PEKING UNIVERSITY
·1898·

高等数学

生化医农类

（修订版）

上　册

周建莹　张锦炎　编著

北京大学出版社

高等学校数学基础课教材

高 等 数 学

（生化医农类）

（修 订 版）

上 册

周建莹 张锦炎 编著

北京大学出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册).生化医农类/周建莹,张锦炎编著.—2版(修订版).—北京:北京大学出版社,2002.8

ISBN 7-301-05379-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①周… ②张… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 084982 号

书　　　名:**高等数学(生化医农类)(修订版)(上册)**

著作责任者:周建莹　张锦炎　编著

责 任 编 辑:刘　勇

标 准 书 号:ISBN 7-301-05379-7/O·0527

出　版　者:北京大学出版社

地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn

电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　编辑部 62752021

电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

印　刷　者:北京大学印刷厂

发　行　者:北京大学出版社

经　销　者:新华书店

850×1168　32 开本　10.375 印张　250 千字

1985 年 12 月第 1 版　　2002 年 8 月修订版

2002 年 8 月第 10 次印刷

印　　　数:50 001—54 000 册

定　　　价:13.50 元

修订版前言

（第二版说明）

我们编写的《高等数学》（上下册）自 1985 年出版以来，已经在北京大学及其他高等院校的生物、化学及医学类各专业使用 16 年了，总发行量 5 万余套. 在这十多年的教学实践中，我们积累了不少经验，也得到了使用这套教材的其他教师的许多宝贵建议. 为了进一步反映这些年来的使用经验，提高这套教材的质量，使之更符合教学规律和教育改革的要求，这次我们花了较长的时间，重新审查了全书各章节的文字叙述与例题和习题的配置，做了必要的修改，并在内容上做了一定的增添.

在这次修订中，我们增加了泰勒公式、牛顿近似求根法、关于重积分变量替换的一般公式等，特别是增加了傅里叶级数与傅里叶积分，以使得这套教材在内容上更丰富，在体系上更加完整. 并使这套教材的适用对象更加广泛：生、化、医、农及工科各专业都可选用. 需要说明的是，所加内容都是相对独立的，所以在学时不足的情况下，少讲或不讲其中某些内容也是可取的. 这应当由不同的专业根据实际情况决定.

在这次修订中，我们充实了习题. 增加了一部分有助于理解数学概念的题目和一部分应用性题目. 另外，适当添加了一些较难的题目，以训练学生的独立思考能力. 在习题答案部分增加了提示与解答，以期对有困难的同学有所帮助. 习题中还有一些带星号的题目，这些题目是留给有兴趣、有余力的同学练习的. 它们超出了教学的基本要求. 因此，不做这些题目，或做不出其中的某些题目，不能被认为没有达到教学要求.

在这次修订后，本书篇幅虽略有增加．但我们仍然希望它是一本重点突出的简明教程．根据我们的经验，由于现在学生能力有所提高，而且使用过程中教员可根据教学要求对本教材的内容进行取舍，所以增加了内容并不要求增加学时；也就是说，这套教材依然适用于两学期(每周 4 学时)的课程．

北京大学出版社刘勇同志促成了这次修订工作，并为此付出了辛勤劳动．我们谨在此表示衷心感谢！

我们诚恳地欢迎使用此书的各位教师与学生随时提出批评与建议，并请把意见反馈给我们．

张锦炎　周建莹

于北京大学数学学院

2002 年 2 月

前　言

本书是根据作者在北京大学多次讲授化学类高等数学时所用的讲义编写成的. 内容包括一元、多元微积分,空间解析几何,级数与常微分方程. 讲授约需 140 学时.

作为一本化学类高等数学简明教程,我们力图讲清概念,并着重阐明如何从物理、化学等问题抽象出这些概念. 理论的要求则适当放低. 例如,明确地承认实数连续函数的性质. 对证明较难或技巧较高的定理只严格地叙述而不加证明. 这样做不影响这些定理的应用,也不影响内容的系统性. 书中多数定理的证明过程比较直接简单,我们希望通过这些证明来训练读者一定的推理能力;基本的计算方法多半包含在例题与习题之中,所以做这些例题是讲课不可缺少的一部分. 此外,同学们还必须做一定数量的习题,才能真正把方法学到手.

为了照顾到不同类型读者的需要书中内容比大纲稍多一些.

我们希望读者学完本教程后能够应用高等数学这一工具,并且初步具备自学其他数学的条件. 当然这些都只是作者的愿望,因为我们的经验有限,水平不高,一定有很多缺点,甚至还有错误之处,衷心地希望得到各方面的批评与指正.

编写过程中蒋定华、徐信之等使用过原来讲义的同志们提出了不少建设性的意见. 徐信之同志加配了习题并给出了全部习题的答案,在此一并表示感谢.

张锦炎　周建莹

于北京大学数学系

1985 年 11 月

内容简介

本书是高等学校生化医农类“高等数学”基础课的教材．本书是修订版．全书共分上、下两册出版．上册共分六章，内容包括：微积分的准备知识（函数、极限、连续性），微商与微分，微分中值定理及其应用，不定积分，定积分，空间解析几何；下册共分五章，内容包括：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，常微分方程．每节配有适量习题，书末附有习题答案与提示，供教师和学生参考．

本书第1版于1985年出版，发行5万余套，普遍受到教师和学生的好评．为了适应新世纪的教学要求，作者经过多年教学实践并征求其他任课教师16年来使用该套教材的意见，对第一版教材作了修订．本次修订对原书的内容作了增删，结构作了调整．本书增加了泰勒公式、牛顿近似求根法、傅里叶级数与傅里叶积分等内容，使之内容更丰富、体系更完整，更适合生物、化学、医学、农科及有关专业的教学需要．

本书可作为综合大学、高等师范院校生物、化学、医学、农科各专业的本科生教材，也可作为工科及相关专业本科生的教材或学习参考书．

目　　录

第一章　微积分的准备知识

§1　实数与其绝对值

1. 实数

从生产实践过程中，人类最早认识的是自然数：1，2，…. 由于作加减法的需要，增添了零与负整数，便将自然数扩充为一般整数. 对整数作乘除法，便产生了有理数. 任一有理数都可表为$\frac{m}{n}$的形式，其中m,n为整数且$n\neq 0$. 公元前五百多年，古希腊人发现了等腰直角三角形的腰与斜边没有公度，从而证明了$\sqrt{2}$不是有理数. 这样，人们便发现了无理数的存在. 所谓无理数，可理解为无限不循环小数. 全体有理数与全体无理数合并所成的集合，称为**实数集合**，通常用$\boldsymbol{R}$表示实数集合. 简言之，有理数与无理数统称为**实数**.

引进数轴（即在一条直线上取定了原点，并规定了单位长度及正方向）后，全体实数与数轴上的全体点之间便有了一一对应的关系.

给定两个实数a与b $(a<b)$，我们把满足$a\leqslant x\leqslant b$的全体x组成的数集合称为**闭区间**，记作$[a,b]$，它在数轴上表示从a到b的有限线段（包含两个端点）. 满足$a<x<b$的全体x的数集合称为**开区间**，记作(a,b)，它在数轴上表示夹在a与b之间的有限线段（不包含两个端点）. 满足$a<x\leqslant b$或$a\leqslant x<b$的全体x的数集合称为**半开**或**半闭区间**，分别记作$(a,b]$或$[a,b)$. 此外，无穷区间$(a,+\infty)$是指满足不等式$a<x$的全体x的数集合. 还有$(-\infty,b)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$等等，意义类似. 需要

注意,“$+\infty$”与“$-\infty$”都是符号,不能当作实数来看待.

2. 实数的绝对值

任一实数 a 的**绝对值**记作 $|a|$,它的定义是

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

由定义可看出,对任意实数 a,下列各式总成立:

$$|a| \geqslant 0, \quad |a| = |-a|, \quad -|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

从数轴上看,a 的绝对值 $|a|$ 就是 a 到原点的距离. 因此,给定了一个正数 r,满足 $|x| \leqslant r$ 的全体 x 的数集合恰好是闭区间 $[-r, r]$. 也就是说,绝对值不等式 $|x| \leqslant r$ 与普通不等式 $-r \leqslant x \leqslant r$ 是等价的,即

$$|x| \leqslant r \Longleftrightarrow -r \leqslant x \leqslant r, \quad r > 0.$$

今后我们经常要用到形如 $|x - x_0| < r$ 的不等式,其中 x_0, r 是给定的数且 $r > 0$. 由上可知

$$\begin{aligned} |x - x_0| < r &\Longleftrightarrow -r < x - x_0 < r \\ &\Longleftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r. \end{aligned}$$

也就是说,满足 $|x - x_0| < r$ 的全部 x 组成的数集合,是一个以 x_0 为中心,长度为 $2r$ 的开区间(见图 1.1). 我们把这个开区间称为**点 x_0 的 r 邻域**,记作 $U_r(x_0)$,即

$$U_r(x_0) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid |x - x_0| < r\}.$$

将点集 $U_r(x_0) \backslash \{x_0\} \equiv (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ 称为 x_0 的**空心 r 邻域**.

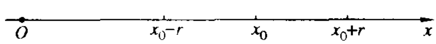

图 1.1

习 题 1.1

1. 设 a, b 为两实数,证明下列不等式:

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$;　　　(2) $||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

2. 求下列方程的解：

(1) $|3x+5|=4$;　　　(2) $|6-5x|=7$.

3. 求下列不等式的解集合所对应的区间：

(1) $|x+3|<1$;　　　(2) $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1$;

(3) $\left|\dfrac{2x+1}{3}\right|<1$;　　　(4) $\left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1$.

4. 将下列区间表成绝对值不等式 $|x-x_0|<r$ 的形式：

(1) $3<x<9$;　　　(2) $-5<x<3$.

5. 对下列各题中所给出的函数 $y=f(x)$，定值 y_0，以及正数 r. 问：当 x 在哪个区间内取值时，才能保证 $f(x)$ 的值位于 y_0 的 r 邻域内？

(1) $y=x^2$, $y_0=100$, $r=1$;

(2) $y=\sqrt{x-7}$, $y_0=4$, $r=0.1$;

(3) $y=\dfrac{120}{x}$, $y_0=5$, $r=1$.

6. 对下列各题中所给出的函数 $y=f(x)$，数 x_0 与 y_0，以及正数 r. 当 x 在哪个区间内取值时，才能使 $f(x)\subset U_r(y_0)$？请将 x 所在的区间表成 $|x-x_0|<\delta$ 的形式.

(1) $y=-\dfrac{x}{2}+1$, $x_0=6$, $y_0=-2$, $r=\dfrac{1}{2}$;

(2) $y=mx$, $x_0=2$, $y_0=2m$, $r=0.03$, $m\neq 0$.

7. 一圆柱形容器的半径为 6 cm，要使该容器内所盛液体的体积与 1000 cm^3 的误差不超过 10 cm^3. 问：容器内该液体的液面高度 h 必须控制在何范围内？

§2　变量与函数

1. 常量与变量

在生产实践和科学实验中，人们常常遇到各种各样的量，如长

度、面积、体积、时间、温度、质量、压力等等. 在某个过程中，有的量保持固定的值，称之为**常量**；有的量可以取不同的值，称为**变量**. 例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体分子的个数是常量，而气体的温度和压力是变量.

高等数学与初等数学的重要区别在于：高等数学主要是处理变量的，而初等数学则大体上是处理常量的. 因此，变量是高等数学的基本研究对象.

2. 变量间的函数关系

在很多实际问题中，常常能发现其中一个变量依赖于另外一个或几个变量. 在微积分学中，首先要研究的就是变量之间的某种确定的依赖关系，也就是研究两个或两个以上的变量之间的函数关系. 本章中我们只讨论两个变量的情形. 粗略地说，两个变量之间的函数关系，就是它们的数值之间的一种对应关系. 在给出函数定义之前，先举几个实例.

例 1 在初速为 0 的自由落体运动中，落体经过的路程 S 与时间 t 是两个变量. 如果时间 t 是从运动开始时计算起的，且当 $t=0$ 时，$S=0$，则 S 与 t 之间存在着如下的关系：

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

其中 t_0 是着地时间，g 是重力加速度. 根据上面的公式，我们可以求出在每一个时刻 $t=t_1(0\leqslant t_1\leqslant t_0)$落体降落的路程

$$S_1 = \frac{1}{2}gt_1^2.$$

例 2 一个地区一天中的气温 T 是随着时间 t 而变化的. 某地区的气象台用自动记录器记录了某一天 24 小时的气温随时间而变化的情况. 自动记录器记下来的是一条曲线. 虽然我们不可能找到像例 1 中那样的表达式，但是，根据这个图形我们可以知道这个地区在每一个时间 $t_0(0\leqslant t_0\leqslant 24)$的气温 T_0（见图 1.2).