高等学校教学用书

复变数函数論

赵进义編著

高等教育出版社

高等学校教学用书

复变数函数論

赵进义编著

高等教育出版社

[illegible]

本书共有十三章，在前八章闡述复变数函数的基本理論，在后五章闡述特殊函数中代数函数，橢圓函数，模函数，以及比卡尔定理，正規函数族和函数的反函数的主要部分。复变数函数的基本理論是治函数論者必須掌握的知識，此特殊函数的主要部分，如代数函数在黎曼面上的性质，橢圓函数和模函数的构造和应用也是不可缺少的材料，因为在这几方面已經发展的相当成熟了，而且在特殊理論的研究上和实际問題的应用上它都是常用的工具。至于比卡尔定理，正規函数族和函数的反函数則是近五十年来函数論中主要問題之一，也都是应当了解的，所以此书可作为函数論专門化課程中必要教材，而亦可作为函数論工作者的参考資料。

此书曾經熊庆来、李国平两先生审閱，特此致謝。

复变数函数論

赵进义 編著

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

京华印书局印裝 新华书店发行

統一书号13010·732 开本 850×1168 1/32 印張 12 1/16

字数 303,000 印数 0001—8000 定价（6）¥1.10

1960年3月第1版 1960年3月北京第1次印刷

目　　录

第一章　一般理論

I. 解析函数

II. 冪級数

第二章　基本函数

第三章　共形映象

第四章　复变数函数之积分

第五章 奇点

第六章 留数

I. 留数定理

II. 留数在方程論上之应用

III. 留数在定积分上之应用

IV. 有理型函数之分解

第七章 代数微分之积分

第八章 解析开拓

第九章 代数函数

I. 代数函数及与其相应之黎曼面

II. 黎曼面上之单值函数

第十章 单值函数之分解

第十一章 椭圓函数

I. 二重周期函数及椭圓函数之通性

II. 維尔斯特拉斯椭圓函数

Ⅲ. 椭圆函数之应用

Ⅳ. 耶考比椭圆函数

Ⅴ. 耶考比椭圓函数与維尔斯特拉斯椭圓函数之关系

第十二章 模函数

第十三章 比干尔定理·正规函数族·反函数之研究

I. 比干尔定理

II. 正规函数族

III. 反函数之研究

中西人名对照表

第一章　一般理論

I. 解析函数

1. 复变数平面——設 a 与 b 为两任意实数，i 为表示虚数 $\sqrt{-1}$ 的符号；則 $a+ib$ 称为复数；如以两实变数 x 与 y 分别代 a 与 b，則所得 $x+iy$ 称为**复变数**，通常用 z 表示，即令 $z=x+iy$。当 $y=0$ 时，$z=x$，故实变数为复变数的特殊情况，而且代数学上的基本运算亦可适用于复数之上。

下列形状的两复数

$$a+ib,\quad a-ib$$

称为**共軛复数**；将其相乘，即得

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2\geqslant 0,$$

因而两共軛复数的积恒为正数。下列形状的两复数

$$a+ib,\quad -a-ib$$

称为**对称复数**；将其相加，即得

$$a+ib-a-ib=0,$$

因而两对称复数的和恒为零。

設 Oxy 为一直角坐标系；用阿岡图解法可将复数 $a+ib$ 以此平面上坐标为 a, b 的点 m 表示；因而对此平面上一点必有一复数与之对应；反之，对于一复数亦必有此平面上的一点与之对应，并且都是一一地对应关系。此复数称为其对应点的附标，而此平面則称为**复变数平面**。因实数与 x 軸上的点对应，而純虚数与 y 軸上的点对应，故 x 軸称为**实軸**而 y 軸称为**虚軸**。

設 m 点的坐标为 a, b；以直綫連結原点 O 与点 m(图 1)，則得綫段

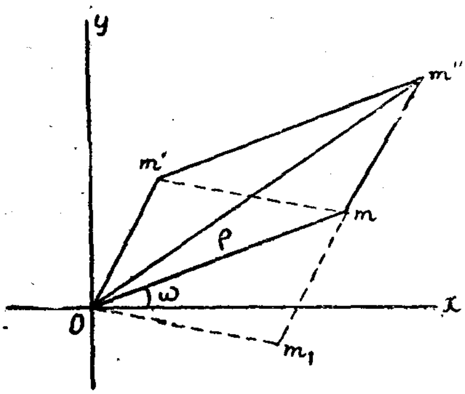

图 1

Om，它称为复数 $a+ib$ 的模或絕对値，可以用 ρ 或 $|a+ib|$ 表示。由 Ox 至 Om 的轉角称为复数 $a+ib$ 的輻角，可以用 ω 或 $\arg(a+ib)$ 表示。因

$$a=\rho\cos\omega,\quad b=\rho\sin\omega,$$

故

$$a+ib=\rho(\cos\omega+i\sin\omega),$$

而

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad \omega=\arctan\frac{b}{a}\pm 2k\pi.$$

模 ρ 恒为正数，可完全确定；輻角 ω 可增加或減去 2π 的倍数，不能完全确定。

設 $a'+ib'$ 为另一复数，m' 为其对应点，則 $a+ib$ 与 $a'+ib'$ 之和

$$(a+a')+i(b+b')$$

的对应点 m'' 为依 Om 与 Om' 所繪平行四边形的頂点。于是，三角形 Omm'' 的三边分别等于此三复数的模，并得定理如下：

两个复数之和的模小于或至大等于其模的和，而大于或至小等于其模的差。

同理，多个复数之和的模小于或至大等于其模的和。

同此，多个复数之和的对应点可用力学上平行四边形定則求定。

复数 $a+ib$ 与 $a'+ib'$ 之差

$$(a-a')+i(b-b')$$

的对应点 m_1 位于以 Om 为对角綫，以 Om' 为边所繪平行四边形的另一頂点。于是，三角形 Omm' 的三边分别等于此三复数的模，并得定理如下：

两个复数之差的模大于或至小等于其模的差，而小于或至大等于

其模的和。

因此，两个复数之差的对应点亦可用平行四边形定则求定。

設有 n 个复数

$$z_1=\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1),$$
$$z_2=\rho_2(\cos\omega_2+i\sin\omega_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$z_n=\rho_n(\cos\omega_n+i\sin\omega_n).$$

将其相乘，卽得

$$z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdots z_n=\rho_1\cdot\rho_2\cdot\cdots\cdots\rho_n[\cos(\omega_1+\omega_2+\cdots\cdots+\omega_n)+$$
$$+i\sin(\omega_1+\omega_2+\cdots\cdots+\omega_n)];$$

因而

$$|z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdots z_n|=\rho_1\cdot\rho_2\cdot\cdots\cdots\rho_n=|z_1|\cdot|z_2|\cdots\cdots|z_n|,$$
$$\arg(z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdots z_n)=\omega_1+\omega_2+\cdots\cdots+\omega_n=$$
$$=\arg z_1+\arg z_2+\cdots\cdots+\arg z_n.$$

由此可知：多个复数相乘之模等于此各复数之模的积；多个复数相乘之幅角等于此各复数幅角之和。

在特别情形中，如令 $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots, \rho_n$ 皆等于 1 而 $\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$ 皆等于 ω，則得德麻佛公式如下：

$$(\cos\omega+i\sin\omega)^n=\cos n\omega+\sin n\omega.$$

求复数

$$z_1=\rho_1(\cos\omega_1+i\sin\omega_1),$$
$$z_2=\rho_2(\cos\omega_2+i\sin\omega_2)$$

之商，得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\omega_1-\omega_2)+i\sin(\omega_1-\omega_2)];$$

因而

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\omega_1-\omega_2=\arg z_1-\arg z_2.$$

由此可知：两个复数相除之模等于此两复数之模的商；两个复数相除之幅角等于被除数幅角与除数幅角之差。

2. 复变数函数——复变数 w 的値如随另一复变数 z 的值而变，则 w 称为 z 的函数：

$$w=f(z),$$

而 z 称为**复自变数**。复变数 z 的函数用基本运算可化为下列形状：

$$w=f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

其中 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 皆为实自变数 x,y 的函数，而称为**共軛函数**。因此，复变数函数 $w=f(z)$ 的研究等于两实变数函数 P 与 Q 的下列关系

$$w=P(x,y)+iQ(x,y)$$

的研究，$f(z)$ 有一定理，$P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 亦随之有一相应定理，反之亦然。故由此两者所得結果完全一致。

当 $y=0$ 时，复变数 z 的函数 $f(z)$ 变为实变数 x 的函数 $f(x)$；故实变数函数亦是复变数函数的特殊情况。实变数函数定义于 x 軸上的区間，而复变数函数則定义于 Oxy 平面中的区域。

区域为多数点集合而成，可为有限，亦可为无限。在一区域内如果可用一連續路綫連結其任意两点，则此区域称为連通区域。一連通区域可完全在有限距离内为一閉曲綫或多数閉曲綫所包含；但恒有一閉曲綫做为其外境界。若一連通区域的境界是无二重点的閉曲綫，則此区域称为单連通区域，相反，則称为复連通区域。若一区域为一閉曲綫或多数閉曲綫以外的点所組成，或其境界有伸展至无限的分枝，則此区域为无限。

境界以内与境界上的点的集合称为閉区域；只計区域以内的点而

不計境界上之点的集合称为开区域。

3. 連續函数——設 $w=f(z)$ 为复变数函数，Δz 为自变数 z 之无限小增量。当 Δz 之模趋于零时，如 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$ 之模亦趋于零，則此函数称为在 z_0 点連續。此定义亦可用另一种說法述之。当 Δz 之模小于一任意小正数 δ 时：

$$|\Delta z|<\delta,$$

如 $f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$ 之模小于随 δ 变小为零之另一正数 ε：

$$|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)|<\varepsilon,$$

則此函数称为在 z_0 点連續。

如 $w=f(z)$ 在一区域内各点皆适合此条件，則 $w=f(z)$ 为此区域内之連續函数。

以 z_0 为心，δ 为半徑，作一圓 C；由上式可知 $w=f(z)$ 在此圓内为連續，且其模 $|f(z)|$ 恒小于 $|f(z_0)|+\varepsilon$。

如 $w=f(z)$ 为 z 之連續函数，則其两共軛函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 皆为 x,y 之連續函数。設

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

在 $z_0=x_0+iy_0$ 点为連續，則当 $|z-z_0|<\delta$，或 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 时，

$$|P(x,y)-P(x_0,y_0)|\leqslant|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon;$$

因之，$P(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点为連續。同理，可証 $Q(x,y)$ 亦为 x,y 之連續函数。

反之，如 $f(z)$ 之两共軛函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 为連續函数，則 $f(z)$ 亦为連續函数。

4. 高希-黎曼方程；解析函数——設

$$w=f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

为一区域 D 内之連續函数，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 为 z 之无限小增量。$\Delta w=$ $=\Delta P+i\Delta Q$ 为此函数之相应增量。当 $|\Delta z|$ 趋于零，或 $\Delta x,\Delta y$ 分別趋

于零时，如

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta P+i\Delta Q}{\Delta x+i\Delta y}$$

有一定极限，則此极限为此函数之导数。兹将此函数有导数之条件求之。

設 y 为常数，x 为变数，則 $\Delta z=\Delta x$，

$$\Delta P=P(x+\Delta x,y)-P(x,y),$$
$$\Delta Q=Q(x+\Delta x,y)-Q(x,y),$$

而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{P(x+\Delta x,y)-P(x,y)}{\Delta x}+i\frac{Q(x+\Delta x,y)-Q(x,y)}{\Delta x}.$$

因之，当 Δz 或 Δx 趋于零时，此式之极限为

$$\frac{dw}{dz}=\lim\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

設 x 为常数，y 为变数，則 $\Delta z=i\Delta y$，

$$\Delta P=P(x,y+\Delta y)-P(x,y),$$
$$\Delta Q=Q(x,y+\Delta y)-Q(x,y),$$

而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{P(x,y+\Delta y)-P(x,y)}{i\Delta y}+\frac{Q(x,y+\Delta y)-Q(x,y)}{\Delta y}.$$

因之，当 $|\Delta z|$ 或 Δy 趋于零时，此式之极限为

$$\frac{dw}{dz}=\lim\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{1}{i}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

此两种情况均属可能。故若欲 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 有一定极限，則須以上两种結果相等。因而此函数有导数之条件为

$$(1)\qquad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

此式称为高希-黎曼方程，即复变数函数論之基本公式。适合此条件之

函数称为解析函数。

此种結果用下法求之，亦具有相当意义。在下式中

$$w=f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

令 dP 与 dQ 为 P 与 Q 对增量 dx 与 dy 之全微分，則 $P+iQ$ 之增量的主値 $dP+idQ$ 与变数 z 或 $x+iy$ 的增量之比为

$$\frac{dP+idQ}{dx+idy}=\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dy}{dx+idy}.$$

当 $dx+idy$ 趋于零时，如以 μ 代 $\frac{dy}{dx}$，則此比之极限为与 μ 有关之式：

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mu}{1+i\mu}.$$

因之，$x+iy$ 之函数 $P+iQ$ 对其变数之每一值有无限个有关于 $dx+idy$ 趋近于零的形态之导数，换言之，卽 $P+iQ$ 对 $x+iy$ 一般地沒有导数。

高希特殊化了此函数 P 与 Q 而使其有导数存在，换言之，卽使上式与 μ 无关；其与 μ 无关之条件为

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}}{1}=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}}{i};$$

等其两端之实数部与虛数部，卽得基本公式(1)。

例如，函数 $w=x^2-y^2+i2xy$ 之两共軛函数

$$P(x,y)=x^2-y^2,\quad Q(x,y)=2xy$$

适合(1)式，故为解析函数，卽 $w=z^2$。

如 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 为任意函数而非一复变数函数之两共軛函数，則不能适合(1)式，且 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 之商含 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$。例如，$x-iy$ 之两共軛函数不适合(1)式，而

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}{1+i\dfrac{\Delta y}{\Delta x}},$$

故 $x-iy$ 不为 z 之解析函数。

例——求复变数 $z=x+iy$ 之解析函数

$$f(z)=P(x, y)+iQ(x, y),$$

若知 $P(x,y)$ 为 $u=\sqrt{x^2+y^2}+x$ 之函数而 $Q(x,y)$ 为 $v=\sqrt{x^2+y^2}-x$ 之函数。

設 $P=\varphi(u)$, $Q=\psi(v)$ 为所求之函数, 並令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 則

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\left(1+\frac{x}{r}\right)\varphi'(u)=\frac{u}{r}\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{r}\varphi'(u),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\left(\frac{x}{r}-1\right)\psi'(v)=-\frac{v}{r}\psi'(v),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{y}{r}\psi'(v).$$

因此, 由高希-黎曼方程得

$$u\varphi'(u)=y\psi'(v),$$
$$y\varphi'(u)=v\psi'(v).$$

将其两端互乘, 得

$$u\varphi'^2(u)=v\psi'^2(v).$$

因 u 与 v 彼此无关, 故若此式对任何 u, v 都能适合, 則須而只須

$$u\varphi'^2(u) \text{ 与 } v\psi'^2(v)$$

为相等常数。

若令

$$\varphi'(u)=\frac{C}{2\sqrt{u}},$$

$$\psi'(v)=\frac{C}{2\sqrt{v}},$$

則得

$$f(z)=C[\sqrt{u}+i\sqrt{v}].$$

因

$$(\sqrt{u}+i\sqrt{v})^2=u-v+2i\sqrt{uv}=2(x+iy),$$

故

$$f(z)=\lambda\sqrt{z},$$

其中 λ 为一常数。

若令

$$\varphi'(u)=\frac{C}{2\sqrt{u}},\quad \psi'(v)=\frac{-C}{2\sqrt{v}},$$

則得

$$C(\sqrt{u}-i\sqrt{v})=\lambda\sqrt{x-iy},$$

此結果不为 z 之解析函数。

5. 导数——前节已求得复变数函数

$$w=f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

有导数时 P 与 Q 所应具之条件，兹将其导数求之。

設 P 与 Q 之 1 阶偏导数 $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y}$ 皆为連續，則

$$\Delta P=P(x+\Delta x,y+\Delta y)-P(x,y)=$$

$$=\Delta x\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\varepsilon\right)+\Delta y\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\varepsilon'\right),$$

$$\Delta Q=Q(x+\Delta x,y+\Delta y)-Q(x,y)=$$

$$=\Delta x\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\varepsilon_1\right)+\Delta y\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\varepsilon_1'\right),$$

其中 $\varepsilon,\varepsilon',\varepsilon_1,\varepsilon_1'$ 均为与 Δx, Δy 同趨于零之无限小。由(1)式，$\Delta w=$ $=\Delta P+i\Delta Q$ 可书为