世界数学

黎曼猜想

辽宁教育出版社

名题欣赏

世界数学名题欣赏丛书

黎曼猜想

楼世拓　邬冬华　著

辽宁教育出版社

1987年·沈阳

黎曼猜想

楼世拓　邬冬华　著

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市南京街6段1里2号）　沈阳新华印刷厂印刷

字数：92,000　开本：787×1092 1/32　印张：6　插页：4
印数：3,246—5,746
1987年12月第1版　　1989年11月第2次印刷

责任编辑：俞晓群　谭　坚　　责任校对：言　覃
封面设计：安今生

ISBN 7-5382-0249-8/G·214　定价：2.35元

内容简介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。黎曼猜想是黎曼在1859年发表的题为《小于给定数的素数个数》一文中提出的。它是至今没有解决的一个“超级”数学难题。它与著名的素数定理有紧密的联系。在现代数学的许多领域，有类似于它的猜想，每个猜想的解决都将会引起数学界的关注。本书介绍了ζ函数的一些性质，以及从中引出的一些著名问题。并且介绍了几位大数学家在猜想研究中所作的贡献。把知识性和趣味性熔为一炉，适用于想了解猜想的读者阅读。

Summary

This is one of "A Series of Appreciation of Famous Mathematics Topics in World". Riemann Conjecture was posed by Riemann in early 50's of the 19th century in his thesis titled "The Number of Primes less than a Given Number". It is one of the unsolved "Supper" problems of mathematics. The conjecture is closely related to the well-known Prime Theorem. In many morden mathematics fields, there are similar conjectures. Every solvement of the conjectures attract closed attention in mathematics circle. This book introduces some well-known mathematician's great contributions to the conjecture. It also expounds the ardent course mathematicians walked on in bid to solv e the conjecture. In this book, interest is mixed with knowledge. Contents are plentiful and interesting. For readers of different degrees and circles, this book is really worth a good reading.

引　言

在19世纪和20世纪初期，科学和数学都因发现了新的基本原理和理论，从此焕然一新。如生物学中的达尔文、物理学中的麦克斯韦，心理学中的弗罗伊德，这些伟人的成就，在数学园地中，孕育出了两个非同异常的天才人物高斯和黎曼与之匹敌。这些成就在科学和数学中都引起了革命。在19世纪上半叶，数论中一个重要发展是解析方法和解析成果的导入，以表达和证明有关整数的事实。这一革新的创导者是狄利克莱和黎曼。然而，在这门学科中，迄今还有许多“傲物”没有被征服，其中之一就是数学中的一个“超级难题”——黎曼猜想。

黎曼猜想是德国科学院院士黎曼在1859年发表的一篇题为《论小于给定数的素数个数》的八页论文中提出的。自此之后，解析数论中的一大

批“世界级”难题几乎都与这篇文章有关。而这些有待解决的问题正好使解析数论这门学科充满活力。正象20世纪杰出的数学家希尔伯特所说的那样：“只要一门科学分支中充满着大量问题，它就充满了生命力，缺少问题意味着死亡或独立发展的终止，正如人类的每种事业都为了达到某种最终目的一样，数学须要问题。问题的解决锻炼研究者的力量，通过解决问题，他发现新方法及新观点并扩大他的眼界。”“谁跟前没有问题而去探索方法就很可能是无用的探索。”

从猜想提出至今，时间已走过了漫长的一个多世纪。在通向揭示猜想真伪的顶峰的坎坷道路上，许多杰出的数学家以巨大的热情去努力攀登，他们真正地懂得问题的价值。现在看来，离到达顶点还有一段漫长而又艰难的路。或许可以认为，目前对黎曼猜想乃至解析数论的研究，正处于一个期待着新突破的相对停滞阶段。一个时期的结束，促使我们追溯过去，追忆那些不堪回首的岁月，更能使我们正视现实面向未来。

现在，按年代的循迹，让我们共同就黎曼那篇关于素数个数的著名论文对解析数论乃至数学的发展所作的贡献作一点回顾和展望吧！

目　　录

CONTENTS

一　ζ函数和ζ函数方程

数学历史的进程就象一部交响曲，其包含了几个主题，主旋律通过这几个主题展开，使它们交相融会，达到预期的高潮。ζ 函数理论就是数学中一个非常重要的主题。

ζ 函数首先是由欧拉于1730至1750年间提出的。对 ζ 函数的研究使函数论（特别是整函数论）、数论、模函数论、椭圆函数论等许多理论得到了进一步的发展。

1·1 ζ函数

很早以前，人们就开始研究这样一个级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (1.1)$$

这个级数后来被命名为欧拉级数。当n很大时，

这个级数可以比我们给定的任何数要大得多，也就是说，当n趋向于无穷大时，级数（1.1）是发散的。

后来，人们又进一步研究级数

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} \tag{1.2}$$

当s是实数时，欧拉在1737年就证明了，如果s比1大，那么当n趋向于无穷大时，级数（1.2）有一个有限的极限值，换句话说，级数（1.2）收敛。我们将这个极限值记为$\zeta(s)$。

我们进一步考察级数（1.2）。如果s是一个复数，级数(1.2)又将有什么性质呢？大家知道，一个复数s可以写成 $s=\sigma+it$，其中σ和t都是实数，σ称为s的实数部分，t称为s的虚数部分，分别用符号$\mathrm{Re}(s)=\sigma$及 $\mathrm{Im}(s)=t$ 表示。利用复数的性质，我们可以看到：只要s的实数部分大于1，那么级数（1.2）一定有一个确定的复数作为它的极限值。我们也将这个极限值记为$\zeta(s)$。这样一来，函数$\zeta(s)$就是一个复变函数了。

我们把复数的实数部分看作是平面直角坐标系的横坐标，把虚数部分看作纵坐标。例如复数$a+ib$，被看成是平面上横坐标a、纵坐标为b的点

(a,b). 我们用这种方法将每一个复数与平面上的点建立起对应关系（图1.1），这样的平面称为复平面. 在复平面上的直角坐标系的横坐标 x 表示复数的实数部分，而纵坐标 y 表示复数的虚数部分.于是我们可以看到,实数部分为 1 的那些复数组成了直线 $x=1$，而实数部分大于 1 的复数呢？当然都位于这条直线的右边. 这样就组成了“半平面”（见图1.2）. 如果把s标在这平面上，则根据前面讨论可知，当 s 位于这个半平面时，级数（1.2）是收敛的，它的极限记为$\zeta(s)$.

在复变函数论中还证明了函数$\zeta(s)$是 s 的解析函数. 所谓解析函数，它是指这个函数在它的定义的范围内可以求出任意阶的导数. 对于解析函数，我们有一个著名的解析延拓定理，这个

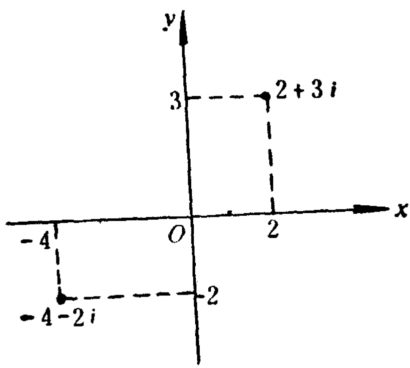

图1.1 复数平面上点的一一对应

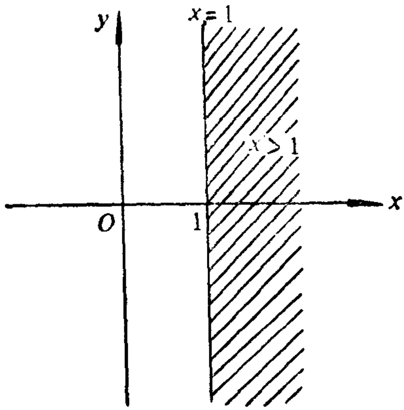

图1.2 复平面上$x=1$和$x>1$的区域

定理大致上是说：在一定条件下，一个解析函数是可以将它的定义范围进行扩张的，扩张后的函数还是一个解析函数。而且更重要的是，扩张后的函数只有一个在原来的定义范围内与原来的函数相重合。这个在较大范围内有定义的函数就称为原来那个函数的解析开拓。根据这个定理，我们就可以把较小范围内有定义的解析函数扩张到较大范围去讨论了。上面定义的函数$\zeta(s)$还只是对s的实数部分大于1时有意义，或者说仅仅在图1.2中的阴影的半平面上有意义。我们用解析延拓的方法可以把它的定义范围进行扩张。严格地说来，可以扩张到除去$s=1$以外的所有复数。

经过这样解析延拓后得到的函数，我们仍记作 $\zeta(s)$。这个函数就叫作黎曼ζ函数。

要指出的是，“解析延拓定理”在数学上仅仅是一个存在性定理，就是说，它只告诉我们存在一个解析函数，作为原来那个函数的解析延拓，它没有向人们指出，这个解析函数可以用什么方法来构造。因此，对于黎曼 ζ 函数来说，我们只知道一定有这样一个函数 $\zeta(s)$，除去$s=1$这点以外都是有意义的，而且是解析的。但是，除了s的实数部分大于1时已有明确的定义外，我们写不出 $\zeta(s)$ 的具体而明显的函数形状，这样一来，就给我们研究这个函数带来了极大的困难，因而一百多年来在黎曼 ζ 函数的研究中还有许多问题没有解决。

1.2 ζ函数的性质

ζ 函数看起来简单明了，但是其函数性质是非常复杂的，除了黎曼猜想外，至今还有许多著名难题没有得到解决。$\zeta(n)$在$n>1$时与 $n<0$ 时的情况是同样地糟糕。

早在1749年，欧拉首先对于所有偶数$n\geq 2$计算了$\zeta(n)$以及对于整数$n>0$，估算了交错级数1-

$2^n+3^n-4^n+\cdots$.

在级数 $1-2^n+3^n-\cdots$的情形，欧拉利用了阿贝尔求和方法作幂级数

$$F(x)=x-2^nx^2+3^nx^3-\cdots$$

并发现这可表示为一个有理函数，然后他对$x=1$取值。他的证明依赖于一个称之为欧拉——马克劳林求和公式，同时此公式引进了贝努利数的概念。如果您去看他的原著的话，你会发现他的应用的确有点鲁莽。后来他给出了一个令人满意的做法。

现在，我们从函数$x\operatorname{ctg}x$ 的部分分式展开式出发，来讨论它与ζ函数之间的关系。

定理2.1 对于 $|x|<1$，我们有

$$\pi x\operatorname{ctg}\pi x=1-2\sum_{m=1}^{\infty}S_{2m}x^{2m}$$

其中 $S_{2m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}$.

证明 我们首先从$\sin x$的无穷乘积展开式入手。为了研究幂级数和 ζ 函数的关系，欧拉首先建立了下列有名的展开式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$