

270648

基本館藏

高等学校教学用书

复变数函数論

赵进义編著



高等教育出版社

3103

4338

270648

高等学校教学用书



复变函数论

赵进义 编著

高等教育出版社

本书共有十三章,在前八章阐述复变函数的基本理论,在后五章阐述特殊函数中代数函数,椭圆函数,模函数,以及比干尔定理,正规函数族和函数的反函数的主要部分,复变函数的基本理论是治函数论者必须掌握的知识,此特殊函数的主要部分,如代数函数在黎曼面上的性质,椭圆函数和模函数的构造和应用也是不可缺少的材料,因为在这几方面已经发展的相当成熟了,而且在特殊理论的研究上和实际应用上它都是常用的工具。至于比干尔定理,正规函数族和函数的反函数则是近五十年来函数论中主要问题之一,也都是应当了解的,所以此书可作为函数论专门化课程中必要教材,而亦可作为函数论工作者的参考资料。

此书曾经熊庆来、李国平两先生审阅,特此致谢。

复变函数论

赵进义 编著

高等教育出版社出版 北京宣武门内大街24号

(北京市书刊出版业营业许可出字第154号)

京华印书局印装 新华书店发行

统一书号13010·732 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 12 $\frac{1}{2}$

字数 303,000 印数 0001—8300 定价 (6) 单 1.10

1960年3月第1版 1960年3月北京第1次印刷

目 录

第一章 一般理論

I. 解析函数

1. 复变数平面.....	1	6. 拉波拉斯方程.....	11
2. 复变数函数.....	4	7. 极坐标形式之高希-黎曼方程及导数.....	13
3. 連續函数.....	5	8. 单值函数与多值函数.....	14
4. 高希-黎曼方程; 解析函数.....	5	9. 在一区域内为正則之函数.....	15
5. 导数.....	9		

II. 幂級数

10. 幂級数.....	15	12. 定理.....	18
11. 二重級数.....	17	13. 无穷乘积展为幂級数.....	19

第二章 基本函数

14. 有理整函数.....	21	19. 对数函数.....	30
15. 有理函数.....	21	20. 反三角函数.....	33
16. 代数函数.....	21	21. $\text{Log}(1+z)$ 之展开.....	36
17. 指数函数.....	25	22. 二项式公式.....	38
18. 三角函数.....	28		

第三章 共形映象

23. 两曲面之共形映象.....	41	27. 解析函数图象之保角性質.....	48
24. 曲面与平面之共形映象.....	44	28. 綫性变换.....	52
25. 两平面之共形映象.....	44	29. 黎曼定理.....	54
26. 等温綫.....	46	30. 地图.....	57

第四章 复变数函数之积分

31. 虛积分之定义.....	62	38. 系 3.....	72
32. 变数变换.....	64	39. 注意.....	73
33. 达尔布与維尔斯特拉斯公式.....	66	40. 高希积分公式.....	74
34. 高希基本定理.....	67	41. 高希导数公式.....	76
35. 高希基本定理之推广.....	70	42. 莫察拉定理.....	77
36. 系 1.....	71	43. 台勒級数.....	78
37. 系 2.....	72	44. 李武維尔定理.....	79

45. 正则函数之零点.....	80	49. 用保角映象所得之函数展开.....	87
46. 楼昂级数.....	81	50. 弗里哀级数.....	87
47. 阿白尔级数.....	84	51. 各项为正则函数之级数.....	90
48. 班乐卫级数.....	86	52. 哈达马不等式.....	93

第五章 奇点

53. 奇点.....	95	58. 分枝点与极点或本性奇点之基本区别.....	102
54. 极点.....	96	59. 无限点.....	103
55. 本性奇点.....	97	60. 有理型函数.....	105
56. 维尔斯特拉斯定理.....	99	61. 定理.....	106
57. 不孤立点.....	101		

第六章 留数

I. 留数定理

62. 定义.....	108	64. 函数对无限点之留数.....	111
63. 留数定理.....	109		

II. 留数在方程论上之应用

65. 高希对零点与极点之定理.....	114	67. 金葆公式.....	117
66. 胡申定理.....	116	68. 拉哥朗日公式.....	119

III. 留数在定积分上之应用

69. 预备定理.....	121	72. 几种无限积分.....	126
70. 有理函数之积分.....	122	73. 樊斯奈尔积分.....	130
71. $\sin x$ 与 $\cos x$ 之有理函数之积分.....	123	74. $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$ 之计算.....	131

IV. 有理型函数之分解

75. 高希方法.....	132	76. $\cot z$ 与 $\sin z$ 之展开.....	136
---------------	-----	----------------------------------	-----

第七章 代数微分之积分

77. 在一区域内不为正则之函数的积分.....	138	80. 积分 $\int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$	140
78. 环路.....	138	81. 积分 $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$	141
79. 积分 $\int_0^z \frac{dz}{z-1}$	139	82. 超椭圆积分.....	143
		83. 第一种椭圆积分.....	148

第八章 解析开拓

84. 导言.....	153	85. 解析开拓: 函数元素.....	153
-------------	-----	---------------------	-----

86. 奇点.....156	88. 奇线: 自然边界.....160
87. 多值函数.....159	89. 反映原理.....161

第九章 代数函数

I. 代数函数及与其相应之黎曼面

90. 代数方程.....164	98. 黎曼面.....174
91. 代数函数元素.....166	99. 黎曼面之一般做法.....180
92. 基本定理.....167	100. 分枝点之阶.....181
93. 定理.....168	101. 解析点.....182
94. 代数函数在分枝点邻近之展开.....168	102. 球状黎曼面.....182
95. $w = \infty$ 之情况.....170	103. 黎曼面之連結阶及亏数.....184
96. $z = \infty$ 之情况.....171	104. 黎曼公式.....186
97. 代数函数奇点.....171	

II. 黎曼面上之单值函数

105. 黎曼面上单值函数之通性.....187	108. 李武維尔定理.....194
106. 定理.....191	109. 定理.....194
107. z 与 w 之有理函数.....192	110. 例.....195

第十章 单值函数之分解

111. 整函数.....198	116. 有有限个奇点之单值解析函数.....210
112. 維尔斯特拉斯定理.....198	117. 米台哥-来弗勒定理.....211
113. 包埃尔定理.....202	118. 最大模定理.....213
114. 收敛指数.....203	119. 弗拉哥曼与林德勒夫定理.....215
115. 整函数之类及阶.....206	

第十一章 椭圆函数

I. 二重周期函数及椭圆函数之通性

120. 周期函数及其级数展开.....216	123. 二重周期函数; 周期平行四边形.....221
121. 单值解析函数有两个以上的周期 之不可能.....218	124. 二重周期整函数.....222
122. 单值解析函数的两个周期之比不 能为实数.....220	125. 椭圆函数.....222
	126. 椭圆函数之通性.....223

II. 維尔斯特拉斯椭圆函数

127. 函数 $p(u)$228	131. 函数 $\zeta(u)$234
128. $p(u)$ 在原点邻近之展开.....230	132. 函数 $\sigma(u)$236
129. $p(u)$ 之导数.....231	133. 椭圆函数之通式.....238
130. $p(u)$ 与 $p'(u)$ 之代数关系.....232	134. 加法公式.....242

135. 其他三 σ 函数.....	245	137. 周期与不变量之关系.....	249
136. 椭圆函数之积分.....	247	138. 用不变量决定之函数 $p(u)$	251

III. 椭圆函数之应用

139. 椭圆积分之计算.....	253	141. 阿貝耳微分.....	260
140. 三次平面曲线.....	258	142. 亏数 1 之曲线.....	261

IV. 耶考比椭圆函数

143. 有两单一极点之椭圆函数.....	263	155. 函数 θ 之零点.....	284
144. 函数 $\operatorname{sn} u$	264	156. v 为零时之四 θ 函数.....	285
145. 函数 $\operatorname{cn} u$	268	157. $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$ 之另一定义.....	287
146. 函数 $\operatorname{dn} u$	269	158. 应用.....	292
147. 总论.....	270	159. 函数 $\Theta(u)$	294
148. $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u$ 及 $\operatorname{dn} u$ 之微分.....	271	160. 椭圆函数用 Θ 函数之表示.....	296
149. 余模.....	271	161. 函数 $Z(u)$	297
150. 哥来舍符号.....	273	162. 海米特公式.....	298
151. 加法公式.....	273	163. 用 Θ 函数表示之椭圆积分.....	301
152. K 与 K' 之微分方程.....	278	164. 第一类椭圆积分.....	302
153. 函数 $\theta(v)$	279	165. 第二类椭圆积分; 函数 $E(u)$	303
154. 函数 θ 之无穷级数.....	282	166. 第三类椭圆积分.....	304

V. 耶考比椭圆函数与維尔斯特拉斯椭圆函数之关系

167. sn 与 p 之关系.....	306	169. σ 与 θ 之关系.....	310
168. e_1, e_2, e_3 与 θ 之关系.....	309		

第十二章 模函数

170. 等价周期偶.....	313	184. 定理 VI.....	327
171. 等价平行四边形网.....	315	185. 定理 VII.....	327
172. 绝对不变量 J	316	186. 基本等式.....	328
173. 函数 $J(\tau)$ 在正半平面中为正则.....	317	187. $J(\tau)$ 为 k^2 的函数之式.....	329
174. $J(\tau)$ 之基本性质.....	317	188. $J(\tau)$ 在 $\tau = i\infty$ 邻近之展开.....	330
175. 线性代换.....	318	189. $J(\tau)$ 之实值.....	330
176. 模群.....	319	190. 定理 VIII.....	331
177. 模群之基本区域.....	321	191. 在椭圆函数上之应用.....	332
178. 定理 I.....	322	192. 模函数.....	332
179. 定理 II.....	324	193. 函数 $\nu(k)$	333
180. 定理 III.....	325	194. $\nu(k)$ 之各分枝及与其有关之代换.....	334
181. 对 $J(\tau)$ 之应用.....	326	195. 椭圆积分的周期之比为其模之函数.....	337
182. 定理 IV.....	326		
183. 定理 V.....	326		

第十三章 比干尔定理·正规函数族·反函数之研究

I. 比干尔定理

- | | |
|---------------------------|------------------------------------|
| 196. 在整函数方面之比干尔定理.....339 | 200. 比干尔第一定理在代数体函数上
之推广.....347 |
| 197. 兰道定理.....341 | 201. 比干尔第一定理之补充.....350 |
| 198. 邵特基定理.....343 | |
| 199. 比干尔一般定理.....344 | |

II. 正规函数族

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| 202. 维尔斯特拉斯定理.....351 | 210. 有理型函数无限序列之一致收
敛.....360 |
| 203. 函数族.....353 | 211. 有理型函数之正规族.....360 |
| 204. 正则函数之正规族.....354 | 212. 不规则点; 例外序列.....361 |
| 205. 在一点的正规族.....355 | 213. 有理型函数之拟正规族.....361 |
| 206. 有界正规族.....356 | 214. 以上定理的应用——邵特基定
理.....362 |
| 207. 不规则点; 例外序列.....356 | 215. 比干尔第二定理.....362 |
| 208. 拟正规函数族.....358 | |
| 209. 不规则点.....359 | |

III. 反函数之研究

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 216. 反函数; 胡维茨定理.....364 | 220. 依外推的研究结果.....370 |
| 217. 唐若定理.....365 | 221. 两枝整代数体函数的反函数.....371 |
| 218. 渐近值; 定值路栈.....367 | 222. 超越奇点之类别.....374 |
| 219. 布德鲁之舌及其类别.....368 | |

中西人名对照表

第一章 一般理論

I. 解析函数

1. 复变数平面——設 a 与 b 为两任意实数, i 为表示虚数 $\sqrt{-1}$ 的符号; 則 $a+ib$ 称为复数; 如以两实变数 x 与 y 分別代 a 与 b , 則所得 $x+iy$ 称为复变数, 通常用 z 表示, 即令 $z=x+iy$ 。当 $y=0$ 时, $z=x$, 故实变数为复变数的特殊情况, 而且代数学上的基本运算亦可适用于复数之上。

下列形状的两复数

$$a+ib, a-ib$$

称为共轭复数; 将其相乘, 即得

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\geq 0,$$

因而两共轭复数的积恒为正数。下列形状的两复数

$$a+ib, -a-ib$$

称为对称复数; 将其相加, 即得

$$a+ib-a-ib=0,$$

因而两对称复数的和恒为零。

設 Oxy 为一直角坐标系; 用阿岡图解法可将复数 $a+ib$ 以此平面上坐标为 a, b 的点 m 表示; 因而对此平面上一点必有一复数与之对应; 反之, 对于一复数亦必有此平面上的一点与之对应, 并且都是一一地对应关系。此复数称为其对应点的附标, 而此平面則称为复变数平面。因实数与 x 軸上的点对应, 而純虚数与 y 軸上的点对应, 故 x 軸称为实軸而 y 軸称为虚軸。

設 m 点的坐标为 a, b ; 以直綫連結原点 O 与点 m (图 1), 則得綫段

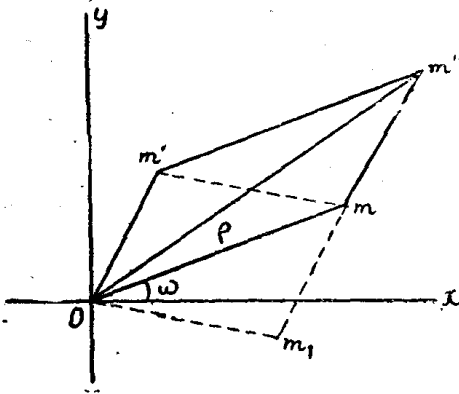


图 1

Om , 它称为复数 $a+ib$ 的模或绝对值, 可以用 ρ 或 $|a+ib|$ 表示。由 Ox 至 Om 的转角称为复数 $a+ib$ 的辐角, 可以用 ω 或 $\arg(a+ib)$ 表示。因

$$a = \rho \cos \omega, \quad b = \rho \sin \omega,$$

故

$$a+ib = \rho(\cos \omega + i \sin \omega),$$

而

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \omega = \arctan \frac{b}{a} \pm 2k\pi.$$

模 ρ 恒为正数, 可完全确定; 辐角 ω 可增加或减去 2π 的倍数, 不能完全确定。

设 $a'+ib'$ 为另一复数, m' 为其对应点, 则 $a+ib$ 与 $a'+ib'$ 之和

$$(a+a') + i(b+b')$$

的对应点 m'' 为依 Om 与 Om' 所绘平行四边形的顶点。于是, 三角形 Omm'' 的三边分别等于此三复数的模, 并得定理如下:

两个复数之和的模小于或至大等于其模的和, 而大于或至小等于其模的差。

同理, 多个复数之和的模小于或至大等于其模的和。

同此, 多个复数之和的对应点可用力学上平行四边形定则求定。

复数 $a+ib$ 与 $a'+ib'$ 之差

$$(a-a') + i(b-b')$$

的对应点 m_1 位于以 Om 为对角线, 以 Om' 为边所绘平行四边形的另一顶点。于是, 三角形 Omm_1 的三边分别等于此三复数的模, 并得定理如下:

两个复数之差的模大于或至小等于其模的差, 而小于或至大等于

其模的和。

因此, 两个复数之差的对应点亦可用平行四边形定則求定。

設有 n 个复数

$$z_1 = \rho_1(\cos \omega_1 + i \sin \omega_1),$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \omega_2 + i \sin \omega_2),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$z_n = \rho_n(\cos \omega_n + i \sin \omega_n).$$

将其相乘, 即得

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n [\cos(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + i \sin(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)];$$

因而

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n) = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n =$$

$$= \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n.$$

由此可知: 多个复数相乘之模等于此各复数之模的积; 多个复数相乘之幅角等于此各复数幅角之和。

在特別情形中, 如令 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ 皆等于 1 而 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 皆等于 ω , 則得德麻佛公式如下:

$$(\cos \omega + i \sin \omega)^n = \cos n\omega + i \sin n\omega.$$

求复数

$$z_1 = \rho_1(\cos \omega_1 + i \sin \omega_1),$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \omega_2 + i \sin \omega_2)$$

之商, 得

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\omega_1 - \omega_2) + i \sin(\omega_1 - \omega_2)];$$

因而

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \omega_1 - \omega_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

由此可知：两个复数相除之模等于此两复数之模的商；两个复数相除之幅角等于被除数幅角与除数幅角之差。

2. 复变数函数——复变数 w 的值如随另一复变数 z 的值而变，则 w 称为 z 的函数：

$$w = f(z),$$

而 z 称为复自变数。复变数 z 的函数用基本运算可化为下列形状：

$$w = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

其中 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 皆为实自变数 x, y 的函数，而称为共轭函数。因此，复变数函数 $w = f(z)$ 的研究等于两实变数函数 P 与 Q 的下列关系

$$w = P(x, y) + iQ(x, y)$$

的研究， $f(z)$ 有一定理， $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 亦随之有一相应定理，反之亦然。故由此两者所得结果完全一致。

当 $y=0$ 时，复变数 z 的函数 $f(z)$ 变为实变数 x 的函数 $f(x)$ ；故实变数函数亦是复变数函数的特殊情况。实变数函数定义于 x 轴上的区域，而复变数函数则定义于 Oxy 平面中的区域。

区域为多数点集合而成，可为有限，亦可为无限。在一区域内如果可用一连续路线连结其任意两点，则此区域称为连通区域。一连通区域可完全在有限距离内为一闭曲线或多数闭曲线所包含；但恒有一闭曲线做为其外境界。若一连通区域的境界是无二重点的闭曲线，则此区域称为单连通区域，相反，则称为复连通区域。若一区域为一闭曲线或多数闭曲线以外的点所组成，或其境界有伸展至无限的分枝，则此区域为无限。

境界以内与境界上的点的集合称为闭区域；只计区域以内的点而

不計境界上之点的集合称为开区域。

3. 連續函数——設 $w=f(z)$ 为复变数函数, Δz 为自变数 z 之无限小增量。当 Δz 之模趋于零时, 如 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$ 之模亦趋于零, 則此函数称为在 z_0 点連續。此定义亦可用另一种說法述之。当 Δz 之模小于一任意小正数 δ 时:

$$|\Delta z| < \delta,$$

如 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$ 之模小于随 δ 变小为零之另一正数 ε :

$$|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)| < \varepsilon,$$

則此函数称为在 z_0 点連續。

如 $w=f(z)$ 在一区域内各点皆适合此条件, 則 $w=f(z)$ 为此区域内之連續函数。

以 z_0 为心, δ 为半径, 作一圓 C ; 由上式可知 $w=f(z)$ 在此圓内为連續, 且其模 $|f(z)|$ 恒小于 $|f(z_0)| + \delta$ 。

如 $w=f(z)$ 为 z 之連續函数, 則其两共軛函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 皆为 x, y 之連續函数。設

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 点为連續, 則当 $|z - z_0| < \delta$, 或 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时,

$$|P(x, y) - P(x_0, y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon;$$

因之, $P(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点为連續。同理, 可証 $Q(x, y)$ 亦为 x, y 之連續函数。

反之, 如 $f(z)$ 之两共軛函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 为連續函数, 則 $f(z)$ 亦为連續函数。

4. 高希-黎曼方程; 解析函数——設

$$w = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

为一区域 D 内之連續函数, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ 为 z 之无限小增量。 $\Delta w = \Delta P + i\Delta Q$ 为此函数之相应增量。当 $|\Delta z|$ 趋于零, 或 $\Delta x, \Delta y$ 分別趋

于零时, 如

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta P + i\Delta Q}{\Delta x + i\Delta y}$$

有一定极限, 则此极限为此函数之导数。兹将此函数有导数之条件求之。

设 y 为常数, x 为变数, 则 $\Delta z = \Delta x$,

$$\Delta P = P(x + \Delta x, y) - P(x, y),$$

$$\Delta Q = Q(x + \Delta x, y) - Q(x, y),$$

而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{P(x + \Delta x, y) - P(x, y)}{\Delta x} + i \frac{Q(x + \Delta x, y) - Q(x, y)}{\Delta x}.$$

因之, 当 Δz 或 Δx 趋于零时, 此式之极限为

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

设 x 为常数, y 为变数, 则 $\Delta z = i\Delta y$,

$$\Delta P = P(x, y + \Delta y) - P(x, y),$$

$$\Delta Q = Q(x, y + \Delta y) - Q(x, y),$$

而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{P(x, y + \Delta y) - P(x, y)}{i\Delta y} + \frac{Q(x, y + \Delta y) - Q(x, y)}{\Delta y}.$$

因之, 当 $|\Delta z|$ 或 Δy 趋于零时, 此式之极限为

$$\frac{dw}{dz} = \lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{1}{i} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}.$$

此两种情况均属可能。故若欲 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 有一定极限, 则须以上两种结果相等。因而此函数有导数之条件为

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

此式称为高希-黎曼方程, 即复变数函数论之基本公式。适合此条件之

函数称为解析函数。

此种結果用下法求之，亦具有相当意义。在下式中

$$w = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

令 dP 与 dQ 为 P 与 Q 对增量 dx 与 dy 之全微分，则 $P+iQ$ 之增量的主值 $dP+idQ$ 与变数 z 或 $x+iy$ 的增量之比为

$$\frac{dP+idQ}{dx+idy} = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dy}{dx+idy}$$

当 $dx+idy$ 趋于零时，如以 μ 代 $\frac{dy}{dx}$ ，则此比之极限为与 μ 有关之式：

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mu}{1+i\mu}$$

因之， $x+iy$ 之函数 $P+iQ$ 对其变数之每一值有无限个有关于 $dx+idy$ 趋近于零的形态之导数，换言之，即 $P+iQ$ 对 $x+iy$ 一般地没有导数。

高希特殊化了此函数 P 与 Q 而使其有导数存在，换言之，即使上式与 μ 无关；其与 μ 无关之条件为

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}}{i};$$

等其两端之实数部与虚数部，即得基本公式(1)。

例如，函数 $w = x^2 - y^2 + i2xy$ 之两共轭函数

$$P(x, y) = x^2 - y^2, \quad Q(x, y) = 2xy$$

适合(1)式，故为解析函数，即 $w = z^2$ 。

如 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 为任意函数而非一复变数函数之两共轭函数，则不能适合(1)式，且 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 之商含 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。例如， $x-iy$ 之两共轭函数不适合(1)式，而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{1 - i \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

故 $x - iy$ 不为 z 之解析函数。

例——求复变数 $z = x + iy$ 之解析函数

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

若知 $P(x, y)$ 为 $u = \sqrt{x^2 + y^2} + x$ 之函数而 $Q(x, y)$ 为 $v = \sqrt{x^2 + y^2} - x$ 之函数。

設 $P = \varphi(u)$, $Q = \psi(v)$ 为所求之函数, 并令 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 則

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(1 + \frac{x}{r}\right) \varphi'(u) = \frac{u}{r} \varphi'(u),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{r} \varphi'(u),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{x}{r} - 1\right) \psi'(v) = -\frac{v}{r} \psi'(v),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{y}{r} \psi'(v).$$

因此, 由高希-黎曼方程得

$$u \varphi'(u) = y \psi'(v),$$

$$y \varphi'(u) = v \psi'(v).$$

将其两端互乘, 得

$$u \varphi'^2(u) = v \psi'^2(v).$$

因 u 与 v 彼此无关, 故若此式对任何 u, v 都能适合, 則須而只須

$$u \varphi'^2(u) \text{ 与 } v \psi'^2(v)$$

为相等常数。

若令

$$\varphi'(u) = \frac{C}{2\sqrt{u}},$$

$$\psi'(v) = \frac{C}{2\sqrt{v}},$$

則得

$$f(z) = C[\sqrt{u} + i\sqrt{v}].$$

因

$$(\sqrt{u} + i\sqrt{v})^2 = u - v + 2i\sqrt{uv} = 2(x + iy),$$

故

$$f(z) = \lambda\sqrt{z},$$

其中 λ 为一常数。

若令

$$\varphi'(u) = \frac{C}{2\sqrt{u}}, \quad \psi'(v) = \frac{-C}{2\sqrt{v}},$$

則得

$$C(\sqrt{u} - i\sqrt{v}) = \lambda\sqrt{x - iy},$$

此結果不为 z 之解析函数。

5. 导数——前节已求得复变数函数

$$w = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

有导数时 P 与 Q 所应具之条件, 茲将其导数求之。

設 P 与 Q 之 1 阶偏导数 $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ 皆为連續, 則

$$\Delta P = P(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x, y) =$$

$$= \Delta x \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \varepsilon \right) + \Delta y \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \varepsilon' \right),$$

$$\Delta Q = Q(x + \Delta x, y + \Delta y) - Q(x, y) =$$

$$= \Delta x \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \varepsilon_1 \right) + \Delta y \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + \varepsilon'_1 \right),$$

其中 $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \varepsilon'_1$ 均为与 $\Delta x, \Delta y$ 同趋于零之无限小。由(1)式, $\Delta w = \Delta P + i\Delta Q$ 可书为