

# 不可压缩粘性流场计算方法

## Numerical Methods in Incompressible Viscous Flow

任安禄 著



国防工业出版社

<http://www.ndip.com.cn>

# 不可压缩粘性流场计算方法

Numerical Methods in Incompressible Viscous Flow

任安禄 著



国防工业出版社

·北京·

**图书在版编目(CIP)数据**

不可压缩粘性流场计算方法/任安禄著. —北京:国防工业出版社, 2003. 4

ISBN 7-118-03102-X

I. 不... II. 任... III. 不可压缩流体: 粘性流体—计算方法 IV. 0357.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 008610 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

腾飞胶印厂印刷

新华书店经售

\*

开本 850×1168 1/32 印张 6 $\frac{1}{2}$  150 千字

2003 年 4 月第 1 版 2003 年 4 月北京第 1 次印刷

印数: 1—2500 册 定价: 19.00 元

---

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

## 致 读 者

**本书由国防科技图书出版基金资助出版。**

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,原国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

**国防科技图书出版基金资助的对象是:**

1. 在国防科学技术领域中,学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著;密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。
4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由总装备部国防工业出版社列选出版。

#### IV

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,原国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

**国防科技图书出版基金**  
评审委员会

# 国防科技图书出版基金 第四届评审委员会组成人员

名誉主任委员	陈达植			
顾问	黄宁			
主任委员	刘成海			
副主任委员	王峰	张涵信	张又栋	
秘书长	张又栋			
副秘书长	彭华良	蔡镛		
委员	于景元	王小谟	甘茂治	冯允成
(按姓名笔划为序)	刘世参	杨星豪	李德毅	吴有生
	何新贵	佟玉民	宋家树	张立同
	张鸿元	陈火旺	侯正明	常显奇
	崔尔杰	韩祖南	舒长胜	

# 前 言

计算流体力学是 20 世纪后半叶在流体力学中发展最快的一门学科,不可压缩粘性流场计算方法属于计算流体力学的一部分,本人担负着计算流体力学的教学工作并参加了不可压缩粘性流动计算方法的研究工作,有些成果和体会,写成此书,以便与学术界同仁、专家教授和广大学生相互交流。

不可压缩粘性流动是流体力学中的一个很大门类,它的主控方程是抛物椭圆型方程组,与支配可压缩流的双曲型方程组有很大的差别。本书第 1 章与第 2 章简单地回顾了不可压缩粘性流动问题的发展过程、定解问题、计算问题和主要算法。差分计算总是与网格划分相联系的,第 3 章介绍了在流场计算中的一些网格生成方法,主要是代数网格生成和椭圆型数值网格生成,还罗列了一些常用的网格拉伸方法。

第 4 章到第 8 章是本书的主要内容。在不可压缩粘性流动的计算中,被人们广为推荐的交错网格下的人工压缩性法、SIMPLE 方法等,由于在复杂流场计算中有实施边界条件的困难,因此第 4 章提出了适合于平面和轴对称问题的半交错网格下的不可压缩粘性流场计算方法。为适应三维复杂边界区域流场问题的计算,有必要采用非交错网格下的差分方法,第 5 章介绍了 Abdallah 等人提出的速度压力泊松方程提法和非交错网格下的差分解法,并将这一算法推广到三维流场的计算。第 6 章介绍了分块耦合求解原理。第 7 章以鱼雷外流场计算为例介绍了我们自主开发的区域分块耦合求解方法及程序软件,并计算了鱼雷外流场问题。这些方法是严格满足边界条件的具有工程精度的计算方法。由于采用分块方法网格品质较好,且全流场区域封闭,适合于复杂区域流场计

算。第 8 章介绍了空间高精度格式、时间 ADI 或 Runge-Kutta 法高精度求解不可压缩粘性流动的方法,并提出了高精度解法下的分块耦合求解方法,算例结果表明高精度分块求解方法可计算复杂流动的时间发展过程。第 9 章简单介绍了非结构网格的差分计算方法,可帮助理解各种工程软件应用原理。书中附录包含了一些程序框图和子程序,可供使用和参考。

本书可供流体力学专业的教师、学生和研究人员以及相近专业广大师生学习参考,特别适合于既从事教学科研工作又直接参加计算实践的教学和科研人员。

本人借此机会感谢国防科技图书出版基金支持本书的出版。也愿借此机会感谢多年来对我的工作给予支持的国家自然科学基金会、浙江省自然科学基金会、中国船舶科学研究中心等领导部门和合作单位以及浙江大学机械与能源学院、力学系的领导和同事们。感谢许多老一辈的专家教授:周恒教授,张涵信教授,陈耀松教授,傅德薰教授,马延文教授等对我的关心和指导。作者还要感谢我的学生,他们与我进行了合作科研工作,完成了许多算例,画出了精美的图形。此外我还要感谢我的爱人在家庭生活的各种情况下,无私奉献,操持家务,支持我的工作;也要感谢我的同事和左右邻居,在他们的支持和关心下才使我有时间得以完成本书的写作工作。

由于水平所限,本书如有不当之处,敬请广大读者批评指正。

作者

# 目 录

第 1 章 绪论	1
第 1 节 不可压缩流动问题的研究发展概况	1
第 2 节 不可压缩粘性流动计算方法的发展状况	3
第 2 章 不可压缩粘性流动的基本方程及定解条件	5
第 1 节 原始变量基本方程组——Navier - Stokes 方程组	5
第 2 节 Navier - Stokes 方程组的定解条件	6
第 3 节 不可压缩粘性流动其它形式的求解方程	7
第 4 节 不可压缩粘性流动的求解方法	8
第 5 节 关于开路边界条件	16
第 6 节 交错网格和非交错网格	17
第 7 节 Burgers 方程和不可压缩粘性流场方程的一些 精确解	18
第 3 章 网格生成	23
第 1 节 代数网格生成	23
第 2 节 椭圆型数值网格生成方法	28
第 3 节 网格类型和设计考虑	31
第 4 章 平面和轴对称流动内外流统一求解方法	34
第 1 节 半交错网格和 H 网格系统	36
第 2 节 不可压缩粘性轴对称流动的控制方程和 差分方法	37
第 3 节 压力差分方程	43
第 4 节 计算算例	49
第 5 章 Abdallah 二维不可压缩粘性流动求解方法和三维	

<b>问题的推广</b> .....	52
第 1 节 Abdallah 二维不可压缩粘性流动求解方法 简介 .....	52
第 2 节 Mansour 推广 Abdallah 方法到二维任意曲线 坐标 .....	57
第 3 节 三维任意曲线坐标下 Abdallah 方法的推广 .....	61
第 4 节 压力方程加权方法 .....	72
第 5 节 湍流问题的推广 .....	72
第 6 节 Baldwin - Lomax 湍流模型 .....	78
<b>第 6 章 不可压缩粘性流动分块耦合求解</b> .....	81
第 1 节 重叠一层与不重叠的分块耦合求解方法 .....	81
第 2 节 线代数方程的块迭代方法与分块耦合求解 .....	83
第 3 节 分块耦合求解方法与分块耦合网格生成 .....	88
<b>第 7 章 分块耦合求解程序</b> .....	93
第 1 节 鱼雷的分块计算模型 .....	93
第 2 节 分块计算框图和程序调用过程 .....	94
第 3 节 参数的控制和计算管理系统 .....	97
第 4 节 鱼雷流场的计算结果 .....	102
第 5 节 壁面切应力计算原理及其分解 .....	104
<b>第 8 章 不可压缩粘性流场高精度求解方法</b> .....	108
第 1 节 Lele 高精度差分格式简介 .....	108
第 2 节 变量与一阶二阶差分耦合求解的 ADI 高精度 算法 .....	113
第 3 节 高精度压力泊松方程的 Dennis 格式 .....	122
第 4 节 Runge - Kutta 法和压力泊松方程修正法求解 二维层流问题 .....	134
第 5 节 张量形式方程的 Runge - Kutta 显式推进法 .....	140
第 6 节 高阶紧致格式分块耦合求解 .....	144
<b>第 9 章 非结构网格差分求解方法</b> .....	150
第 1 节 非结构网格的几何描述 .....	150

第2节	扩散方程的离散格式	151
第3节	对流扩散方程的离散	154
第4节	流动方程的离散格式	155
附录1	三对角块方程组求解程序	160
附录2	分块系统中六面体点、线、面定义图	165
附录3	定区间长度、选定第一网格长度、求等比级数公比及 网格分布子程序	167
附录4	二维椭圆型方程数值网格生成子程序	170
参考文献		174

# Contents

<b>Chapter 1</b>	<b>Introduction</b>	1
§ 1 - 1	Outline of Research and Development in Incompressible Viscous Flow	1
§ 1 - 2	Outline of Numerical Methods in Incompressible Viscous Flow	3
<b>Chapter 2</b>	<b>Fundamental Equations and Well-posed Conditions of Incompressible Viscous Flow</b>	5
§ 2 - 1	Primitive Variable Governing Equations—Navier- Stokes Equations	5
§ 2 - 2	Navier-Stokes Equations and Its Well-posed Conditions	6
§ 2 - 3	Alternate Forms of Incompressible Viscous Flow Equations	7
§ 2 - 4	Numerical Methods for Incompressible Viscous Flow	8
§ 2 - 5	On Open Boundary Condition	16
§ 2 - 6	Staggered Grid and Non-staggered Grid	17
§ 2 - 7	The Exact Solutions for Burgers Equation and Incompressible Viscous Flow Equations	18
<b>Chapter 3</b>	<b>Grid Generation</b>	23
§ 3 - 1	Algebraic Grid Generation	23
§ 3 - 2	Elliptic Numerical Grid Generation	28
§ 3 - 3	Grid Type and Grid Design	31
<b>Chapter 4</b>	<b>The Unified Numerical Solution for Internal and</b>	

	<b>External Flow in Plane and Axis Metric Flow</b> .....	34
§ 4 – 1	Half-staggered Grid and H-Type Grid System .....	36
§ 4 – 2	Governing Equations and Difference Methods for Axis Metric Incompressible Viscous Flow .....	37
§ 4 – 3	Pressure Difference Equation .....	43
§ 4 – 4	Numerical Example .....	49
<b>Chapter 5</b>	<b>Abdallah's Numerical Method for Two Dimensional Incompressible Viscous Flow and Extending to Three Dimensional Flow Problems</b> .....	52
§ 5 – 1	Brief Introduction of Abdallah's Numerical Solution for Two Dimensional Incompressible Viscous Flow ...	52
§ 5 – 2	The Abdallah's Method Extended to Two Dimensional Arbitrary Curvilinear Coordinate Equations by Mansour .....	57
§ 5 – 3	The Abdallah's Method Extended to Three Dimensional Arbitrary Curvilinear Coordinate Equations .....	61
§ 5 – 4	Pressure Difference Equation with Weighting .....	72
§ 5 – 5	The Extended Abdallah's Method to Turbulent Flow .....	72
§ 5 – 6	Baldwin-Lomax Turbulent Model .....	78
<b>Chapter 6</b>	<b>Domain Decomposition and Match Method for Incompressible Viscous Flow</b> .....	81
§ 6 – 1	Domain Decomposition and Match Method for One Layer Overlapping and without Overlapping .....	81
§ 6 – 2	Algebraic Block Iterative Method Comparing with Domain Decomposition Method .....	83
§ 6 – 3	Domain Decomposition and Match Method and Grid Generation with Dividing and Matching Sub-domains .....	88
<b>Chapter 7</b>	<b>Domain Decomposition and Match Method</b>	

	<b>Programs</b> .....	93
§ 7 - 1	The Numerical Model of Torpedo with DDM .....	93
§ 7 - 2	Calculation Flow Chart for DDM and Call Procedures .....	94
§ 7 - 3	The Parameters for Control and Management Systems .....	97
§ 7 - 4	The Results of Flow over Torpedo Field .....	102
§ 7 - 5	Calculating Principle for Wall Stress and its Decomposition .....	104
<b>Chapter 8</b>	<b>High Accuracy Solution Method for Incompressible Viscous Flow</b> .....	108
§ 8 - 1	Brief Describe of Lele's High Accuracy Difference Schemes .....	108
§ 8 - 2	ADI Scheme with Coupling Variable and Its First and Second Derivative to Solve Momentum Equations ...	113
§ 8 - 3	Dennis's High Degree Accuracy Pressure Poisson Equation .....	122
§ 8 - 4	Numerical Solution for Two Dimensional Laminar Flow by Using Runge-Kutta Approach and Modified Pressure Poisson Equation .....	134
§ 8 - 5	Runge-Kutta Explicit Approach for Momentum Equations with Tensor Forms .....	140
§ 8 - 6	Domain Decomposition and Match Method with Compact Schemes .....	144
<b>Chapter 9</b>	<b>Difference Methods for Unstructured Grids</b> .....	150
§ 9 - 1	Geometric Describe of Unstructured Grids .....	150
§ 9 - 2	Discrete Scheme for Diffusion Equation .....	151
§ 9 - 3	Discrete Scheme for Convective and Diffusion Equation .....	154
§ 9 - 4	Discretizations of Momentum and Continual	

	Equation .....	155
<b>Appendix 1</b>	<b>The Subroutine for Solving Block Tridiagonal Systems of Equations .....</b>	<b>160</b>
<b>Appendix 2</b>	<b>The Definitions of Nodes, Lines and Faces in Divided Block Systems .....</b>	<b>165</b>
<b>Appendix 3</b>	<b>The Subroutine of Solving Series of Equal Ratio with Choosing First Mesh Length in Fixed Whole Length .....</b>	<b>167</b>
<b>Appendix 4</b>	<b>The Subroutine of Two Dimensional Elliptic Numerical Grid Generation .....</b>	<b>170</b>
<b>References</b>	.....	<b>174</b>

# 第 1 章 绪 论

## 第 1 节 不可压缩流动问题的研究发展概况

人类对于流体力学的研究是从治理河流开始的,它的研究内容属于液体(水)动力学的范围。18 世纪液体动力学得到了较快的发展,18 世纪 50 年代欧拉(Euler)建立了流体运动方程组,此后液体动力学开始向两个方向发展。一个方向是偏向于严格理论推导的方法,得到一些对实际问题有指导意义的结果,这一方向逐步形成目前的理想流体力学。与此同时纳维埃、斯托克斯等人在理论分析方面继续完善欧拉运动方程,他们在欧拉运动方程中加上各个摩擦项,建立了流体运动的纳维埃—斯托克斯(Navier-Stokes)方程。但由于 Navier-Stokes 方程在数学上的复杂性,对其求解进展极其缓慢。液体动力学另一个发展方向是对一维流动方程进行分析研究并同时进行实地观察和试验,用于解决工程实际问题,这就是水力学的内容。1904 年普朗特(Prandtl)提出边界层理论,把这两类研究方法结合起来,在边界层内考虑流体的粘性,在边界层外可认为是无粘性流动。

用理想流体的理论加上边界层理论确实能解决许多实际问题,但在另外一些流动问题上却遇到困难,如圆柱绕流问题,在不同雷诺数下的圆柱绕流可出现不同的流动形态,产生不同的尾流和卡门(Karman)涡街,甚至产生湍流。这使得我们要将整个绕流场作为粘性流动来处理。这样慢慢地就形成了一个专门的流动研究方向——不可压缩粘性流动。

不可压缩流的名字是相对于可压缩流而提出来的,在 20 世纪上叶,由于军事和航空事业的飞速发展,空气动力学得到了飞速发

展,使得空气动力学发展成一门强大的学科,某种程度上反而超过了孕育它成长的流体力学本身。空气动力学是研究物形与空气做相对运动时气流的运动和物体的受力特性,仍属于流体力学范畴,是不可压缩流的一部分,后来把流体力学和热力学结合起来,引入了压缩性的概念,建立了可压缩流体力学,此后人们把只有微弱压缩性或可不考虑压缩性的流体力学统称为不可压缩流体力学。不可压缩流是可压缩流压缩性趋向零的极限状况,这一极限状况大大地改变了流动方程组的基本性质,使得压力  $p$  不再作为热力学变量,连续性方程也变为椭圆型方程。

不含时间变量的不可压缩流方程 Navier-Stokes 方程组是椭圆型方程,在椭圆型方程中信号传播速度无穷大,即声速无穷大,在边值问题求解中需要全部封闭的边解条件。在实际计算中可看到下游对上游的强烈影响。含时间变量的不可压缩粘性流 Navier-Stokes 方程是抛物型方程,但它含有椭圆型方程的强烈次特征。当人们用时间相关法来求解含时间的 Navier-Stokes 方程组时,在达到稳态解时完全是椭圆型方程问题,方程的边界条件也应按椭圆型方程来提。

不可压缩粘性流动问题几乎包含了所有不属于可压缩空气动力学研究范围内的问题,如波浪、渗流,多相流有时也划入不可压缩流。当然不可压缩流也有各种简化形式,如边界层方程就是将不可压缩流方程简化为抛物型方程。由于不可压缩粘性流动的基础性、常见性和它的实际重要性,佩切尔 (Batchelor) 认为不可压缩粘性流处在流体力学的中心地位。

不可压缩粘性流动主要包括有:边界层流动、一般意义下的层流和湍流流动、管道流动、传热和传质的流动以及有自由面流动。目前自由面的波浪运动主要还按无粘流来考虑。不可压缩粘性流动典型的例子就是圆柱绕流、库塔 (Couette) 流动、泊肃叶 (Poiseuille) 流动、空腔环流、后向台阶流、自然对流和强迫对流等。

湍流研究和稳定性问题是不可压缩粘性流动的两个十分重要的方面,我国学者周培源院士做出了重大贡献,提出了 17 方程法。