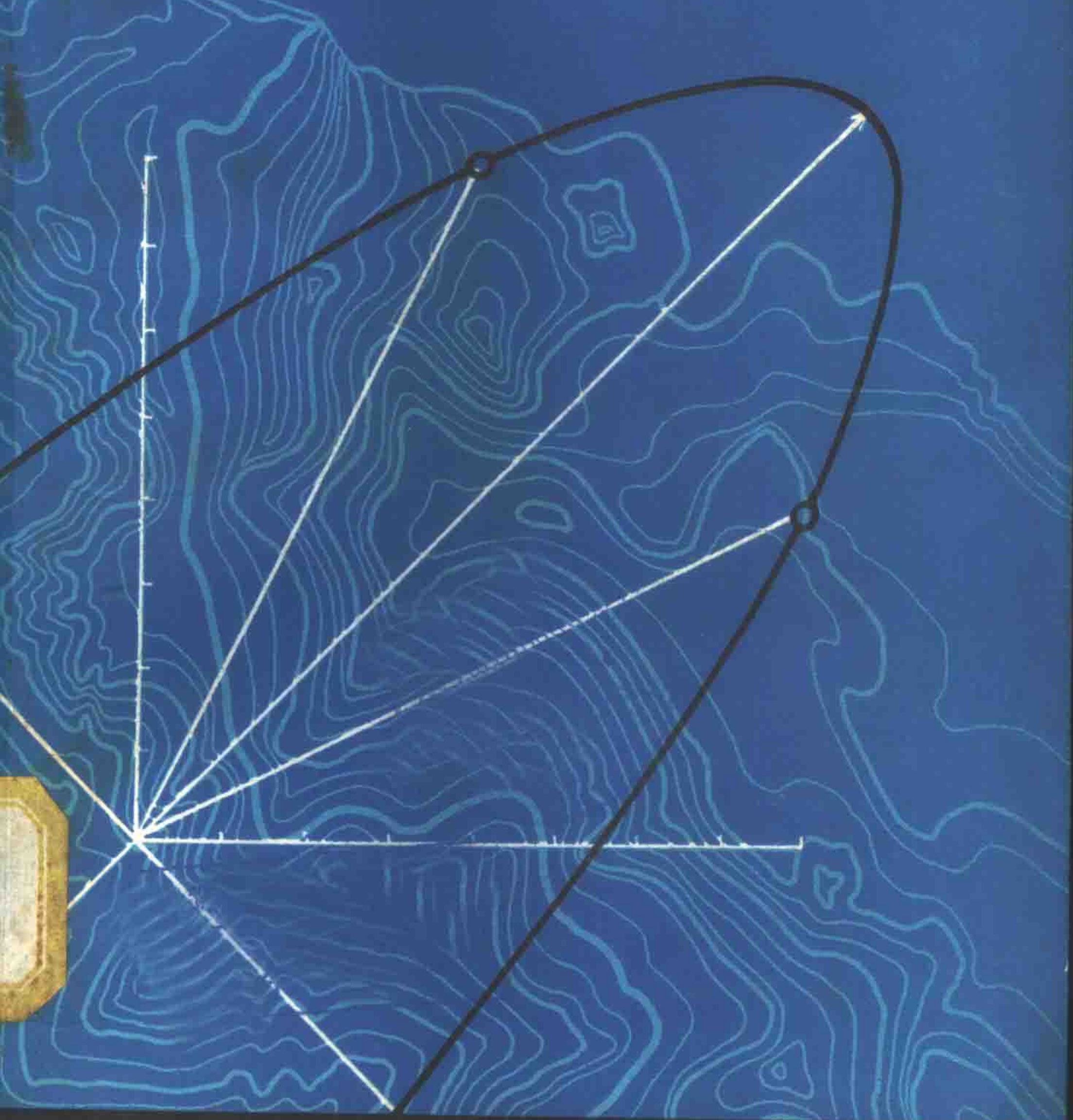
数学地质方法

陈天与 吴锡生 编著



SHUXUE DIZHI FANGFA

数学地质方法

陈天与 吴锡生 编著

吉林人民出版社

内 容 简 介

本书较系统地介绍了数学地质方法及其应用。内容有回归分析、趋势分析、判别分析、簇群分析、因子分析、对应分析以及典型相关分析等。为便于读者学习掌握，前三章介绍了必需的预备知识，包括微积分、矩阵、向量与几何、概率与统计。

本书可供地质专业工作者参考，也可作为地质院校师生的教学参考书。

数 学 地 质 方 法

陈天与　吴锡生　编著

*

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

吉林市印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　$6\frac{7}{8}$印张　150,000字

1980年11月第1版　1980年11月第1次印刷

印数：1—2,460册

书号：13091·72　定价：0.67元

前　言

数学地质是地质学中一门新兴的边缘学科，也是应用数学的一个重要分支。虽然在30年代地质学已开始应用一些数理统计方法，但作为一门具有独立内容、手段和对象的新学科的出现，至今仅有十多年的历史。从本世纪六十年代初，地质学与数学及其近代计算工具电子计算机相结合，才加速了数学地质的发展。

数学地质是在大量地质资料积累的基础上产生的，是生产实践的需要和必然发展。它通过数学模型模拟地质现象，并应用数字计算机快速、有效和正确地处理大量复杂的地质数据。它的出现，引起地质科学的重大变革，标志着传统地质学从定性描述阶段进入定量研究的一个新的发展阶段。使地质现象的表征和描述提高到计算机上的模拟实验，并由确定性模型转向随机性模型，从单变量分析向多变量分析发展。通过数学地质方法的应用，可以对大量地质数据及时进行系统的处理，从而定量了解地质现象的规律和发展过程，以便作出较合理的推断与解释。目前，数学地质方法已广泛应用于地质学的各个领域，如岩石学、地层学、古生物学、沉积学、构造学、矿物学、矿床学、地貌学、水文地质工程地质学、地球化学与地球物理等。然而必须指出的是，在应用数学地质的各种方法时，要密切结合地质实际，否则可能会陷入一大堆数据资料和图表之中，并得出与地质实际不相符

合的错误结论。也就是说，在数据的收集、处理和成果的解释上，要考虑地质背景和充分说明地质意义。

目前，数学地质方法在国外的应用已经比较普遍，对许多地质问题的分析、推断和解释取得了较好的效果。如进行大面积小比例尺矿产资源预测，往往应用趋势分析、移动平均等方法寻找"勘探靶区"。在地质分类和成因研究方面，往往应用簇群分析、判别分析、因子分析、对应分析、典型相关等方法，探讨古生物、岩石、岩相等的分类与成因问题。此外，在化探异常的圈定与评价，矿床的储量计算，地质制图等方面，数学地质方法的应用都取得了很好的效果。

数学地质方法不仅可解决各种地质上的分类、预测、对比和推断解释问题，而且也开始探索地质过程的计算模拟，即以计算机为实验室的实验地质学成因研究方法。当我们建立起一种成因假设后，计算机就在这种假设的基础上去实现一个地质过程，如果得出的结果与客观实际不符，则说明原假设有错误，需要加以修正，之后再去实现该地质过程。这样反复多次，直到根据逐步修正的假设，在计算机上所进行的地质过程能产生与客观实际基本相符为止。这显然要比传统的地质成因的研究要客观一些、严格一些、科学一些。

数学地质的另一新内容是，地质数据的存贮和索取。一个国家、一个省区、一个地质队、一个专题研究项目，都可以将有关的地质数据在计算机中予以存贮。这样，既可以索取原始数据，也可以进行数据处理并将资料绘成图件或其它形式索取，使用户获得综合后的资料。同时，还可以在不同国家之间、不同城市之间、不同地区之间、不同机构之间，通过电子计算机网络遥控终端设备进行遥控存贮与索取。这是一种科学的、现代化的数据管理和使用方法。在这一方面

国外已达相当水平，有些国家已建立起地质数据和常用程序的存贮和检索系统，如美国的RASS、加拿大的GAS、英国的NGDB、瑞典的GEOMAP、芬兰的ADP等。

在国内，数学地质方法正在迅速普及和广泛应用，有着远大的发展前景。

应野外地质工作同志的要求，本书内容曾作为“七·二一”大学数学地质讲座在长春地质学院学报上连载。“讲座”刊登后，得到许多读者的支持与鼓励，并根据在试用过程中发现的问题提出了可贵的意见，这次改写时对原“讲座”中的不足之处进行了修正，补充了一些方法和实例。由于数学地质的发展很快，有关这一领域的文献非常广泛，年年有不少新资料发表。因此，本书不可能包罗数学地质的各种方法，只能介绍一些最基本最常用的方法。但通过对本书中介绍的一些基本方法的了解和掌握，也可以处理广泛的地质问题。

为了便于读者学习本书内容，在前三章中介绍了必需的数学基础知识。对以后各章数学地质方法中的有关数学公式也作了一定的推导，并用实例说明其应用。

景毅教授、陆承新副教授阅读了本书全稿，提出了宝贵意见。孙天纵、张曼珠、纪宏金等老师参加了有关图件的设计和制作，仅向他们表示衷心的感谢。

书中错误之处请读者批评指正。

作　者

1979.3.

目　　录

第一章　微积分复习

本章将概要介绍数学地质方法所用到的一些微积分知识。

一、函数及其几何意义

含有一个自变量 x 的函数 $y=f(x)$，称为一元函数。如果 x、y 的方次均为一次，则 $y=f(x)$在二维空间（即平面）中代表一条直线。例如，$y=ax$，$y=ax+b$（a、b 任意常数）均为直线。如果 x 与 y 或二者之一的方次超过一次，则 $y=f(x)$在二维空间中代表一条曲线。例如 $y^2=2x+1$，$y^3=x^3+x^2+x+3$，$y=x^{10}+\frac{1}{2}x^2+100$等均代表曲线。

含有两个自变量 x、y 的函数 $z=f(x,y)$，称为二元函数。如果 x、y 与z 的方次均为一次，则 $z=f(x,y)$ 在三维空间中代表一个平面，例如 $z=ax$，$z=by$，$z=ax+by+c$（a、b、c 均为常数）都代表一个平面。如果 x、y、z 的方次超过一次，则 $z=f(x,y)$ 在三维空间中代表一个曲面。例如 $z^2=x+y+1$　$z=x^2+y^2+2$　等均代表曲面。

含有 n 个自变量 x_1，x_2，…，x_n 的函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称为 n 元函数。如果 u，x_1，x_2，…x_n 的方次均为一次，则 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $n+1$ 维空间中代表一个超平

面。如果 $u, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方次超过一次，则 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 代表一个超曲面。

二、导　　数

一元函数 $y = f(x)$ 的导数称为常导数。其各阶导数记为 $y' = \frac{dy}{dx}$，$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$，…。例如 $y = x^2 + 3x + 1$，$y' = 2x + 3$，$y'' = 2$，$y''' = 0$。导数在某一点 x_0 的值记为 $y'\Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)$。例如 $y = f(x) = x^2 + 3x + 1$，则 $y'\Big|_{x=5} = f'(5) = 2 \times 5 + 3 = 13$。

二元以上函数的导数称为偏导数。例如 $z = f(x, y)$，其各阶偏导数为 $f'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$，$f'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$，$f''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$f''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，…。注意，$z$ 对 x 求偏导数时，将 y 视作常量，z 对 y 求偏导数时，将 x 视作常量。例如，$z = x^2 + y^2 + 3xy + x + 5y + 100$，则有 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y + 1$，$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 3x + 5$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3$ 等。偏导数在某一点 (x_0, y_0) 的值记为 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0)$ 例如上面函数的偏导数在点 (1.2) 的值为 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1.2)} = f'_x(1, 2) = 1 \times 2 + 3 \times 2 + 1 = 9$。

三、极　　值

设 $y=f(x)$，若在点 x_0 附近任意一点 x，均有

$f(x)<f(x_0)$，则$f(x_0)$称为此函数的极大值

$f(x)>f(x_0)$，则 $f(x_0)$称为此函数的极小值

函数 $f(x)$ 的极大值与极小值简称为极值。使函数 $f(x)$ 取得极值的点 x_0 称为极值点。

从 $f'(x)=0$ 解得的根x_i^0，如果使 $f''(x_i^0)<0$，则 x_i^0是此函数的极大点，$f(x_i^0)$是极大值。如果使 $f''(x_i^0)>0$，则 x_i^0是此函数的极小点，$f(x_i^0)$是极小值。

例　求函数 $f(x)=x^3-9x^2+24x-7$的极值。

求一阶及二阶导数，得到

$$f'(x)=3x^2-18x+24,\quad f''(x)=6x-18$$

解方程　$f'(x)=3x^2-18x+24=0$

得到两个根　$x_1=2,\quad x_2=4$

因为　$f''(x_1)=f''(2)=-6<0,\quad f''(x_2)=f''(4)=6>0$

故　$f(x_1)=f(2)=13$ 为极大值

$f(x_2)=f(4)=9$ 为极小值

假设 $y=f(x,y)$。若在点(x_0,y_0)附近任意一点(x,y)，总有

$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称 $f(x_0,y_0)$为 $f(x,y)$ 的极大值。

$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值。

令　$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

如果从方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$
求得的根(x_1, y_1)满足

$$AC-B^2>0\begin{cases}A>0\text{ 时，} f(x_1,y_1)\text{为极小值}\\ A<0\text{ 时，} f(x_1,y_1)\text{为极大值}\end{cases}$$

$$AC-B^2<0 \qquad f(x_1, y_1)\text{非极值}$$

例 求函数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的极值

计算偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

从方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y=0\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x=0\end{cases}$$

求得两组根为 $\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=1\\y_2=1\end{cases}$

对于第一组根$x_1=0$，$y_1=0$，有$AC-B^2=-9<0$，故在点$(0,0)f(x, y)$无极值。

对于第二组根$x_1=1$，$y_1=1$，有$AC-B^2=27>0$，且

$$A=\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}=6>0$$

故点$(1,1)$为极小点，因此$f(1,1)=-1$为极小值。

以上，我们讨论函数的极值时，自变量之间都是独立无关的，这种极值叫做无条件极值。但在许多实际问题中，自

变量之间有时还需要满足一定的关系，这时函数的极值就叫做条件极值。下面叙述函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在条件

$$F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\cdots,$$
$$F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

下，求条件极值的拉格朗日乘子法：

第一步，引进拉格朗日乘子 λi，作函数

$$F=f+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\cdots+\lambda_mF_m$$

第二步，求偏导数

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\frac{\partial F_2}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial x_i}$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

第三步，解联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\dfrac{\partial F_2}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial F_m}{\partial x_i}=0\\ \qquad(i=1,2,\cdots,n)\\ F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\cdots,F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\end{cases}$$

从第三步中求得的根$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$使函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$达到极值(无条件极值)时，则点$(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$就是使函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$达到条件极值的点。

例 在周长为 $2P$ 的一切三角形中，求面积最大的三角形。

设 x,y,z 是三角形的三个边长，则周长为 $2P$ 的三角形面积S可写为

$$S=f_1(x,y,z)=\sqrt{P(P-x)(P-y)(P-z)}$$

附加条件为 $\varphi(x,y,z)=x+y+z-2P=0$

顺便指出，若 $S>0$ 时，S^2与S具有相同的极值点。因此，我们求 $S^2=f(x,y,z)=P(P-x)(P-y)(P-z)$的极值，这

在计算上是十分简便的：

第一步，引进拉格朗日乘子 λ，作函数

$$F(x,y,z)=f+\lambda\varphi=P(P-x)(P-y)(P-z)$$
$$+\lambda(x+y+z-2P)$$

第二步，计算偏导数

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=-P(P-y)(P-z)+\lambda\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-P(P-x)(P-z)+\lambda\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=-P(P-x)(P+y)+\lambda\end{cases}$$

第三步，解联立方程

$$\begin{cases}-P(P-y)(P-z)+\lambda=0\\ -P(P-x)(P-z)+\lambda=0\\ -P(P-x)(P-z)+\lambda=0\\ x+y+z-2P=0\end{cases}$$

从而求得 $$x=y=z=\frac{2}{3}P$$

故周长一定时，以等边三角形的面积为最大，其最大面积值为

$$S_{max}=\frac{P^2}{3\sqrt{3}}$$

四、积　　分

设函数 $y=f(x)$。如果存在函数 $F(x)$，使关系式 $F'(x)=f(x)$ 成立，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数。因为任意常数C其导数为零，故有 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$。因此，一

个函数 f(x) 的原函数有无穷多个，它们之间仅仅相差一个常数。例如 $(-\cos x)'=\sin x$，所以 $\sin x$ 的原函数为 $-\cos x+c$，$\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c\right)'=x^2+x$，故 x^2+x 的原函数为 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c$ 等。

f(x)的原函数全体 F(x)+c，称为 f(x) 的不定积分。记为

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

例如不定积分

$$\int \sin x dx=-\cos x+c,\quad \int (x^2+x)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+c$$

如下积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

称为定积分。其中 b 与 a 称为积分的上限与下限。从几何上看，上面定积分等于曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴围成的面积(见图1)。

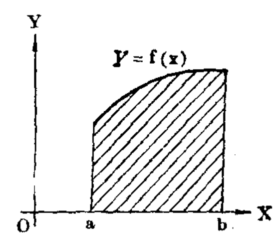


图 1

定积分的计算公式为

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

其中F(b)与F(a)是f(x)的原函数在上限与下限的函数值，例如

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left(-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int_{0}^{1} \left(x^2 + x\right) dx = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{5}{6}$$

如果定积分的上、下限是无限大，例如

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

则称为无空型广义积分。从几何上看，它们仍然代表曲线 $y = f(x)$ 下的面积，只不过在 x 轴方向左端伸向 $-\infty$ 或右端伸向 $+\infty$，或左右两端伸向 ∞ 就是了。计算方法仍然和定积分一样，只不过求得原函数后，代入 ∞ 就是。例如

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x\,dx = -\frac{\sin x + \cos x}{2} e^{-x} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} x\,dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{2}$$

第二章 矩阵、向量与几何

一、矩 阵

矩阵基本概念

表 1 数据为某地矽卡岩型铜矿上五个已验证异常中 Cu，Ag，Bi 的几何平均值：

表 1

异 常 号	Cu(ppm)	Ag(ppm)	Bi(ppm)
1	177	0.95	11.5
2	143	0.64	11.5
3	251	0.54	12.5
4	92	0.30	10.9
5	87	0.25	10

将上述数据排列成矩形表，并在两边加上方括号或圆括号。例如

$$\begin{pmatrix} 177 & 0.95 & 11.5 \\ 143 & 0.64 & 11.5 \\ 251 & 0.54 & 12.5 \\ 92 & 0.30 & 10.9 \\ 87 & 0.25 & 10 \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 177 & 0.95 & 11.5 \\ 143 & 0.64 & 11.5 \\ 251 & 0.54 & 12.5 \\ 92 & 0.30 & 10.9 \\ 87 & 0.25 & 10 \end{bmatrix}$$

就叫做矩阵。因此，矩阵就是一个数据表。在矩阵中的每个数称为矩阵的元素。我们规定横排为行，竖排为列，上面矩阵共有五行三列，称为 5×3 矩阵，也可用 A_{53} 来表示。

行数与列数相等的矩阵称为方阵。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

称三阶方阵，或 3×3 矩阵。

对于只有一列或只有一行的矩阵，例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad B = (-1 \ \ 2 \ \ 0 \ \ 4)$$

A 称为列矩阵或列向量，B 称为行矩阵或行向量。因此，矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

可看成是由两个行向量

$$(0 \ \ 1 \ \ -3 \ \ 0)$$
$$(2 \ \ 5 \ \ 0 \ \ 4)$$

或四个列向量

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

构成。

任意两个矩阵 A 与 B，如果不仅行和列相等，并且对应的元素也都相等，则称矩阵 A 与 B 相等，记成 $A = B$。

矩阵的加减法

若矩阵 A 与 B 的行与列相等，则可相加减，其结果用 $A \pm B$ 表示。$A \pm B$ 中的元素等于 A 与 B 中对应元素相加或相