多邊形平差法

B. B. 波波夫教授著
楊罕 梁再宏 王湘 合譯

人民交通出版社

多邊形平差法

B.B.波波夫教授著
楊 罕 梁再宏 王 湘合譯

人民交通出版社

本書是將多邊形法和結點法實際運用到水準網高程差的平差以及多邊測量的角和座標增量的平差。

書中所述平差法之特徵是用草圖的方式直接列出法方程式並用逐漸趨近法求解，這樣就以極簡單的演算代替了測量上極複雜的用高斯約化法解方程式的計算。書中並列舉了各種圖形的計算實例及其最適宜的方法的選擇，並附有數字乘除表。可供全國性多邊測量、水準測量、三角測量和施測工作之用，無論土地整理測量、森林測量、城市測量、山地測量、水利勘測與道路勘測均可應用，亦可作測量專業學校教學參考之用。

書號：2015-京

多邊形平差法

В.В. ПОПОВ
УРАВНОВЕШИВАНИЕ ПОЛИГОНОВ
ГЕОДЕЗИЗДАТ
МОСКВА 1952

本書根據蘇聯測量出版社1952年莫斯科俄文版本譯出
楊 罕 梁再宏 王 湘合譯

人民交通出版社出版
(北京北兵馬司一號)
新華書店發行
(全國各地)
北京市印刷一廠印刷

初編者：石道全　複審者：徐澄清
1955年2月北京第一版★1955年2月北京第一次印刷
開本：33.5″×46″1/32★印張：5 3/8張
全書135,000字★印數：1～4100冊
定價：0.90元
(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇〇六號)

目　錄

序言 ……………………………………………………………… 1

第一章　多邊形法

§1．單獨多邊形中角和高程差的平差 ……………………………… 3

§2．自由水準網的平差 ……………………………………………… 6

§3．自由多邊形網的角平差 ………………………………………… 11

§4．自由多邊形網中座標增量的平差 ……………………………… 17

§5．用逐漸趨近法解方程式 ………………………………………… 20

§6．用簡化圖表直接解法方程式 …………………………………… 36

§7．按近似公式解方程式 …………………………………………… 42

§8．證明近似公式法平差的嚴密性 ………………………………… 61

§9．採用多邊形法平差非自由網 …………………………………… 65

§10．採用多邊形法平差高程測量的結果 …………………………… 74

§11．計算的檢驗和精度的估算 ……………………………………… 80

第二章　結點法

§12．結點法的要點，按網圖直接列出法方程式 ……………………… 90

§13．用逐漸趨近法求改正數 ………………………………………… 96

§14．直接解法方程式 ………………………………………………… 113

§15．用近似公式解法方程式 ………………………………………… 115

§16．用結點法平差三角高程測量的結果 …………………………… 121

第三章　補充問題

§17．多邊導線的嚴密平差 …………………………………………… 129

§18．多邊形網平差法的選擇 ………………………………………… 138

數字乘除表 …………………………………………………………… 140

序　言

本書是作者提供的將多邊形法和結點法實際應用到水準網中高程差平差及施測經緯儀多邊形網中角平差和各級多邊測量的座標增量平差的參考書。

本參考書供工程師和技術員進行全國性多邊測量、水準測量、三角測量和施測工作之用，供土地整理測量、森林測量、城市測量和山地測量之專家，以及水利勘測和道路勘測等之專家之用；同樣也可供有關學校學生之用。

用此書所述之方法在水準網中的高程差平差及在量角多邊形網中的角平差之結果，與嚴密平差時採用最小二乘法求出之結果相同。當平差較複雜的或較簡單的多邊形網中的座標增量時，一般可以將縱橫座標增量規定爲互相獨立的。這樣規定我們也認爲是十分合理的。

爲了複雜系統的平差，我們特介紹用逐漸趨近法解方程式的多邊形法（自由網）或者結點法（非自由網）。我們所作出的趨近法本質上不同於其他作者所提之趨近法，其主要區別在於確定未知數的全部演算方面，我們是求迅速遞減着的改正數級數的各項，其中大部分由於數值很小而易於心算。這樣就大大地簡化了計算，而不必再機械地重覆作二三次最簡單的算術演算，並可以不需要工程師來平差任何複雜的多邊形網，而由技術員來平差或者甚至由完全不懂最小二乘法的人來平差即可。

本書中所述方法的基本特徵還在於我們將法方程式直接按章圖列出，即不用事先列出誤差方程式或條件方程式。在應用逐漸趨近法時，沒有必要去列出法方程式，因爲未知數可直接根據圖中資料求出。

從某些著作看來，我們的多邊形平差法的嚴密性問題，還有某些不够清楚，例如：1935 年出版的«大比例尺測量技術規範»§45 中指

出：Ⅲ和Ⅳ級水準測量用波波夫法或用等權代替法進行平差，而Ⅱ級水準測量則用最小二乘法平差。由此可以得出結論：該規範的作者，雖然充分估計到我們的方法之簡單程度，但在嚴密性方面却把它與最小二乘法對立起來了；其實，無論平差何種形狀與何種精度的水準網，用我們的方法所求出的結果不會與直接按最小二乘法所求得的結果有所不同。因此，如果說，我們的圖表因爲簡單而能用於低級水準測量，則更可以用於平差精確的和高度精確的水準測量。

根據測量工作人員的興趣，我們在本書中列舉了很多附有詳細說明的各種不同的計算例子。技術員只要在本書中找到適當的例子並徹底地去理解它，不需要詳細地去研究全書，就可以獨立地進行類似性質的工作。

第一章 多 邊 形 法

§1. 單獨多邊形中角和高程差的平差

取沒有對角導線的單獨閉合多邊形，將其全部角（用 n 表示）以同等的精度獨立地測出。在角的總和中求得了容許閉合差 v，這就說明在測角中存在很小的偶然誤差。要求角值總和等於理論值，就要改正測量的結果。

當然，對任何誤差值的改正數，都應當考慮到改正數與誤差值相加的時候，使它可能全部消除誤差值的誤差。在某種意義上說來，改正數應當與誤差成相反的方向。根據條件，我們這種多邊形的全部角都是同等精確地測量出來的，並且是獨立測出的。因此，在缺少任何其他有關每個角在累積閉合差方面的材料時，必須認爲全部角在這個累積中都是同樣有關的，並都加以改正，也就是說平均分給每個角以改正數 $-\dfrac{v}{n}$。

將單獨測出的同等精度的角值總和的閉合差平均分配於每個具有同等精度的加項的原理比以最小二乘法爲基礎的算術平均值原理更易理解。因此，當我們在自己的著作«多邊形平差»* 一書中，敘述直接以剛才提到的〖平均分配法〗爲基礎的多邊形法平差的實際操作時，我們認爲沒有必要再來論證這種平差和最小二乘法的一般嚴密平差的結果的相同性，特別是懂得最小二乘法理論的讀者自己就會很容易相信這一點。順便指出：以最小二乘法爲基礎的算術平均值原理恰恰可以作爲每個等精度的獨立加項的平均改正原理的結果而推論出來。對算術平均值原理的合理性的這種論證，對於我們說來比任何一個現有的以其他各種公理爲基礎的論證更爲確鑿。

* B. B. 波波夫著«多邊形平差»1928—1937年1—5版。

我們認爲：確定多邊形法平差與最小二乘法的一般嚴密平差的結果的同一性，對最小二乘法更爲必要，因爲這樣就更進一步地從剛才提到的我們認爲完全合理的原理的觀點來確證了它自己的地位。可是，在我們的著作中缺少了對多邊形法的嚴密性的直接證明，看來這就是前面所提到過的某些過低估計我們的實際操作法的原因，故在本書中將要作這樣的論證。

閉合多邊形的角測量結果用β_1、β_2、……、β_n表示，而其改正數用(β_1)、(β_2)、……、(β_n)表示，這樣就有條件方程式：

$$(\beta_1)+(\beta_2)+\cdots+(\beta_n)+v=0 \qquad (1)$$

法方程式則爲：

$$nk+v=0 \qquad (2)$$

從而：

$$k=-\frac{v}{n} \qquad (3)$$

最後：

$$(\beta_1)=(\beta_2)=\cdots=(\beta_n)=-\frac{v}{n} \qquad (4)$$

端點支在具有已知的固定方向角的線上的非閉合多邊形的角平差和閉合多邊形的角平差所不同的只是閉合差不一樣，即是：

$$v=\alpha_1+180^\circ\times n-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_n-\alpha_{n+1} \qquad (5)$$

式中：α_1和α_{n+1}——導線起點和終點上的閉合線的方向角。

以同樣的方法可以確定，當平差閉合水準多邊形或非閉合水準多邊形時，每個同精度的高程差h_1、h_2、……、h_n的改正數爲：

$$(h_1)=(h_2)=\cdots\cdots=(h_n)=-\frac{v}{n} \qquad (6)$$

式中：v——導線閉合差。

現在我們來分析一下，當測量結果的精度不同時，採用將閉合差「平均分配於每個具有同等精度的獨立加項」的原理及用最小二乘法進行角平差或高程差平差的實際情況。在這種場合下，考慮到所有觀測情況，首先必須確定觀測的相對權。根據誤差理論可以知道任何帶

有權 p 的值，就精度來說，等於單位權的值的總和，單位權為 $\frac{1}{p}$*。因此如果 n 折角的角度觀測，其權為 p_1、p_2、……、p_n，則每個角參加閉合差積累的分配將與數值 $\frac{1}{p_1}$、$\frac{1}{p_2}$、……、$\frac{1}{p_n}$ 成正比。所以，當消除多邊形角總和的閉合差時，必須恰好與這些數值成正比地分配於每個角。例如：在角的權為 1、⅖、⅔的三角形中，角的總和可以認為與單位權的五個角的總和有同等的精度，因為與角的權成反比的值的總和等於 5：

$$\frac{1}{1}+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=5$$

如果三角形的閉合差為 +15″（假設），則按每個角如此分配：權為 1 的第一個角分配 $-\frac{15''}{5}=-3''$；第二個角為 $-3''\times\frac{5}{2}=-7''.5$；第三個角為 $-3''\times\frac{3}{2}=-4''.5$。

我們現在要證明用最小二乘法的一般圖表的平差也歸結為這樣。

用 p_1、p_2、……、p_n 表示測角 β_1、β_2、……、β_n 的權，並根據條件方程式(1)得法方程式：

$$\left[\frac{1}{p}\right]k+v=0 \qquad (7)$$

從而：

$$k=\frac{-v}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad (8)$$

和

$$(\beta_i)=\frac{-v}{\left[\frac{1}{p}\right]}\cdot\frac{1}{p_i} \qquad (9)$$

以同樣的方法可以確定，如果在水準多邊形中所產生的高程差，不是各測站的個別高程差，而是不同長度的各線段的總和高程差，則

* 按照我們的意見，在測量誤差理論中正應當利用這個原理，作為最初確定權的原理。

閉合差的分配應與線段的權成反比。如果和通常的情况一樣，高程差的總和權與線段的長度或測站數成反比，則平差應歸結爲與這些值成正比地分配閉合差。

爲了更具體起見，我們以後把水準導線高程差的總和的權視爲與導線長度成反比，必要時，可以把這個視爲用安置水準儀站數來表示的假定長度。

§2. 自由水準網的平差

控制測量網通常分爲自由的和非自由的。所謂自由的，就是這樣的一種網，在網內或者只有必要的固定元素（一個點的座標、一條線的方向角，一個點的高程等等），或者完全沒有固定元素，此時可以取任意需要的數。如果有多餘的固定元素存在，而引起了平差值必須嚴格達到的補充條件，就在一定程度上使網變成了非自由網。

我們暫時取任意形式的自由水準網(圖 1)。用羅馬數字表示單獨閉合多邊形，如在草圖中所表示的那樣。導線交叉點用字母 A、B、C 等等表示，並稱它們爲結點。連結各兩個相隣結點的水準導線 AB、BC、CD 等，我們把它們叫做環節。多邊形 I、II、III 等等中的高程差總和的閉合差假定爲：v_1、v_2、v_3 等等。環節實際長度或假定長度*用字母 n 表示，並附以包含該環節的多邊形的號碼。例如，僅屬於第一個多邊形的環節 AB 之長用 n_1 表示，環節 BC 之長用 n_2 表示，同時屬於多邊形 I 和 II 的環節 BD 之長就必須用 $n_{1.2}$ 表示，環節 CD 之長用 $n_{2.3}$ 表示，其餘類推。符號 n_3 在這個系統內將表示環節 AE 和 CG 的長度之和（圖 1），因爲這兩個環節僅屬於多邊形 III。

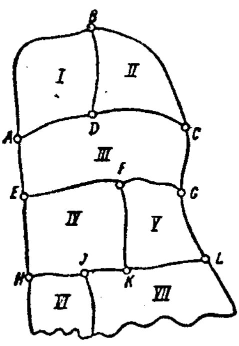

圖 1

同樣，沿環節 AB 測出來的高程差總和，即 B 點到 A 點之高程

---

* 從其具有較大的共同性來說，環節的長度我們是指沿環節所測出來的與高程差總和的權成反比的數。

差用 h_1 表示，環節 BC 的高程差用 h_2 表示；沿第一多邊形導線所取的環節 BD 之高程差用 $h_{1.2}$ 表示，環節 CD—$h_{2.3}$ 等等。高程差總和之改正數仍用這些符號括在括弧內表示，即爲 (h_1)、(h_2)、$(h_{1.2})$ 等等。顯然，高程差和內環節的高程差改正數有如下的比例關係：

$$\left.\begin{aligned} h_{1.2}&=-h_{2.1}, & (h_{1.2})&=-(h_{2.1}) \\ h_{1.3}&=-h_{3.1}, & (h_{1.3})&=-(h_{3.1}) \\ h_{2.3}&=-h_{3.2}, & (h_{2.3})&=-(h_{3.2}) \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

依此類推。

如果網中每個閉合多邊形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ等等互不相關，也就是說，沒有用聯接條件使彼此發生關聯，則根據上節的分析，與施測導線的單位長度相應的每個高程差具有同一改正數。用 k_1 表示多邊形Ⅰ的這個改正數，我們就可以求得這個多邊形整個周長等於 $n_1+n_{1.2}+n_{1.3}$ 的改正數總和如下：

$$(n_1+n_{1.2}+n_{1.3})k_1$$

同樣，多邊形Ⅱ的改正數總和爲：

$$(n_2+n_{1.2}+n_{2.3})k_2$$

多邊形Ⅲ爲：

$$(n_3+n_{1.3}+n_{2.3}+n_{3.4}+n_{3.5})k_3$$

依此類推。

其中每一個改正數總和，我們都令其與相應多邊形的閉合差相等而取相反符號，並從所得方程式中找出全部未知數 k，即每個多邊形中單位周長所得之高程差改正數。

但是，多邊形聯接條件稍微改變了上述的情況。例如多邊形Ⅰ，其中環節 BD（圖1）的高程差自然應等於多邊形Ⅱ的環節 DB 的高程差而取相反符號；多邊形Ⅱ中的環節 DB 之具有相反符號的改正數 $n_{1.2}k_2$，即—$n_{1.2}k_2$ 值就是多邊形Ⅰ中環節 BD 的高程差改正數。

同樣地，多邊形Ⅲ中的環節 AD 之高程差改正數 $n_{1.3}k_3$ 改變爲—$n_{1.3}k_3$，就成了多邊形Ⅰ中的環節 DA 之高程差改正數。

總的說來，消除多邊形Ⅰ的閉合差 v_1 的條件，可以列成如下的方程式：

$$(n_1+n_{1.2}+n_{1.3})k_1-n_{1.2}k_2-n_{1.3}k_3+v_1=0.$$

同樣，可以將消除多邊形Ⅱ和Ⅲ以及其他多邊形中的閉合差的條件列成方程式。

我們可將 r 個多邊形的網（見圖1）列出下列帶有 r 個未知數的 r 個方程式系：

$$\left.\begin{aligned}&(n_1+n_{1.2}+n_{1.3})k_1-n_{1.2}k_2-n_{1.3}k_3+v_1=0\\&(n_{1.2}+n_2+n_{2.3})k_2-n_{1.2}k_1-n_{2.3}k_3+v_2=0\\&(n_{1.3}+n_{2.3}+n_3+n_{3.4}+n_{3.5})k_3-n_{1.3}k_1-n_{2.3}k_2\\&\qquad\qquad-n_{3.4}k_4-n_{3.5}k_5+v=0\end{aligned}\right\}(11)$$

依此類推。

這些方程式按照草圖，利用下面這個簡單的法則，很容易直接列出來：在每個多邊形方程式中首先列入［本身的］改正係數 k 乘多邊形的全周長；從該值中減去各相隣多邊形的改正係數並乘相應環節的長度，再加上該多邊形的閉合差，然後整個總和等於零。

應用某種方法解方程式系(11)後，我們可求出 k_1、k_2、……、k_r 之值，即水準導線的單位長度的每個多邊形所具有的高程差改正數。

因此，以環節 AB 的高程差爲例，它們得到單位長度改正數 $+k_1$，僅屬於多邊形Ⅱ的環節 BC 的高程差得到單位長度改正數 $+k_2$，環節 AE 和 CG 得到單位長度改正數 $+k_3$ 等等。

對於同時屬於兩個相隣多邊形的環節 AD、BD、DC，每個單位周長的高程差改正數按照列方程式的程序是從兩個改正係數的差數中求得的。例如環節 BD，按多邊形1而言，其單位長度的改正數爲：

$$k_1-k_2$$

而按多邊形Ⅱ而言，環節 DB 的改正數則爲：

$$k_2-k_1$$

同理，環節 AD 中單位長度的改正數爲：

$$k_3-k_1$$

而環節 DA 則爲：

$$k_1-k_3$$

依此類推。

各環節高程差總和的改正數按下列各式求得:

$$\left.\begin{aligned}(h_1)&=n_1k_1\\(h_2)&=n_2k_2\\(h_{1.2})&=n_{1.2}(k_1-k_2)\\(h_{1.3})&=n_{1.3}(k_1-k_3)\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

例1 取草繪於圖2的水準網。環節長度（以公里計）標示於圖中小圓圈內。閉合差（用公厘表示）寫在每個多邊形的裏面。

根據前述規則，照圖列出改正係數的方程式如下:

Ⅰ…………… $11k_1-2k_2-3k_3+34=0$

Ⅱ……………$-2k_1+9k_2-3k_3-27=0$

Ⅲ……………$-3k_1-3k_2+12k_3+9=0$

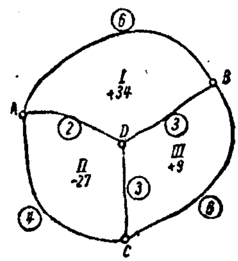

圖 2

解這些方程式，求出:

$$k_1=-3$$
$$k_2=+2$$
$$k_3=-1$$

各環節的改正數（公厘）將爲:

環節 AB……$6k_1\qquad=-18$

環節 BD……$3(k_1-k_3)=-\ 6$

環節 DA……$2(k_1-k_2)=-10$

環節 BC……$6k_3\qquad=-\ 6$

環節 CD……$3(k_3-k_2)=-\ 9$

環節 CA……$4k_2\qquad=+\ 8$

現在要證明用上面所述的方法平差水準網的結果和直接用最小二乘法求出的結果相同。

試用條件觀測法平差圖1中的網。

各環節高程差總和的權，我們假定其與環節長度成反比。因而與高程差總和的權成反比的數值將爲:

環節 AB:

$$\pi_1=\frac{1}{p_1}=n_1$$

環節 BC:

$$\pi_2=\frac{1}{p_2}=n_2$$

環節 BD:

$$\pi_{1.2}=\frac{1}{p_{1.2}}=n_{1.2}$$

依此類推。

網中條件方程式的數目等於閉合多邊形的數目（在前面我們用 r 表示）。計及比例關係(10)，根據圖 1 列出如下條件方程式:

$$\left.\begin{aligned}&\text{I}\cdots\cdots(h_1)+(h_{1.2})+(h_{1.3})+v_1=0\\&\text{II}\cdots\cdots(h_2)-(h_{1.2})+(h_{2.3})+v_2=0\\&\text{III}\cdots\cdots(h_3)-(h_{1.3})-(h_{2.3})+(h_{3.4})+(h_{3.5})+v_3=0\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

依此類推。

平差不同精度的值時，繫數法方程式具有下列的一般形式:

$$\begin{aligned}&[\pi aa]k_1+[\pi ab]k_2+\cdots\cdots+[\pi ar]k_r+g_1=0\\&[\pi ab]k_1+[\pi bb]k_2+\cdots\cdots+[\pi br]k_r+g_2=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&[\pi ar]k_1+[\pi br]k_2+\cdots\cdots+[\pi rr]k_r+g_r=0\end{aligned}$$

根據條件方程式(13)，法方程式將爲:

$$\left.\begin{aligned}&\text{I}\ (n_1+n_{1.2}+n_{1.3})k_1-n_{1.2}k_2-n_{1.3}k_3+v_1=0\\&\text{II}\ -n_{1.2}k_1+(n_{1.2}+n_2+n_{2.3})k_2-n_{2.3}k_3+v_2=0\\&\text{III}\ -n_{1.3}k_1-n_{2.3}k_2+(n_{1.3}+n_{2.3}+n_3+n_{3.4}+n_{3.5})k_3-\\&\qquad\qquad-n_{3.4}k_4-n_{3.5}k_5+v_3=0\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

依此類推。

根據繫數用一般方法表示改正數時，求得:

$$\left.\begin{aligned}&(h_1)=n_1k_1\\&(h_2)=n_2k_2\\&(h_{1.2})=n_{1.2}(k_1-k_2)\\&(h_{1.3})=n_{1.3}(k_1-k_3)\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

依此類推。

方程式（14）和（15）與方程式（11）和（12）是一樣的。這就證明

用我們這種多邊形法平差的結果與用最小二乘法的一般圖表平差的結果是相同的。顯然，我們列入本節開始部分的那些改正係數k_1、k_2……、k_r，就是條件方程式的繫數。

§3. 自由多邊形網的角平差

取任意形式的網，如圖3，以同樣的精度測出網中每個閉合多邊形的角。

在經緯儀導線和多邊測量中，角度觀測一般採用簡易法，就是在每個點上瞄準——盤右和盤左——前標桿和後標桿，如果是在結點上的話，還要瞄準測標桿，瞄準次數相同，大部分是兩次。此時每個角是從兩個同精度的獨立方向的差數中求得。顯然，在這種條件下，網中每個環節的角數應當視爲與方向的二倍值或者邊的數目相等。以後我們會看出，環節中角度計算的這個最簡單的方法同時又是使平差結果嚴格符合於最小二乘法的唯一正確的方法。

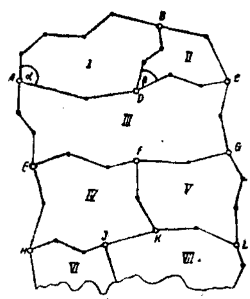
圖 3

因此，在這次應當取構成環節的邊數，而不取與環節中角總和的權成反比之值。當平差水準網時，我們用字母n表示這些值，並附以包含各環節的多邊形的號碼。因此，根據圖3將爲：

$$\text{環節 } AB\cdots\cdots n_1 = 5$$
$$\text{環節 } BC\cdots\cdots n_2 = 2$$
$$\text{環節 } BD\cdots\cdots n_{1\cdot2} = 3$$

依此類推。

符號n_3應表示環節AE和CG中的邊數和，因爲這兩個環節僅屬於多邊形Ⅲ，因此：

$$n_3 = 3 + 2 = 5$$

在網中與相當長的邊並列的，雖然還有很短的邊或者一般說來還有些邊，其測量出來的方向因爲某種原因而不如其他邊準確，但這並不會改變事情的本質。由此，有時角度應視爲不同精度。在這種情況

下，顯然，邊也要取具有不同權的邊，例如，任何一個過短的邊有時需要視爲不是一個邊而是兩個或三個邊，因爲這個邊所得標準長度的一個邊（一對方向）的改正數不是一〔份〕，而是二至三〔份〕。

用 k_1 表示多邊形Ⅰ中每個同精度角（一對方向）的改正數，k_2 表示多邊形Ⅱ的這種改正數，餘依此類推。根據平均分配閉合差於每個同精度的各獨立項的原理，將消除多邊形Ⅰ的閉合差的條件列成方程式。該多邊形的每一個角（一對方向）的未知改正係數暫定爲 k_1。多邊形Ⅰ以環節 BD 與多邊形Ⅱ相隣。在這個環節上的多邊形Ⅰ的各個角度與多邊形Ⅱ的相應角度合成 360°。按照這個環節改正多邊形Ⅱ的角值爲：

$$+n_{1.2}k_2$$

而這又改變多邊形Ⅰ的角總和爲：

$$-n_{1.2}k_2$$

此外，多邊形Ⅰ又以環節 DA 與多邊形Ⅲ相隣，因此，分配後者的閉合差時，多邊形Ⅰ在環節 DA 上的角總和爲：

$$-n_{1.3}k_3$$

這樣，多邊形Ⅰ的閉合差的消除條件，必須列成如下的方程式：

$$(n_1+n_{1.2}+n_{1.3})k_1-n_{1.2}k_2-n_{1.3}k_3+v_1=0$$

以同樣的方法推論多邊形Ⅱ、Ⅲ及網內所有其他多邊形，我們再回復到線方程式系(11)，在這個系統中，方程式數目等於未知改正係數的數目。

根據圖3，方程式系有如下的形式：

$$\text{Ⅰ}\cdots\cdots 10k_1-3k_2-2k_3+v_1=0$$

$$\text{Ⅱ}\cdots\cdots -3k_1+8k_2-3k_3+v_2=0$$

$$\text{Ⅲ}\cdots\cdots -2k_1-3k_2+15k_3-3k_4-2k_5+v_3=0$$

依此類推。

解上列方程式系，就可求出全部未知係數 k，即每個多邊形的一個角（一對方向）應有的改正數。

按照列出改正係數的方程式時所引用的原理，各環節的角的改正數總和爲：

$$\left.\begin{array}{l}\text{環節 } AB\cdots\cdots n_1 k_1 \\ \text{環節 } BC\cdots\cdots n_2 k_2 \\ \text{環節 } BD\cdots\cdots n_{1.2}(k_1-k_2) \\ \text{環節 } DB\cdots\cdots n_{1.2}(k_2-k_1) \\ \text{環節 } DA\cdots\cdots n_{1.3}(k_1-k_3)\end{array}\right\} \tag{16}$$

依此類推。

至於位於網的圓周的環節 AB、BC、CG 等等（圖 3），一個角的所得實際改正數，顯然等於相應的改正係數 k。例如：AB 線上的每一個角得到改正數 $+k_1$，BC 線——改正數 $+k_2$ 等等。位於網內並同時屬於兩個相鄰多邊形的環節 BD、AD、DC 等各個角的改正數將爲兩個 k 的差數。例如，位於多邊形Ⅰ和Ⅱ之間並按多邊形Ⅰ取的 BD 線，右角應得改正數：

$$k_1-k_2$$

而左角：

$$k_2-k_1$$

對環節 DC 來說，每個右角的改正數必須爲：

$$k_3-k_2 \text{ 等等}$$

結點上的角改正數嚴格推論起來，稍微有些不同。例如，結點 A（圖 3）上的 α 角改正數爲：

$$(\alpha)=k_1-\frac{1}{2}k_3 \tag{17}$$

因爲它的兩個邊都在多邊形Ⅰ上，而只有一邊在多邊形Ⅲ上。同理，多邊形Ⅱ上的 β 角的改正數爲：

$$(\beta)=k_2-\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}k_3 \tag{18}$$

不過，在實踐中用不着注意這些細節。有時只要大約精密地求出各環節的全部角的改正數總和就行了，至於將這些改正數按各個角來進行分配，就可以不必完全均等，因爲這裏要考慮到按規定精度化整角度的必要性和首先改正短邊角度的合理性等等。

例 2　將圖 4 中的網角進行平差。角閉合差寫在每個多邊形內的長方形小