高等学校教材

肖扬 著

动态系统分析

Analysis of Dynamical Systems

北方交通大学出版社
http://press.njtu.edu.cn

高等学校教材

动 态 系 统 分 析

肖　扬　著

北方交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是研究各类动态系统理论(稳定性、鲁棒稳定性、可控性、可观测性、可达性、能稳性等)与分析技术(稳定性检验、传递函数生成、灵敏度分析等)的专著。本书以取得的研究成果为主,同时考虑到动态系统理论的相互联系,用了一定的篇幅介绍前人取得的成果,系统地给出动态系统的稳定性与鲁棒稳定性检验理论与算法。

本书对部分定理提供了证明,并给出了算法与实现程序,还提供了各类系统的稳定性分析的基本理论与算法,可以对许多工程上的系统稳定性的实际问题进行分析。书中全部定理的算法均以软件实现,可满足读者实际应用的需要。

本书主要读者对象为高等院校与科研院所从事系统设计与系统分析的教师、科研人员和研究生等,也可同时作为控制系统与信息处理系统分析的专业参考书,亦适合于企业设计部门的工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

动态系统分析/肖扬著 .—北京:北方交通大学出版社,2002.10
ISBN 7-81082-058-3

Ⅰ.动… Ⅱ.肖… Ⅲ.动态系统-系统分析 Ⅳ.N941.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 054874 号

责任编辑:郭 洁
特邀编辑:易 彬 秋 光
印 刷 者:北京瑞哲印刷厂
出版发行:北方交通大学出版社 电话:010-51686045,62237564
北京市西直门外高梁桥斜街 44 号 邮编:100044
经 销:各地新华书店
开 本:850×1 168 1/32 印张:11 字数:270 千字
版 次:2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷
印 数:1 000 册 定价:25.00 元

前　言

在系统控制与系统实现中,诸多问题涉及鲁棒稳定性问题。鲁棒稳定性分析是系统鲁棒控制的前提。在已知系统参数的动态范围情况下,对系统的有限子集进行镇定,进而实现对整个系统的镇定,无疑具有重要的实际意义。1979年美国威斯康星大学B. R. Barmish教授将俄国学者V. L. Kharitonov的端点检验定理介绍给西方控制理论界的学者后,系统控制理论有了突飞猛进的进展。Kharitonov的端点检验定理的重要意义在于:只检验四个端点多项式,便可确定整个区间多项式的Hurwitz稳定性。这不仅极大地简化了系统的稳定性分析,也使原来非常复杂和困难的系统镇定变得简单。1979年以来,为数众多的文章研究了Kharitonov的端点检验定理的应用与推广,同时也研究了他的端点检验定理的局限性。本书第7章介绍了Kharitonov的端点检验定理及其推广。

Kharitonov的端点检验定理只能用于区间多项式的Hurwitz稳定性的判别,它要求系统是连续时间的,而且系统的特征多项式的系数是相互独立的。而实际问题是:系统有可能是离散时间的,系统的特征多项式的系数是非独立的,存在某种仿射关系,如多胞形多项式。1988年,A. C. Bartlett,C. V. Hollot与黄琳提出了棱边检验定理,解决了多胞形多项式的稳定性检验问题。棱边定理更具有一般性,它可用于多胞形多项式的Hurwitz稳定性和Schur稳定性的检验,以及区间多项式的Schur稳定性的检验。本书第8章介绍了Bartlett等提出的棱边检验定理及其推广。

Kharitonov提出的端点检验定理和A. C. Bartlett,C. V.

Hollot与黄琳提出的棱边定理,能否推广到不确定矩阵与不确定矩阵多项式的鲁棒稳定性判定?这是我们在国家自然科学基金课题中的研究结果,即本书第9章和第10章所要回答的问题。这两章给出了区间矩阵鲁棒稳定的充分必要条件、多胞形矩阵鲁棒稳定的充分必要条件、区间矩阵多项式的Hurwitz与Schur鲁棒稳定充分条件。区间矩阵与多胞形矩阵鲁棒稳定性检验问题是控制理论与电路系统领域研究的一个公开问题。第9章所给出的区间矩阵与多胞形矩阵鲁棒稳定的充分必要条件,提供了一种2-D面检验算法,无需对整个不确定矩阵簇的参数空间进行检验。这一结果使线性不确定连续系统与线性不确定离散系统的稳定性分析与镇定大为简化。

全书共18章,针对各类问题给出相应的系统理论与分析方法,各章内容具有相对的独立性。第1章至第4章、第6章至第8章、第16章至第18章的部分内容为动态系统分析的基础理论,其他各章的内容均包含了我们所完成的国家自然科学基金课题的研究结果。本书为部分定理提供了证明,而非仅简单地介绍结果,其目的在于研究解决问题的方法。掌握了这些方法后,类似的问题有可能触类旁通,得以解决。

另外,对资助本书涉及的科研课题的国家自然科学基金委员会,对资助本书出版的北方交通大学出版基金委员会,对参与本书所涉及科研课题的德国Erlangen-Nürnberg大学的Rolf Unbehauen教授,北方交通大学的杜锡钰教授,研究生吴江、宋明艳、周达天等,表示衷心的感谢。

作　者

2002年7月

目　录

第 1 章　线性时不变系统

线性时不变系统包括线性时不变连续系统与线性时不变离散系统，本章研究线性时不变系统的渐近稳定性、输入输出稳定性、可控制性、可观测性等动态特性[1,2]。

1.1　线性时不变连续系统的渐近稳定性

线性时不变连续系统的系统方程为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1-1a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{1-1b}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t)=[x_1,\cdots,x_N]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 N 维状态向量，N 为系统的阶次，$\boldsymbol{u}(t)=[u_1,\cdots,u_M]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 M 维输入向量，$\boldsymbol{y}(t)=[y_1,\cdots,y_K]^{\mathrm{T}}$、为系统的 K 维输出向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $N\times N$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $N\times M$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为 $K\times N$ 矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为 $K\times M$ 矩阵。

在式(1-1)系统方程中，状态变量是时间 t 的一维函数，式(1-1a)是常微分方程组，所以式(1-1)系统方程是一维的。而在多维系统中[3]，其状态变量是多变量 $t_1,\cdots,t_m$ 的 m 维函数，系统方程是偏微分方程组。

定义 1-1　如果式(1-1)系统的零输入解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足下列条件

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0) = 0 \tag{1-2}$$

则线性时不变连续系统(1-1)是渐近稳定的。式中，$\boldsymbol{x}_0$ 为初始状态，t_0 为初始时刻。

一个系统为渐近稳定的，则当系统的输入信号撤掉后，此时系

统为自治的，经若干时间后，系统能自动恢复到零状态。我们称输入信号为零的系统为零输入系统或自治系统，输入信号不为零的系统为受迫系统。对于式(1-1)线性系统来说，其系统矩阵的特征根分布情况决定系统的渐近稳定性。

定理 1-1 当且仅当系统矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根 λ 全部在左半开平面，式(1-1)系统的零输入解是渐近稳定的，其中特征根 λ 满足

$$\det[\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = 0$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

证明：式(1-1)系统的零输入通解可用指数矩阵表示[1]，即

$$\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0) = \exp[\boldsymbol{A}(t - t_0)]\boldsymbol{x}_0 \tag{1-3}$$

令 $\boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的约旦标准型矩阵，则存在变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{T}^{-1}$为 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵。矩阵 $\boldsymbol{J}$ 具有的形式为

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_N \end{bmatrix}$$

其中每一约旦矩阵块 $\boldsymbol{J}_i$ 的形式为

$$\boldsymbol{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

这里 $\lambda_i, i = 1, \cdots, N$，是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。约旦矩阵块 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶次等于 λ_i 的重数。利用下式展开

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \tag{1-4}$$

得到

$$\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)] = \boldsymbol{T}\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\boldsymbol{T}^{-1} \tag{1-5}$$

式中

$$\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)] = \begin{pmatrix} \exp[\boldsymbol{J}_1(t-t_0)] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \exp[\boldsymbol{J}_2(t-t_0)] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \exp[\boldsymbol{J}_N(t-t_0)] \end{pmatrix} \tag{1-6}$$

及

$$\exp[\boldsymbol{J}_i(t-t_0)] = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \cdots & t^{r-1}/(r-1)! \\ 0 & 1 & t & \cdots & t^{r-2}/(r-2)! \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & t \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 \end{pmatrix} \exp[\lambda_i(t-t_0)] \tag{1-7}$$

这里 r 是约旦矩阵块 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶次。因此,式(1-1)系统的零输入通解为

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0) = \boldsymbol{T}\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{1-8}$$

由式(1-6)和式(1-7),显然,对于 $t \geqslant t_0$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根具有负实部是 $\|\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\|$ 一致有界的充分和必要条件,$\|\cdot\|$ 是 $\cdot$ 的范数,并且

$$\lim_{t\to\infty}\|\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\| = 0 \tag{1-9}$$

如果 $\mathrm{Re}\lambda_i<0$,则对任意整数 n,有

$$\lim_{t\to\infty} t^n \exp(\lambda_i t) = 0 \tag{1-10}$$

由式(1-10)可见,指数矩阵 $\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]$的零点的有界性和收敛性对于式(1-1)系统的零输入解的渐近稳定性是充分的,因为 $\|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)\| \leqslant \|\boldsymbol{T}\| \|\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\| \|\boldsymbol{T}^{-1}\| \|\boldsymbol{x}_0\|$。

指数矩阵 $\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]$的零点的有界性和收敛性对于式(1-1)系统的零输入解的渐近稳定性也是必要的,采用反证法证明必要性。

假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根具有非负的实部,则当 $t\to\infty$时,矩阵 $\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]$不收敛于零,因此 $\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]$不收敛于零,这意味着矩阵 $\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]$至少有一个元素不收敛于零。设该元素为 b_{ij},是 $\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]$的第 i 行 j 列的元素。取初始状态为向量 $\boldsymbol{y}_0$,由式(1-5)得

$$\|\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)\| \geqslant |b_{ij}| \tag{1-11}$$

当 $t\to\infty$时,式(1-11)中的 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)$并不收敛于零状态,所以这一零输入解不是渐近稳定的,从而系统的零输入解不是渐近稳定的,但这与题设矛盾。　　证毕。

1.2　线性时不变连续系统的可控性和可观测性

当式(1-1)系统的输入信号向量 $\boldsymbol{u}(t)$不为零时,系统为受迫系统,系统的状态与输入信号有关,可用指数矩阵表示

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,0) = \exp[\boldsymbol{A}(t)]\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-12}$$

因为式(1-1)系统是线性时不变的,不失一般性,总可设 $t_0=0$。式(1-12)中的第一项为自治系统对初始扰动的状态响应(零输入响应),第二项为当受迫系统处于平衡状态时对施加的输入信号的状态响应(受迫响应)。

定义 1-2　如果式(1-1)系统对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 都存在控

制信号 $\boldsymbol{u}(t)$，使系统在有限时间内到达指定的状态 $\boldsymbol{x}_1$，则称系统为可控的。

定理 1-2 式(1-1)系统为可控的，当且仅当下列矩阵的阶次为 N

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = [\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\cdots,\boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B}] \tag{1-13}$$

证明：

必要性：设式(1-1)系统是可控的，对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，存在一个控制信号 $\boldsymbol{u}(t)$，$0 \leqslant t \leqslant T$，使 $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$。代入式(1-12)，得到

$$\boldsymbol{0} = \exp[\boldsymbol{A}(T)]\boldsymbol{x}_0 + \int_0^T \exp[\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{\tau})]\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-14}$$

由 Sylverster 公式，有

$$\exp(-\boldsymbol{A}\tau) = \sum_{k=0}^{N-1}\exp(\lambda_k\tau)\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{N-1}(\boldsymbol{A} - \lambda_j\boldsymbol{I})/(\lambda_k - \lambda_j) \tag{1-15}$$

式中，λ_k 和 λ_j 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。式(1-15)可写成

$$\exp(-\boldsymbol{A}\tau) = \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{A}^k r_k(\tau) \tag{1-16}$$

关于 $r_k(\tau)$ 的计算见附录 A2，将式(1-16)代入式(1-14)并化简，得到

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}r_k(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-17}$$

如果 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的阶次小于 N，则存在一个非零向量 $\boldsymbol{q}$，使得 $\boldsymbol{qM}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$，即

$$\boldsymbol{qB} = 0, \boldsymbol{qAB} = 0, \cdots, \boldsymbol{qA}^{N-1}\boldsymbol{B} = 0$$

代入式(1-17)，得到 $\boldsymbol{qx}_0 \equiv 0$，但 $\boldsymbol{x}_0$ 为任意的，所以 $\boldsymbol{q}=0$，与 $\boldsymbol{q}$ 是非零向量矛盾。