,后代是 AA 型的可能性为 50%。因此,我们有

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}/2 \tag{2.8}$$

同理我们可得到

$$b_n = b_{n-1}/2 \tag{2.9}$$

注意到将(2.8)式与(2.9)式相加,得到

$$a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

递推上式即得到

$$a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$$

我们现在求解(2.8)与(2.9)式联立的方程组。令

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则(2.8)与(2.9)联立的方程组可写成

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} \qquad n = 1,2,\cdots \tag{2.10}$$

递推上式得到

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2 x^{(n-2)} = \cdots = M^n x^{(0)} \tag{2.11}$$

(2.11)式即为第 n 代基因分布与初始分布的关系。下面我们计算 M^n。利用线性代数知识,我们易得到

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$$

将上式代入(2.11)式,得

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = (a_0 + b_0 - b_0/2^n, b_0/2^n)^{\mathrm{T}}$$

最终有