工科数学的内容、方法与技巧丛书

概率论与数理统计

内容、方法与技巧

孙清华 孙昊

华中科技大学出版社

工科数学的内容、方法与技巧丛书

概率论与数理统计
内容、方法与技巧

孙清华　孙　昊

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 内容、方法与技巧/孙清华 孙昊
武汉:华中科技大学出版社,2002年10月
ISBN 7-5609-2851-X

Ⅰ.概…
Ⅱ.①孙… ②孙…
Ⅲ.概率论与数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O21

概率论与数理统计
内容、方法与技巧
孙清华 孙昊

责任编辑:徐正达 李立鹏 封面设计:刘 卉
责任校对:张兴田 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山
邮编:430074 电话:(027)87542624

录 排:武汉彩艺广告工作室
印 刷:湖北省通山县印刷厂

开本:860×1168 1/32 印张:16.375 字数:395 000
版次:2002年10月第1版 印次:2002年10月第1次印刷 印数:1—4 000
ISBN 7-5609-2851-X/O·274 定价:18.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内容简介

本书是工科数学的内容、方法与技巧丛书之一，是大学生学习概率论与数理统计的优秀辅导书和报考研究生的必备参考书，更是有志于掌握概率论与数理统计方法的读者的一本极好的指导书.

本书从教育部关于《概率论与数理统计课程的教学要求》与《硕士研究生入学考试数学考试大纲》出发，并略有提高地按章节对各个问题的内容、方法与技巧进行了归纳提高、释疑解难、分析演绎，以帮助读者理解和掌握概率论与数理统计方法. 本书还附有实行全国硕士研究生入学统一考试以来的全部概率论与数理统计试题的解答，提供给考研读者作为参考.

希望本书能成为读者的良师益友，欢迎读者选用本系列丛书.

前　　言

“概率论与数理统计”是高等学校的一门重要的数学基础课，也是考研数学的重要组成部分，概率统计方法更是科学技术、经济管理、工农业生产和社会人文各个邻域中卓有成效的处理问题、解决问题的方法.广大读者需要概率论与数理统计，喜爱概率论与数理统计，但也感到概率论与数理统计的概念难懂、方法难于掌握、思维难于展开、问题难于入手和习题难做.本书从读者的角度出发，帮助大家来解决学习中的种种困难.

本书按照教育部关于《概率论与数理统计课程的教学要求》和《硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写，并在此基础上略有提高.因此，特别适合在校大学生和有志于考研的人士的需要.

为了使读者能够循序渐进，扎扎实实地从理论上、方法上和实践上掌握概率论与数理统计的概念与方法，我们采取以章节为序的方法，逐个问题地进行讨论、分析、讲解、举例、演绎、归纳.每一节先对概念、内容进行梳理、归纳、提炼，然后对内容、方法中问题进行讨论、释疑解难，再对方法、技巧进行典型例题分析，边演绎、边讨论、边总结，最终达到消化、理解和掌握的目的.为此，作者用解析方法认真地对读者学习中可能产生的对概念的误解、对方法的错失进行了分析探讨、论证求索，选用了较全面、较典型的例题帮助读者理解概率统计的思想方法、步骤和最终的结论.相信本书能给读者以启迪和帮助，使读者能更好掌握概率统计方法.

为了帮助读者准备硕士研究生入学考试的数学考试，本书对1987—2002年间全国工学、经济学硕士研究生入学数学考试试卷中的概率统计试题作了全面和详尽的解答，与考研数学要求一起

附在每章的后面.读者可以从中了解考研的要求、考点与动向.

本书在编写出版过程中,得到华中科技大学出版社的领导和责任编辑的热心支持与帮助,在此向他们表示衷心的感谢.

对于本书中可能出现的错漏和失误之处,热忱欢迎同行和读者给予批评、指正.

孙清华　孙　昊

2002年6月于武汉

目　　录

第一章　随机事件与概率

第一节　样本空间与随机事件

主要内容

1. 随机现象

在一次试验中可能出现不同结果，而在大量重复试验中各个结果呈现统计规律性的现象称为随机现象.

如，在正常条件下，水加热到 100℃ 会沸腾，是确定性现象. 而足球运动员临门施射，就不一定能射中，所以是不确定性现象.

2. 随机试验

若把科学实验或观察都称为试验，则满足下列条件的试验称为随机试验：

(1) 在相同条件下可以重复进行的；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，且在试验开始前能明确所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验一般用大写字母 $E,F,\cdots$ 来表示，我们通过随机试验来研究随机现象.

3. 样本空间

随机试验的每一个可能出现的不可分解的结果称为样本点，全体样本点的集合称为样本空间，用 Ω(或 S) 来表示.

4. 随机事件

样本空间Ω的子集合称为试验E的随机事件，简称事件，以大写字母$A,B,\cdots$来表示. 随机事件可以分为

(1) 基本事件，是只含一个样本点的子集合；

(2) 复合事件，是含若干个样本点的子集合；

(3) 不可能事件，是不含样本点的子集合(空集). 所以它在每次试验中都不会发生，记为$\varnothing$；

(4) 必然事件，是样本空间本身. 所以在每次试验中必然发生，记为Ω.

事实上，(3) 与(4) 具有确定性，不是随机事件，但我们仍把它当作随机事件来处理.

5. 事件的关系

设Ω为试验E的样本空间，A,B,C为Ω的子集，则有以下关系存在：

(1) 包含　若A的每个样本点都属于B，则A发生导致B发生，称事件B包含事件A，或事件A被事件B包含，记为$A \subset B$.

(2) 等价　若$A \supset B$与$B \supset A$同时成立，则称A与B等价，记为$A = B$. 在一次试验中，等价的两个事件或同时发生或同时不发生.

(3) 互斥(互不相容)　若事件A与事件B不能同时发生，称事件A与B互不相容(互斥)，记为$A \cap B = \varnothing$(或$AB = \varnothing$).

6. 事件的运算

由于事件是集合，因此事件的运算与集合的运算是一致的. 常用运算有：

(1) 并(和)　至少属于A或B中一个的所有样本点的集合称为事件A与B的并(或和)，记为$A + B$或$A \cup B$. 即在一次试验中，$A + B$发生表示A与B至少有一个发生.

$A_1 + A_2 + \cdots + A_n$或$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$称为$n$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和.

$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$或$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$称为可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n,$

$\cdots$ 的和.

(2) 交(积)　同时属于 A 和 B 的所有样本点的集合称为事件 A 与 B 的交(或积),记为 $A \cap B$ 或 AB. 在一次试验中,AB 发生表示 A 与 B 都发生.

$A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 称为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积. $A_1A_2\cdots A_n\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 称为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积.

(3) 差　事件 A 发生而 B 不发生,称为事件 A 与 B 的差,记为 $A-B$,有关系式 $A-B=A\overline{B}$.

需要注意的是,不要求 $A \supset B$ 才有 $A-B$. 如图 1.1 阴影部分即为 $A-B$.

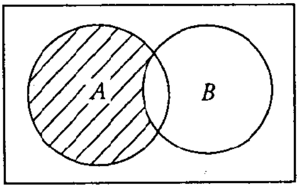

图 1.1

(4) 逆(对立)　样本空间 Ω 中所有不包含在 A 中的样本点的集合称为 A 的逆,记为 $\overline{A}$,也称为 A 的对立事件. 在一次试验中 $\overline{A}$ 发生表示 A 不发生. 有关系式

$$A+\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing.$$

7. 事件的运算规律

交换律:$A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$.

结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

对偶原理:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

$$A+A=A,\ A+\Omega=\Omega;\quad A\Omega=A,\ A\varnothing=\varnothing.$$

疑 难 解 析

1. 怎样确定随机试验的样本空间?

答　对于一个随机试验而言，样本空间并不一定唯一. 在同一试验中，当试验的目的不同时，样本空间往往是不同的. 如，把篮球运动员投篮作为随机试验时，若试验目的是考察命中率，则试验的样本空间为 $\Omega_1=\{中,不中\}$；若试验目的是考察得分情况，则试验的样本空间为 $\Omega_2=\{1分,2分,3分,0分\}$. Ω_1 与 Ω_2 显然不同. 所以，我们应从试验目的出发来确定样本空间.

2. 怎样理解样本空间与必然事件的关系?

答　必然事件与样本空间的关系应当这样来认识：必然事件是指随机试验中一定会出现的事件. 当在一次试验中只有一个样本点出现时，如果把样本空间视作一个整体，就可以说样本空间 Ω 在每次试验中都出现了，因而样本空间是随机试验的必然事件.

3. 如何认识互逆事件与互斥事件之间的联系与区别?

答　A 与 B 互逆，则 $B=\overline{A}$. 在一次试验中，A 与 B 必有一个发生，且至多只有一个发生.

如果事件 A 与 B 不能同时发生，则 A,B 互斥. 但 A,B 也可以同时不发生. 因此，互逆必定互斥，互斥不一定互逆.

区别互逆与互斥的关键是：互逆只在样本空间只有两个(或两类)事件时存在，互斥还可在样本空间有多个(或多类)事件时存在. 互斥事件的特征是：在一次试验中，两个互斥事件可以同时不发生. 如，在一次考试中，及格与不及格总有一个发生，它们互逆又互斥；但考试成绩为 70 分或 80 分是互斥的，却不互逆，因为它们可以同时不发生.

4. 随机事件的运算与数的运算是否相同?

答　不相同. 不能把随机事件的“积”与“和”理解成数的“积”与“和”，认为它们性质类似，都满足交换律、结合律和分配律，就是相同的运算. 事实上，它们是完全不同的运算，反映不同的两类概念. 如：

对于数 a，有 $a+a=2a, a\cdot a=a^2$；而对于事件 A，有

$$A+A=A,\quad A\cdot A=A.$$

对于数 a,b,c，$a+bc \neq (a+b)\cdot(a+c)$；而对于事件 A,B,C，有 $A+BC=(A+B)\cdot(A+C)$.

方法、技巧与典型例题分析

本节的常见习题类型是：用简单事件表示复合事件，证明关于事件的等式或不等式，用事件表示应用问题的结果.

常用方法是：1) 利用运算性质与规律将复合事件用等价的简单事件表出；2) 利用集合的文氏图分析事件间关系，找出等价事件.

例 1 设 A,B 为任意两个事件，则 $(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=$ ________.

解 因为 A 与 $\overline{A}$ 互逆，B 与 $\overline{B}$ 互逆，所以

$$(\overline{A}+B)(A+B)=\overline{A}A+\overline{A}B+BA+BB$$
$$=\varnothing+B+B=B,$$
$$(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=\overline{A}A+\overline{A}\overline{B}+\overline{B}A+\overline{B}\overline{B}$$
$$=\varnothing+\overline{B}+\overline{B}=\overline{B},$$

于是 $(\overline{A}+B)(A+B)(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{B})=B\overline{B}=\varnothing$.

例 2 设 A,B 为任意两个事件，则 $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ 表示（　　）.

(A) 必然事件；　　(B) A 与 B 恰有一个发生；

(C) 不可能事件；　　(D) A 与 B 不同时发生.

解 因为 $\overline{A}+\overline{B}=S-AB$，所以

$$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})=(A+B)(S-AB)$$
$$=AS-AB+BS-AB$$
$$=A+B-AB,$$

表明 A 与 B 恰有一个发生. 故选(B).

例 3 对任意两事件 A,B，证明：$A-B=A\overline{B}$.

证 设 $x\in(A-B)$，则 $x\in A$，$x\overline{\in}B$，即 $x\in A\overline{B}$. 从而 A