光学仪器精度分析

王尔祺　宋德慧　编著

测绘出版社

前　言

测量精度对任何量测仪器来说，都是一项重要的性能指标。怎样才能合理地达到预定的精度指标，这是仪器设计、制造及使用者最关心的问题，其实这就是精度分析问题。本书试图以光学仪器总体设计与测试技术研究的实践为基础，详细讨论这个问题。给读者以理论根据、具体方法及解题模式。

既然精度分析是为仪器设计、制造及使用提供精度论据的，自然应当在满足仪器的工作性能、测量范围以及工作效率等使用指标的前提下，根据仪器使用精度指标，来分析仪器各个部分误差因素对最终测量精度的影响。同时，还应当以经济性原则作为评价指标，力求使所设计的仪器达到较高精度与较低成本之目的，这是精度分析总的指导思想。

对工程实例作误差分析，从中提取数学模型，进行误差求解与精度分配是本书的重点。

在建模时，免不了会将复杂的实际工程问题理想化。所以，必须根据分析结果对仪器进行精度检验。这种基于系统学观点来讨论精度问题是本书的特点。

本书共分四章：第一章仪器精度分析的理论基础，第二章精度分析的起始数据与分析方法，第三章仪器误差的求解方法，第四章光学仪器的精度计算。最后，对优化技术在精度分配上的应用作了初步探讨，仅供读者参考。

清华大学徐世朴副教授、王东生讲师，上海工业大学王因明副教授，天津大学傅维乔副教授，以及张和之高级工程师等对原稿提出了修改意见，老教育家梁披云先生为本书题了书名，还有不少先生对本书的撰写给予热情帮助，在此一并致谢。

我们的水平有限，书中缺点和错误在所难免，请读者批评指正。

作　者

1988年9月于厦门大学

目　　录

第一章　仪器精度分析的理论基础 …………………… (1)
§1　误差与精度的概念 …………………… (1)
§2　随机误差的统计规律 …………………… (3)
§3　权与不等精度测量 …………………… (26)
§4　随机误差的非正态分布 …………………… (31)
§5　系统误差 …………………… (44)
§6　误差的传递与合成 …………………… (55)
第二章　精度分析的起始数据与分析方法 …………………… (82)
§1　精度分析方法步骤概述 …………………… (82)
§2　设计起始数据分析 …………………… (83)
§3　仪器分析方法与测量原理框图的构成 …………………… (90)
§4　仪器误差分析与测量误差框图的构成 …………………… (94)
§5　关于如何合理地匹配误差的问题 …………………… (112)
第三章　仪器误差的求解方法 …………………… (114)
§1　微分法求仪器误差 …………………… (114)
§2　几何法计算误差 …………………… (116)
§3　机构误差的分析计算法 …………………… (117)
§4　标准器误差的求解 …………………… (123)
§5　测角仪器轴系歪斜引起的测角误差的求解 …………………… (131)
§6　光学系统各部分误差的求解 …………………… (152)
第四章　光学仪器的精度计算 …………………… (178)
§1　仪器总误差的求法 …………………… (178)
§2　仪器精度评价 …………………… (185)
§3　仪器误差分配 …………………… (237)
§4　仪器构造参数与零部件公差的确定 …………………… (255)
§5　拟定仪器精度验收技术条件并提出检验方法与要求 …………………… (260)
§6　误差分配优化方法的探讨 …………………… (279)
附表 …………………… (297)
参考文献 …………………… (302)

第一章　仪器精度分析的理论基础

仪器精度分析有下面两项主要内容：

一、评价仪器精度；

二、合理地分配仪器误差。

所谓仪器精度指的是，由于仪器构造上的缺陷所决定的仪器自身的精确程度。精度的高低只能用测量误差来衡量。只有对被检仪器进行反复测量，得到一系列测量值。然后，对它们进行统计处理，求出单次测量标准误差（也称中误差、均方根误差等，以下同）以及系统误差值，并把它们综合起来，才能评价仪器精度的高低。这项工作本身就是误差理论讨论的内容。简言之，只有以误差理论为根据，才能正确地评价仪器的精度。

由于仪器的各个环节都存在误差，因此，精度分析的主要内容就是研究误差。只有分析误差产生的原因、性质和分布规律、不同性质的误差之间相互转化的规律、传递与合成的规律，才有可能把仪器允许的总误差合理地分配到各个组成环节上（或者反过来，由各组成环节的误差来预测设计方案的总误差）。尽管仪器误差和测量误差是不同的概念，但其数学处理实质上是一致的，只有根据误差理论才能解决仪器误差分配问题。

§1　误差与精度的概念

无论何人使用何种仪器实施何种测量，都不可避免地存在误差，误差造成测量值的变化。为了判断测量结果的准确度，前人对测量值进行了大量的统计研究，逐渐形成了误差理论，给误差分析和精度评价打下了基础。在设计光学量测仪器时，为了进行精度分析，最低限度应当掌握本书所述有关误差的概念和结论。

所谓误差就是某量值的给出值与其客观真值之差。误差按其表现特性可分为系统误差、随机误差以及粗差三种。就其产生的原因而论，可分为仪器误差、人的误差、外界环境误差以及测量方法误差。

一、系统误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和正负号保持不变，或者按一定规律变化的误差称为系统误差。例如，设计仪器时，由于采用近似机构或近似公式而产生的原理误差；仪器使用时，单边受热产生的温度误差；测角仪器的度盘安装不正确，引起的偏心误差；仪器的瞄准轴与水平轴不垂直，产生准直误差；仪器在使用时受强烈冲击，引起位置误差等等。

由于系统误差不具有随机相消性，往往对测量结果有严重影响。因此，在设计仪器以及在使用仪器进行测量时，必须尽可能设法预见各种系统误差的来源。通过合理地选择设

计方案、装配、校正以及测量方法来消除其影响。例如，采取对径读数，消除度盘偏心的影响。采取测回法，消除轴系误差的影响。设计野外校正机构，消除温度误差以及震动、冲击误差的影响等。

对于军用光学仪器，由于使用条件和环境的限制，一般难以通过测量方法来消除系统误差的影响。因此，在设计这类仪器时，不能不注意系统误差的特殊影响。必须严格限制仪器系统误差的大小，以确保仪器的使用精度。

二、随机误差

在同一条件下，多次测量同一量值时，绝对值和符号以不可预测的方式变化的误差称为随机误差。

随机误差是由很多不稳定的、未能掌握的或不可控制的微小因素引起的。主要有以下几个方面：

1． 仪器的精密度不高，零部件配合不稳定，零部件变形，机构活动配合间隙变化，油膜不均匀，摩擦阻力时大时小等原因引起的；

2． 人的感官生理特性限制，在架设仪器、瞄准、读数时，视觉和触觉以及精神状态不稳定，或者经验不足等原因引起的；

3． 外界环境的影响，大气透明度、目标的照度、温度的微小变化、湿度与气压的微量变化、光照强度的变化、尘埃以及电磁场变化等引起的。

尽管随机误差的出现是必然的，但是可以通过理论分析，把测量信息流程闭合回路中的各个环节找出来，针对误差来源采取措施。比如，提高仪器精密度，合理校正仪器，选择正确的测量方法和测量程序，尽量避免外界影响以及稳定操作者精神状态等，来控制或减小随机误差，提高测量精度。并且可以通过精度分析，运用测量误差理论来估计随机误差的大小，以确定测量结果的可靠程度。

三、粗　　差

粗差是在测量过程中，由某些偶尔发生的反常因素所引起的，大体有以下三方面：

1． 操作者粗心大意带来的，如读错、记错或仪器位置走动；

2． 实验环境条件突变产生的；

3． 在正常情况下，某些超出置信限的误差因素造成，如零件加工中的尺寸超差等。

因为上述这些都是工作上疏忽引起的，就其大小而论，总是比系统误差与随机误差值大得多。所以，可以从系统误差与随机误差中分析出来，并从测量结果中剔除。在分析计算中，不考虑粗差。

四、关于精度的概念

精度指的是测量值偏离真值的程度，是用误差来衡量的。而误差按其性质可分为系统误差和随机误差。因此，精度也可相应地细分为

1． 准确度：反映系统误差大小的程度；

2． 精密度：反映随机误差大小的程度；

3． 精确度：反映系统误差与随机误差综合影响的程度。

对于测量而言，准确度高的精密度不一定高。精密度高的，准确度不一定高。但精确度高，则意味着精密度与准确度都高。如图 1－1 所示，(a)的系统误差小，但随机误差大，即准确度高而精密度低；(b)的系统误差大，但随机误差小，即准确度低而精密度高；(c)的系统误差与随机误差都小，即精确度高。

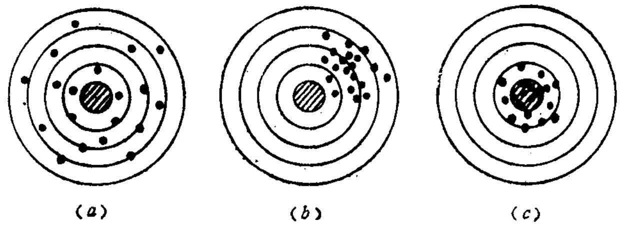

图 1-1

下页用图 1－2 所示框图，对上述误差与精度的概念作一简要小结。

§ 2　随机误差的统计规律

对某量实施测量，得到一系列实测值，我们把实测值 x_i 与真值 X_0 之差定义为真误差 δ_i，即

$$\delta_i = x_i - X_0 \qquad (1\cdot2\cdot1)$$

式中　$i = 1, 2, \cdots, n$（测量次数）。

既然测量值必包含误差，真值永远不可测得，那末该如何评价测量结果呢？具体地说，就是如何解决下列四个问题。

第一，选怎样的一个值作为测量结果，最符合客观实际？

第二，单次测量的可靠性怎样？

第三，测量结果的可靠程度多高？

第四，粗差剔除的准则是什么？

要解决上述问题，首先必须对测量列进行统计研究。

一、随机误差的正态分布

通过对一系列等精度的测量值进行统计研究表明，在偶然因素影响下产生的随机误差存在下述统计规律。

1． 有界性——在一定的测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定范围。亦即随机误差超过这个范围的概率接近于零（误差的范围是有界的）。

2． 单峰性——绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大，误差最小者概率最大（误差的概率规律是单峰的）。

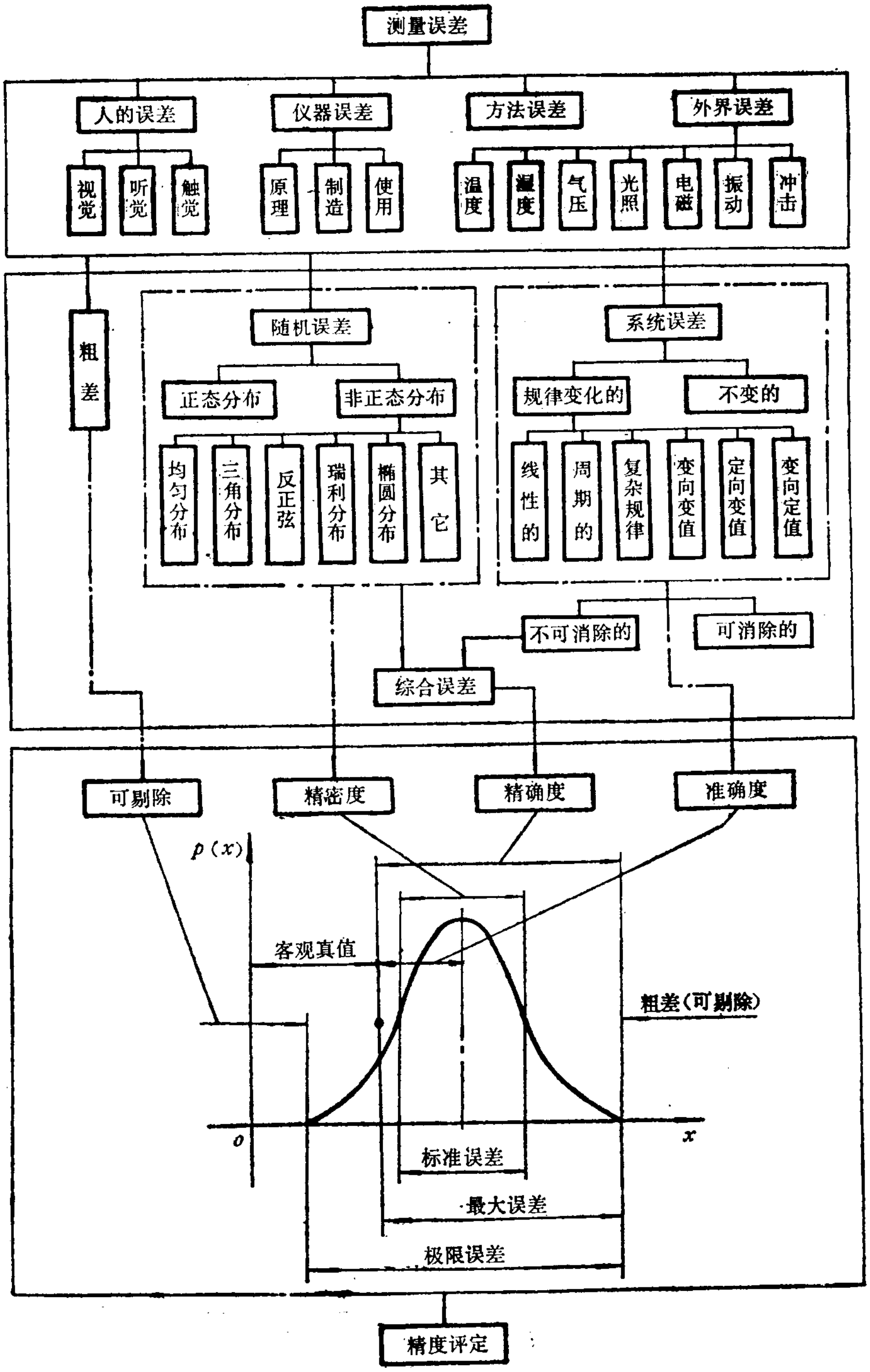
测量误差
人的误差
仪器误差
方法误差
外界误差
视觉
听觉
触觉
原理
制造
使用
温度
湿度
气压
光照
电磁
振动
冲击
粗差
随机误差
正态分布
非正态分布
均匀分布
三角分布
反正弦
瑞利分布
椭圆分布
其它
系统误差
规律变化的
不变的
线性的
周期的
复杂规律
变向变值
定向变值
变向定值
不可消除的
可消除的
综合误差
可剔除
精密度
精确度
准确度
p(x)
客观真值
粗差(可剔除)
o
x
标准误差
最大误差
极限误差
精度评定

图 1-2

3. 对称性——绝对值相等的正负误差出现的概率相等(误差的方向规律是对称的)。

4. 抵偿性——同一量的等精度测量，其随机误差的算术平均值随测量次数的无限增加而趋向于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n}{n}=0$$

（随机误差在大量测量过程中的抵偿性，这不能从严格的极限意义上去理解，而只能从误差对称性随测量次数 n 的增大而趋明显上来理解。）

上述四个统计特性说明，随机误差出现的概率是误差值大小的函数。把随机误差作为随机变量进行研究，1809 年数学家高斯总结出这种随机变量 X 的概率密度函数的一般关系式为

$$y=p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1·2·2}$$

$$(-\infty<x<+\infty),\ (\sigma>0)$$

式中 e 表示自然对数的底，其值为 2.7182…。

人们称具有上述四个特性的随机变量 X 遵从正态分布。在直角坐标系内，正态分布的概率密度曲线图形（如图 1-3 所示）呈钟形。最大值点在 $x=\mu$ 处，μ 是正态分布的均值(想要得到的理想值)，也称数学期望(用符号 $E(X)$ 表示)，曲线相对该直线成对称形。σ 称为标准误差，它表示误差的散布宽度。曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点，当 $x\longrightarrow\pm\infty$ 时，曲线以 x 轴为渐近线。式（1·2·2）中，σ 与 μ 这两个参数是正态分布的两个主要的数字特征。

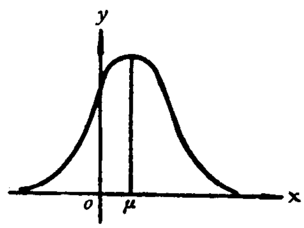

图 1-3

下面将根据正态分布的数字特征，分别讨论前面提出的四个问题。

二、最小二乘原理

1. 算术平均值原理

设 x_1，x_2，…，x_n，是等精度测量列，其真误差分别为

$$\delta_1=x_1-X_0$$
$$\delta_2=x_2-X_0$$
$$\cdots\cdots$$
$$\delta_n=x_n-X_0$$

和数

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}x_i-nX_0$$

真值

$$X_0=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{n} \tag{1·2·3}$$

式中：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$表示实测值的算术平均值，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{n}$表示算术平均值的真误差。

根据前述随机误差的第四个特性可知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i}{n}=0$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\overline{x}=X_0$$

即当测量次数无限增大时，则某一量在相同条件下测量结果的算术平均值$\overline{x}$趋于该量的真值X_0，这就是算术平均值原理。

事实上对某一个量进行无穷多次测量是不可能的。因此，某一量的真值也是不可能获得的。在实际测量中，对任一量的观测次数总是有限的，根据这有限个观测值，求出某量的算术平均值$\overline{x}$。该算术平均值$\overline{x}$与其真值X_0只差一个量$\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i/n$。一般它是一个很小的量，故算术平均值$\overline{x}$很接近于真值$X_0$，亦即算术平均值是该量的最可信赖值。所谓最可信赖值，其可信赖程度不是绝对的，是随着测量次数的增加而增加的。

要是对某量进行无限次测量，就可以得到不受随机误差影响的（或影响甚小可以忽略的）测量值（随机变量X）的真正"平均"，即数学期望值$E(X)$。

在概率统计上，将离散型随机变量X的一切可能值x_k与相应概率p_k(即$p\{X=x_k\}=p_k$，$k=1, 2, \cdots$)的乘积之和，定义为离散型随机变量X的数学期望

$$E(X)=\sum_k x_k p_k \tag{1·2·4}$$

而连续型随机变量X与其概率密度$p(x)$乘积之积分，定义为连续型随机变量X的数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx \tag{1·2·5}$$

如果随机变量X的概率密度为$p(x)$，$f(X)$是X的函数，则随机变量函数$f(X)$的数学期望

$$E[f(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)dx \tag{1·2·6}$$

上面说过，实际上，无限多次测量是做不到的。即便是有限次测量，条件也不完全相同。但我们还是把算术平均值$\overline{x}$近似作为被测量的真值X_0。这是因为有限次数的测量值（抽样）X_1，X_2，…，X_n的算术平均值$\overline{X}$本身也是个随机变量。它的数学期望$E(\overline{X})$与无限次数测量值（总体）随机变量X的数学期望$E(X)$相同。即

$$E(\overline{X})=E\left[\frac{(X_1+X_2+\cdots+X_n)}{n}\right]=\left(\frac{1}{n}\right)E[X_1+X_2+\cdots+X_n]$$

$$=\frac{1}{n}[nE(X)]=E(X) \tag{1·2·7}$$

这一特点在误差理论中称为无偏性，即算术平均值$\overline{X}$是数学期望值$E(X)$的无偏估计量。而且还可以证明算术平均值$\overline{X}$比任何单个测量值X_i的分散度小。因而，用它来估计数学期望值$E(X)$最有效。

2. 最小二乘原理

在直接测量时，以观测值的算术平均值作为被测量的最可信赖值。但组合测量中有几个待测参数，算术平均值原理已不适用。为此提出最小二乘原理，来求未知参数的最可信赖值，作为测量结果。例如，某函数

$$y=a+bx+cz$$

式中x，z是待测参数。在不同测量条件，即不同a_i，b_i和$c_i(i=1, 2,\cdots, n)$时，测得y_i值，从而得到许多方程式

$$y_i=a_i+b_ix+c_iz \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

如果测量y_i与a_i、b_i、c_i时没有误差，即$a_i=a_{i0}$，$b_i=b_{i0}$，$c_i=c_{i0}$，$y_i=y_{i0}$(y_{i0}为第i次测量的真值)，则只须测量两次就可以解出上列方程组，从而求出待测参数的真值x_0与z_0。但是测量y_i与a_i，b_i，c_i时都有误差，因而所求得的x，z也是有误差的，这就要进行多次测量，通过最小二乘法求得最可信赖值。

同样，如果我们在测量中，所进行的观测次数比要确定的未知量所必须的观测次数为多，亦即产生了多余观测，而且这些观测获得的结果又不完全一致，这时也会产生如何确定未知量的最可信赖值的问题。这也要应用最小二乘原理来求解。

最小二乘原理指出，在等精度多次测量中，最可信赖值是符合式（1·2·8）为最小的那个x_0。

$$f(x_0)=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2]=\min \tag{1·2·8}$$

式中x_i为各次测量值。

最小二乘法可由高斯误差定律导出：

设在一组测量中，各观测值为

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

其最可信赖值为x_0，则对应的误差为

$$\begin{aligned}\delta_1&=x_1-x_0\\ \delta_2&=x_2-x_0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_n&=x_n-x_0\end{aligned}$$

根据高斯定律，具有误差为

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_n$$

的观测值出现的概率分别为

$$P_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}}d\delta_1$$

$$P_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}}d\delta_2$$

……………………………………

$$P_n=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta_n^2}{2\sigma^2}}d\delta_n$$

因各次测量是独立事件，所以误差（样本）δ_1，δ_2，…，δ_n是独立随机变量，而它们同时出现（总体）的概率为各样本概率之乘积，即

$$\begin{aligned}P&=P_1P_2\cdots P_n\\&=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2)}d\delta_1 d\delta_2 d\delta_3\cdots d\delta_n\end{aligned}$$

在误差分布中，我们看到小误差比大误差出现的机会多。因此，在任一组测量中，误差小的那些数值比误差大的那些数值出现的概率要大。这就是说，在一组测量中，最可信赖值乃是当概率P最大时所求出的那个值。从上式指数关系中得知，当P最大时，

$$\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2$$

应为最小，亦即在一组测量中，各误差的平方和为最小，最小二乘法由此而得名。

如前所述，
$$f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2$$
为最小值时的x_0就是最可信赖值，这在数学上是一个求极值的问题。

$f(x_0)$的一阶导数为

$$f'(x_0)=2\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)$$

令

$$f'(x_0)=0$$

解得

$$x_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x} \tag{1·2·9}$$

上式说明x_0为x_i的算术平均值$\overline{x}$时，$f(x_0)$为极值。而

$$f''(x_0)=2n>0$$

说明$f(x_0)$是最小值。这就证明算术平均值满足最小二乘原理。

三、测量列中单次测量的标准误差

由于随机误差的存在，等精度测量列中每个测得值一般都不相同，它们围绕着该测量列的算术平均值有一定的散布，这个分散度说明了单次测量值的不可靠性。用怎样一个数值作为测量列中单次测量值不可靠性的评定标准呢？如果以测量值对均值的平均偏离程度，即式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \tag{1·2·10}$$

表示，由于（$x_i-\mu$）出现正负号的概率大致相等，其总和相互抵消，结果反映不出散布情况。为了避免正负相消，若将上式改为绝对值形式，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\mu| \tag{1·2·11}$$

这种绝对值运算也不方便，所以人们通常选取测量值对均值偏差平方的平均值，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \tag{1·2·12}$$

表示某一次测值的分散度，称之为散度，习惯上又称方差。

标准误差是方差的正平方根。

下面按离散型和连续型随机变量分别给出方差的定义。

对离散型的随机变量X，其概率分布是

$$P(X=x_k)=p_k \qquad k=1,\ 2,\ \cdots$$

则方差

$$D(X)=\sum_k[x_k-E(X)]^2p_k \tag{1·2·13}$$

对连续型随机变量X，其概率密度为$p(x)$，则方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2p(x)dx \tag{1·2·14}$$

由随机变量函数期望的公式（1·2·6）可知，式（1·2·14）可以写成：

$$D(X)=E[X-E(X)]^2 \tag{1·2·15}$$

就正态分布而言，由于$E(X)=\mu$，密度函数关系式如（1·2·2）所示，则方差

$$D(X)=E(X-\mu)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，则

上式 $$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2 \tag{1·2·16}$$

上列推导说明，正态分布的方差等于σ^2，显然σ就是正态分布的标准误差。从正态分布概率密度函数的关系式（1·2·2）

$$y=p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

中也可以看出，标准误差σ的值越小，该测量列中，相应小的误差占优势，任一单次测量值对算术平均值的分散度就小，测量值的可靠性就大，即测量精度就高(如图1-4上第1条曲线所示)；反之，测量精度就低(如图1-4上第3条曲线所示)。由此可知，单次测量的标准误差σ可作为测量列中单次测量不可靠性的评定标准。

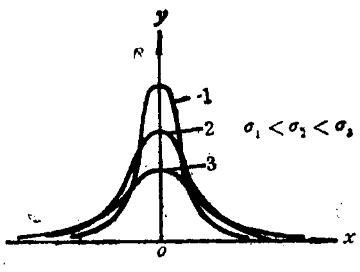

图 1-4

应该指出，一列随机误差有大有小，无法用某一个误差值来描述。但可以用一个统计平均的指标——标准误差 σ 描写。标准误差 σ 不是一个具体的误差值，而是真误差的均方值。它是表征所有测得的真误差分散度的特征值（随机误差在 $\pm\sigma$ 范围内出现的概率为68.26%，详见后），是表征整个测量值好坏的质量指标。σ 大小只说明在一定的条件下，等精度测量列随机误差出现的概率分布情况。在该（即一定）条件下，任何一个单次测量结果的误差值都不等于 σ，但却认为这一系列测量值都具有同样一个标准误差。在不同条件下进行两个系列的等精度测量，一般具有不同的 σ 值。

单次测量标准误差可用下列关系式计算

1. 用真误差表示：σ 可根据方差公式（1·2·13）推算出

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2 p_i}$$

当 $p_i=\dfrac{1}{n}$ 时，因为

$$\delta_i=x_i-E(X)$$

所以

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}} \tag{1·2·17}$$

2. 用剩余误差表示：由于被测量的真值不可知，不能按上式求 σ。因此，只能先对算术平均值求剩余误差

$$v_i=x_i-\overline{x} \tag{1·2·18}$$

然后再计算标准误差。

引用真误差表达式（1·2·1）

$$\delta_i=x_i-X_0$$

建立下列方程组

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=x_1-\overline{x}+\overline{x}-X_0\\ \delta_2&=x_2-\overline{x}+\overline{x}-X_0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_n&=x_n-\overline{x}+\overline{x}-X_0\end{aligned}\right\} \tag{1·2·19}$$

其中 $(\overline{x}-X_0)=\delta_{\overline{x}}$ 称为算术平均值的真误差。把它与式(1·2·18)一起代入方程组(1·2·19)由此得

这就是白塞尔公式，根据此式可由剩余误差求得单次测量的标准误差。

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=v_1+\delta_{\bar{x}}\\ \delta_2&=v_2+\delta_{\bar{x}}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_n&=v_n+\delta_{\bar{x}}\end{aligned}\right\}\tag{1·2·20}$$

将方程组（1·2·20）求和得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}v_i+n\delta_{\bar{x}}$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}v_i=0$$

所以

$$\delta_{\bar{x}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{n}\tag{1·2·21}$$

将方程组（1·2·20）平方后求和

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}v_i^2+2\delta_{\bar{x}}\sum_{i=1}^{n}v_i+n\delta_{\bar{x}}^2=\sum_{i=1}^{n}v_i^2+n\delta_{\bar{x}}^2\tag{1·2·22}$$

由式（1·2·21)平方得

$$\delta_{\bar{x}}^2=\frac{(\sum_{i=1}^{n}\delta_i)^2}{n^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n^2}+\frac{2\sum_{i\neq j}^{n}\delta_i\delta_j}{n^2}$$

当 n 适当大时，由于 δ_i、δ_j 是相互独立的，可认为 $\sum_{i\neq j}^{n}\delta_i\delta_j$ 趋于零，即得

$$\delta_{\bar{x}}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n^2}\tag{1·2·23}$$

将（1·2·23）代入（1·2·22）得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}v_i^2+\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2}{n}\cdot(n-1)=\sum_{i=1}^{n}v_i^2$$

再根据式（1·2·17）得

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}$$

即

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}\tag{1·2·24}$$

这就是白塞尔公式，根据此式可由剩余误差求得单次测量的标准误差。

为了计算方便建议使用下列公式：

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right]} \tag{1·2·25}$$

式（1·2·24）实质上是用有限次测量值（抽样）X_1，X_2，…，X_n的“样本方差”

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

去估计无限次测量值（总体）X的方差。

因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2&=\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\cdot n\overline{X}+n\overline{X}^2\\&=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\end{aligned} \tag{1·2·26}$$

所以

$$\begin{aligned}E[s^2]&=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]\\&=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-\frac{n}{n-1}E(\overline{X}^2)\end{aligned} \tag{1·2·27}$$

但由式（1·2·15）可推得

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

则

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$$

将上式代入式（1·2·27）得

$$E[s^2]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{D(x_i)+[E(X_i)]^2\}-\frac{n}{n-1}\{D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2\}$$

因为

$$D(X_i)=D(X), \qquad E(X_i)=E(X)$$

$$D(\overline{X})=\frac{D(X)}{n}, \qquad E(\overline{X})=E(X)$$

所以

$$E[s^2]=\frac{n}{n-1}\{D(X)+[E(X)]^2\}-\frac{n}{n-1}\left\{\frac{D(X)}{n}+[E(X)]^2\right\}=D(X) \tag{1·2·28}$$

从式（1·2·28）明显看出，虽然样本方差s^2是随机变量，但是它是总体方差$D(X)$的“无偏估计量”。因此，可以近似地取

$$\sigma=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}{n-1}}$$

3．其它计算公式：对于正态分布，除了用上述方法求 σ 之外，还有一些简单方法，常用的有：

（1）别捷尔斯法

由式（1·2·24）与（1·2·17）得

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2$$

此式可近似成

$$\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|\approx\sum_{i=1}^{n}|v_i|\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

则平均误差为

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|}{n}=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\sum_{i=1}^{n}|v_i|$$

由平均误差与标准误差的关系式得

$$\sigma=\frac{1}{0.7979}\theta=1.253\theta$$

故有

$$\sigma=1.253\frac{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \tag{1·2·29}$$

这就是别捷尔斯公式，它可由 v 的绝对值之和求出单次测量标准误差 σ，而算术平均值的标准误差（详见四）为

$$\sigma_{\bar{x}}=1.253\frac{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}{n\sqrt{n-1}} \tag{1·2·30}$$

（2）极差法

用白塞尔公式(1·2·24)，和别捷尔斯公式(1·2·29)，计算标准误差均需要先求算术平均值，再求剩余误差，然后进行其它运算，过程比较复杂。在要求简单迅速地算出标准误差时，可用极差法。

等精度多次测量得测量值 x_1，x_2，…，x_n，在其中选取最大值 x_{max} 与最小值 x_{min}，则两者之差称之为极差 w_n，即

$$w_n=x_{max}-x_{min} \tag{1·2·31}$$

根据极差的分布函数，可求出极差的数学期望

$$E(w_n)=d_n\sigma \tag{1·2·32}$$

因

$$E\left(\frac{w_n}{d_n}\right)=\sigma \tag{1·2·33}$$

故可得 σ 的无偏估计值，此处仍以 σ 表示，即

$$\sigma=\frac{w_n}{d_n} \tag{1·2·34}$$

式中 d_n 的数值见表 1-1。

表 1-1

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d_n	3.17	3.26	3.34	3.41	3.47	3.53	3.59	3.64	3.69	3.74

极差法可简单迅速算出标准误差，当测量次数 $n<10$ 时，用极差法算出的 σ 值，其误差比用白塞尔公式算得的误差小。当 $n=8$ 时，效果最好。因此，对小样本而言，此种方法可以弥补白塞尔公式的不足。这种思路可用于各种分布形式中，此处只对正态分布作了推导。

（3）最大误差法

在有些情况下，可以知道约定真值，因而能够算出偶然误差 δ_i，取其中绝对值最大的一个值 $|\delta_i|_{max}$，当各个等精度的独立测量值服从正态分布时，则可求出关系式

$$\sigma=\frac{|\delta_i|_{max}}{K_n} \tag{1·2·35}$$

当被测量的约定真值为未知时，应按最大剩余误差 $|v_i|_{max}$ 计算标准误差，即

$$\sigma=\frac{|v_i|_{max}}{K'_n} \tag{1·2·36}$$

用最大误差可求出标准误差，这种方法称为最大误差法。式中系数 K_n 和 K'_n 的倒数见表 1-2。此表也是根据正态分布求得的。

最大误差法简单、迅速、方便、容易掌握，因而有广泛用途。当 $n<10$ 时，最大误差法有一定的精度。

在代价较高的实验中(如破坏性实验)，常常只进行一次实验，此时白塞尔公式成为 $\frac{0}{0}$ 不定型，无法计算精度。在这种情况下，又特别需要尽可能准确地算出精度，因而最大误差法就显得特别有用。