考研 数学 题库

HZ BOOKS
华章教育

北京理工大学 史荣昌 编著

第2版

线性代数习题集（提高篇）

机械工业出版社
China Machine Press

考研 数学 题库

第2版

线性代数习题集（提高篇）

北京理工大学 史荣昌 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题集(提高篇)(第2版)/史荣昌编著. - 北京:机械工业出版社，2003.4
(考研数学题库)
ISBN 7-111-11873-1

Ⅰ.线… Ⅱ.史… Ⅲ.线性代数-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第018973号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)
责任编辑：石会敏
北京昌平奔腾印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2003年4月第2版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 14.5印张

定 价:25.00元

出版前言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研数学题库”、“本科生数学题库”、“2004年全国研究生入学考试数学复习指导丛书”等共12本。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

在“考研数学题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质。

为了使考生通过一定数量题目的练习，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本解题的方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断地增加对考试的适应能力和通过考试的自信心，在使用本书时应按照以下四个步骤学习才会有较大的收益：

1. 通过审题来正确理解题意(特别是概率统计部分，首先把题目的已知和要求的是什么弄清楚，而那种只有看完题解后才能正确理解题意的做法是万万不可取的)；

2. 分析题目来确定主要考核知识点(解答本题时要用到哪些知识点，需要哪些公式或定理要事先明确，这种训练是十分必要的)；

3. 选择适当的方法与技巧(解题技巧的掌握不仅要“看”，更重要的是“学”，即动手来解题，所谓“熟能生巧”就是这个道理)；

4. 学习解题格式及关键步骤表述(解题格式是大多数同学最容易忽视的一个问题，学习必要解题格式也是十分重要的。在各类考试中，必要的解题格式以及写出关键步骤是我们评判的重要标准，也是今后学习和工作中所需要的)。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知

识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。本书适度介绍一题多解，有的解法虽繁琐但读者易于理解，易于掌握；有的解法简捷，但需要读者深刻理解；有的解法介绍给读者，目的是扩展读者视角，提高读者应对新题型快速解题的能力。读者可根据自己情况选择阅读。

我们在出版这套书时力求能够体现出以上的特色，但是由于时间仓促，疏漏之处难免，恭请读者不吝指正。本书在成书过程中受到尤承业教授、谢国瑞教授的悉心帮助与指导，在此表示诚挚的谢意。

机械工业出版社华章教育

2003 年 3 月

目录

出版前言
第一章 行列式 ………………………………………………………… (1)
一、考研内容简介 ………………………………………………… (1)
二、习题 …………………………………………………………… (4)
三、习题的解答与分析 …………………………………………… (8)
第二章 矩阵 ……………………………………………………… (23)
一、考研内容简介 ………………………………………………… (23)
二、习题 …………………………………………………………… (29)
三、习题的解答与分析 …………………………………………… (36)
第三章 向量 ……………………………………………………… (74)
一、考研内容简介 ………………………………………………… (74)
二、习题 …………………………………………………………… (80)
三、习题的解答与分析 …………………………………………… (91)
第四章 线性方程组 ……………………………………………… (120)
一、考研内容简介 ………………………………………………… (120)
二、习题 …………………………………………………………… (121)
三、习题的解答与分析 …………………………………………… (134)
第五章 矩阵的特征值和特征向量 ……………………………… (168)
一、考研内容简介 ………………………………………………… (168)
二、习题 …………………………………………………………… (170)
三、习题的解答与分析 …………………………………………… (176)
第六章 二次型 …………………………………………………… (200)
一、考研内容简介 ………………………………………………… (200)
二、习题 …………………………………………………………… (202)
三、习题的解答与分析 …………………………………………… (206)

第一章　行　列　式

◆一、考研内容简介

行列式的概念和性质，运用行列式的性质计算行列式是本章的重点.

（一）基本概念

由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{\substack{j_1\cdots j_n \\ \text{全排列}}}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

是一个按照一定运算规则的计算公式，得到的结果是这个行列式的值.

计算公式 $\sum\limits_{\substack{j_1\cdots j_n \\ \text{全排列}}}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是 $n!$ 项的代数和，每一项是由行列式中处在不同行、不同列的元素之积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 组成（这可由 n 个元素积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中每一个元素的第 1 个下标互不重复，第 2 个下标互不重复说明这 n 个元素是在行列式中不同行、不同列）. $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)=\{j_1,j_2,\cdots,j_n\}$ 的逆序数.

第 i 行、第 j 列的元素 a_{ij} 的余子式 $\boldsymbol{M}_{ij}$ 是指在行列式中划去第 i 行、第 j 列的元素后余下的 $n-1$ 阶行列式，a_{ij} 的代数余子式 $\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$. 显然，当 $i+j$ 是奇数时，$\boldsymbol{A}_{ij}=-\boldsymbol{M}_{i+j}$，当 $i+j$ 是偶数时，$\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{M}_{ij}$.

不难看到下面两个行列式虽然不同，但是它们第 i 行各对应元素的余子式、代数余子式对应相等.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(二) 行列式的性质

(1) 行列式转置:行列式与它的转置行列式相等.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 对换变号:对换行列式的两行(列),行列式的值改变正负号.

(3) 提取公因子:行列式中某行(列)有公因子,可以提到行列式记号前;换句话说,一个非零数乘行列式等于用这个数乘行列式的某行(列).

(4) 拆项(分解):一个行列式可以按某行(列)写成两个行列式之和.例如,行列式按第 i 行拆项(分解)是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

即行列式 $\boldsymbol{D}$ 可以按第 i 行分解成两个行列式 $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 之和.三个行列式 $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 除第 i 行外其余元素对应完全相同,$\boldsymbol{D}$ 中的第 i 行元素是 $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 中第 i 行对应元素的和.

由此可见,并不是两个 n 阶行列式都能相加成一个行列式,只有当两个 n 阶行列式除第 i 行外其余各行对应元素都相同时才能相加成一个行列式.

上述结论对列也同样适用.

(5) 行列式值为0:若行列式中有两行(列)完全相同,或有一行(列)的元素全为0,或有两行(列)对应元素成比例,则行列式的值为0.

(6) 倍加变换值不变:把行列式的某一行(列)乘一个数加到另一行(列)对应元素上去,行列式的值不变.

(7) 展开公式:

按第 i 行展开：$a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{in}=\boldsymbol{D}\quad(i=1,2,\cdots,n)$，

按第 j 列展开：$a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j}+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}=\boldsymbol{D}\quad(j=1,2,\cdots,n)$，且

$$a_{i1}\boldsymbol{A}_{j1}+a_{i2}\boldsymbol{A}_{j2}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A}_{jn}=0\quad(i\neq j),$$

$$a_{1i}\boldsymbol{A}_{1j}+a_{2i}\boldsymbol{A}_{2j}+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{A}_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

（三）基本类型行列式

（1）上三角形行列式，下三角形行列式之值．

（2）爪型行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_2x_3\cdots x_n\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i}\right)\quad(x_2x_3\cdots x_n\neq 0).$$

（3）范德蒙行列式：

$$\boldsymbol{V}_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

（4）准三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n} \\ \boldsymbol{C}_{n\times m} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{m\times m}|\cdot|\boldsymbol{B}_{n\times n}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{B}_{n\times n} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_{m\times m}|\cdot|\boldsymbol{B}_{n\times n}|.$$

（四）计算（化简）行列式的基本原则与常用方法

基本原则：

（1）运用行列式性质把行列式化成基本类型行列式；

（2）运用行列式性质把某一行（列）化成尽可能多零，然后把简化以后的行列式按该行（列）展开．

常用方法：

（1）利用行列式倍加变换性质，把行列式某行（列）乘数加到其余各行上去；

（2）利用行列式倍加变换性质，把行列式第 $n-1$ 行（列）乘数加到第 n 行（列）上去，之后再把第 $n-2$ 行（列）乘数加到第 $n-1$ 行（列）上去，之后继续逐步把上一行（列）乘数加到下一行（列）上去（例如范德蒙行列式的计算）；

（3）利用行列式倍加变换性质，把行列式各行（列）乘数全加到某一行（列）上去；

（4）利用行列式拆项性质．

特别要指出的是在计算行列式时必须分析行列式元素分布特点以后再取舍用何步骤计算.

(五) 克莱姆法则

定理(克莱姆法则) 当线性方程组的方程个数等于未知数个数 n 时,如果它的系数行列式不等于 0,则方程组有惟一解,且解为 $x_1 = \frac{\boldsymbol{D}_1}{\boldsymbol{D}}, x_2 = \frac{\boldsymbol{D}_2}{\boldsymbol{D}}, \cdots, x_n = \frac{\boldsymbol{D}_n}{\boldsymbol{D}}$.

二、习 题

(一) 填空题(1.1 ~ 1.9)

1.1 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 3x \\ 0 & 2x & -1 & x \\ 0 & 1 & -x & 2 \\ x & 1 & 0 & 3x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数________.

1.2 代数方程 $\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & 3+x \end{vmatrix} = 0$ 的根 $x =$ ________.

1.3 设 $f(x) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & \lambda - a_{44} \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 中 x^3 的系数是________.

1.4 已知四阶行列式 $\boldsymbol{D}$ 之值为 91,它的第 1 行元素依次为 $2, 3, t+3, -5$,且第 1 行元素的余子式依次为 $\boldsymbol{M}_{11} = -1, \boldsymbol{M}_{12} = 0, \boldsymbol{M}_{13} = 6, \boldsymbol{M}_{14} = 9$. 则 $t =$ ________.

1.5 已知四阶行列式

$$\boldsymbol{D}_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

设 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{D}_4$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $\boldsymbol{M}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{D}_4$ 中元素 a_{ij} 的余子式. 则 $2\boldsymbol{A}_{11} + 3\boldsymbol{M}_{12} + 2\boldsymbol{M}_{13} - \boldsymbol{A}_{14} =$ ________.

1.6 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

1.7 $\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ x & x & x & \cdots & x & 0 & 1 \\ x & x & x & \cdots & 0 & x & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & 0 & x & \cdots & x & x & 1 \\ 0 & x & x & \cdots & x & x & 1 \end{vmatrix} =$ ________.

1.8 $\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} =$ ________.

1.9 已知 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{A}_3$ 分别为 k_1 阶, k_2 阶, k_3 阶矩阵, $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} & & \boldsymbol{A}_1 \\ & \boldsymbol{A}_2 & \\ \boldsymbol{A}_3 & & \end{bmatrix}$, 则 $|\boldsymbol{A}| =$ ________ $|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2||\boldsymbol{A}_3|$.

(二) 计算题与证明题(1.10 ~ 1.22)

1.10 已知三阶行列式

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & y & x \end{vmatrix},$$

且
$$\boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{M}_{12} - \boldsymbol{M}_{13} = 3, \quad \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{A}_{13} = 1.$$

其中 $\boldsymbol{M}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 中元素 a_{ij} 的余子式, $\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$. 试求 $\boldsymbol{D}$ 之值.

1.11 设 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 且 $\boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{M}_{12} + \boldsymbol{M}_{13} = 11$($\boldsymbol{M}_{ij}$ 是行列式中元素 a_{ij} 的余子式). 试求 a, b.

1.12 当 a,b 满足什么条件时,行列式

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}0&1&2&0&1\\2&0&0&3&0\\0&a&1&0&1\\1&0&0&b&0\\0&1&3&0&1\end{vmatrix}=0$$

1.13 计算五阶行列式

$$\boldsymbol{D}_5=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0\\1&2&3&0&0\\0&1&1&1&1\\0&x_1&x_2&x_3&x_4\\0&x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\end{vmatrix}.$$

1.14 计算爪型行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}x_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\b_2&x_2&0&\cdots&0\\b_3&0&x_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_n&0&0&\cdots&x_n\end{vmatrix},\quad x_2x_3\cdots x_n\neq 0.$$

1.15 计算 n 阶三对角行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}1-a&a&0&\cdots&0&0\\-1&1-a&a&\cdots&0&0\\0&-1&1-a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1-a&a\\0&0&0&\cdots&-1&1-a\end{vmatrix}.$$

1.16 计算 n 阶行列式

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_{n-1}&a_n\\b_1&c_2&0&\cdots&0&0\\0&b_2&c_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&b_{n-1}&c_n\end{vmatrix}.$$

1.17 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

1.18　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \quad (x \neq a).$$

1.19　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & x_2 & \cdots & b \\ a & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}.$$

1.20　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

1.21　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

1.22　计算三对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}.$$

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1.1　答案是：-6.

分析　根据定义 $f(x)$ 中含有 x^3 的项只有一项，即

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=1\cdot 2x\cdot(-x)\cdot 3x=-6x^3.$$

若把 $f(x)$ 按第 1 列展开可得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & -1 & x\\ 1 & -x & 2\\ 1 & 0 & 3x\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}x & 2 & 3x\\ 2x & -1 & x\\ 1 & -x & 2\end{vmatrix}.$$

在第 1 个行列式中 x^3 项的系数是 -6，第 2 个行列式中无 x^2 项的系数(注意到行列式前还有 x 因子)，因此 $f(x)$ 中 x^3 项的系数为 -6.

1.2　答案是：$-\dfrac{6}{11}$.

分析　$\begin{vmatrix}1+x & x & x\\ x & 2+x & x\\ x & x & 3+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+x & x & x\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1 & x & x\\ -1 & 2 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{vmatrix}=6+11x=0,\quad x=-\frac{6}{11}.$$

1.3　答案是：$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

分析　将四阶行列式

$$f(x)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} & 0-a_{14} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} & 0-a_{24} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} & 0-a_{34} \\ 0-a_{41} & 0-a_{42} & 0-a_{43} & \lambda-a_{44} \end{vmatrix}$$

的每一列拆成两个行列式,四阶行列式可拆成 $2^4=16$ 个行列式,其中含有 λ^3 的行列式有如下四个

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -a_{14} \\ 0 & \lambda & 0 & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} & 0 \\ 0 & \lambda & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{43} & \lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda & 0 \\ 0 & -a_{42} & 0 & \lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda & 0 \\ -a_{41} & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=-a_{44}\lambda^3-a_{33}\lambda^3-a_{22}\lambda^3-a_{11}\lambda^3=-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})\lambda^3.$$

1.4 答案是:5.

分析 把行列式按第1行展开得

$$\begin{aligned} 91 &= 2\cdot(-1)^{1+1}\boldsymbol{M}_{11}+3\cdot(-1)^{1+2}\boldsymbol{M}_{12}+(t+3)\cdot(-1)^{1+3}\boldsymbol{M}_{13} \\ &\quad+(-5)(-1)^{1+4}\boldsymbol{M}_{14} \\ &= 6t+61, \end{aligned}$$

$$t=5.$$

1.5 答案是:6.

分析 由于

$$2\boldsymbol{A}_{11}+3\boldsymbol{M}_{12}+2\boldsymbol{M}_{13}-\boldsymbol{A}_{14}=2\boldsymbol{A}_{11}-3\boldsymbol{A}_{12}+2\boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{A}_{14},$$

并且 $$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 与 \quad \boldsymbol{M}_4=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

两个行列式的第1行元素的代数余子式对应相等,而右侧的行列式按第1行展开应为 $\boldsymbol{M}_4=2\boldsymbol{A}_{11}-3\boldsymbol{A}_{12}+2\boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{A}_{14}$,所以

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{A}_{11}+3\boldsymbol{M}_{12}+2\boldsymbol{M}_{13}-\boldsymbol{A}_{14} &= 2\boldsymbol{A}_{11}-3\boldsymbol{A}_{12}+2\boldsymbol{A}_{13}-\boldsymbol{A}_{14} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=6. \end{aligned}$$

1.6 答案是:$2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

分析 将行列式的第 2 列乘(-2)，第 3 列乘(-3)，……，第 n 列乘$(-n)$都加到第 1 列上去得一个上三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2^2-3^2-\cdots-n^2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1-2^2-3^2-\cdots-n^2 = 2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

$$= 2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1.7 答案是：$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-n)x^{n-2}$.

分析 将行列式的第 1 行乘$(-x)$分别加到第 $2,3,\cdots,n$ 行上去得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

将行列式的第 1 到第 $n-1$ 列都乘$\frac{1}{x}$后全加到第 n 列上去得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{n-1}{x} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)} \begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}(-x)^{n-1} \cdot \frac{n-1}{x}$$
$$= (-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}(-1)^{n-1} \cdot (-1)(1-n)x^{n-2}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-n)x^{n-2}.$$

1.8 答案是：$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$.

分析 注意到相邻两行元素之间的特点.

第 $n-1$ 行乘 (-1) 加到第 n 行上，之后第 $n-2$ 行乘 (-1) 加到第 $n-1$ 行，依次继续，最后第 1 行乘 (-1) 加到第 2 行. 得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} n & n-1 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n.$$

1.9 答案是：$(-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$.

分析
$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_1 \\ 0 & A_2 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k_1(k_2+k_3)} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ 0 & A_3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{k_1(k_2+k_3)}(-1)^{k_2k_3} \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3} |A_1||A_2||A_3|.$$

(二) 计算题与证明题

1.10 **解** 由定义知

$$M_{11} = x-2y, \quad M_{12} = x-4, \quad M_{13} = y-2,$$
$$A_{11} = M_{11} = x-2y, \quad A_{12} = -M_{12} = 4-x, \quad A_{13} = M_{13} = y-2.$$

代入两已知等式得

$$(x-2y)+(x-4)-(y-2) = 3,$$
$$(x-2y)+(x-4)+(y-2) = 1.$$

解之得
$$x = 4, \quad y = 1.$$