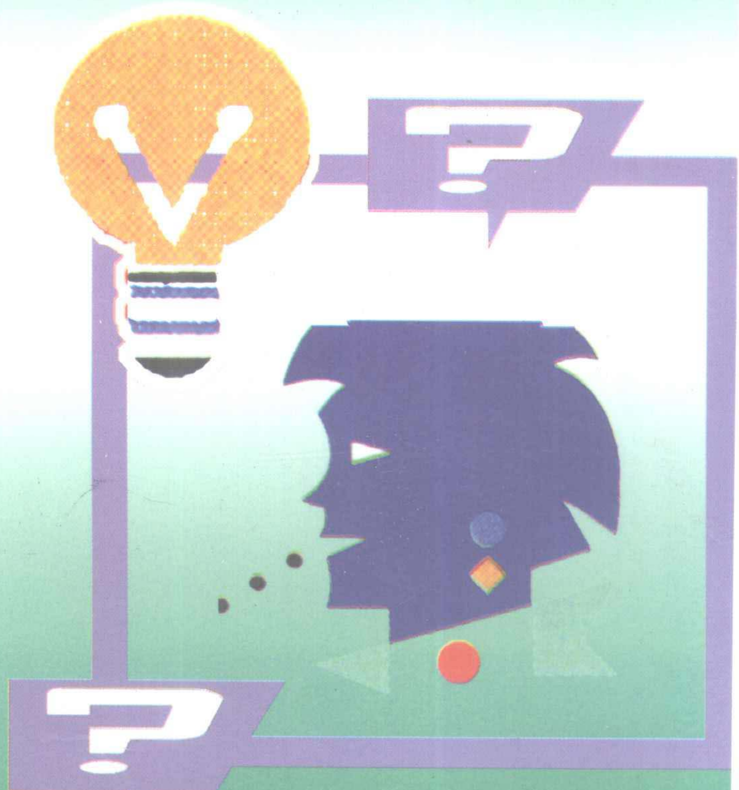
高等数学

学习指导书 下册

涂汉生　曾永根
胡　成　周海东　编



西南交通大学出版社
SOUTHWEST JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等数学学习指导书

下 册

涂汉生 曾永根
胡 成 周海东 编

西南交通大学出版社

· 成 都 ·

图书在版编目（C I P）数据

高等数学学习指导书.下册/涂汉生等编. —成都：西南交通大学出版社，2000.12（2002.8重印）
ISBN 7-81057-532-5

Ⅰ.高… Ⅱ.涂… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第57258号

高等数学学习指导书

下 册

涂汉生 曾永根
胡 成 周海东 编

*

出 版 人 宋绍南
责任编辑 戴本文
封面设计 毕雪屏

西南交通大学出版社出版发行
（成都二环路北一段111号 邮政编码:610031 发行科电话:87600564）
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:9
字数:219千字 印数:9001—14000册
2000年12月第1版 2002年8月第3次印刷
ISBN 7-81057-532-5/O·030
定价:11.50元

前　言

"高等数学"是高等工科院校的一门重要基础课.学生对它掌握的好坏,不仅关系到后继课程的学习,而且对今后的提高和发展有着深远的影响.然而由于学时的减少,教师在课堂上不可能讲解很多的例题,作业也不可能全部批改,因而学生在学习中,普遍感到虽然内容听懂了,但做起题来却有不少困难.

为帮助学生学好"高等数学"这门课程,我们编写了这本《高等数学学习指导书》,分为上、下册出版.该书对于学生理解所学内容,掌握重点、难点和演算习题等方面均会有所帮助,是一本较为理想的参考书.

本书每章由四部分组成:一是基本要求;二是基本计算;三是习题选解;四是思考问题.参加本书下册编写的人员有:涂汉生(各章的基本要求、基本计算、思考问题及第七章习题 7-1～习题 7-3 和第十一章的习题选解)、曾永根(第七章习题 7-4～习题 7-8 和第八章的习题选解)、胡成(第九章的习题选解)、周海东(第十章的习题选解).在本书的编写过程中,得到西南交通大学应用数学系(特别是高等数学教研室)和西南交通大学出版社的大力支持与帮助,在此一并致谢.

限于编者水平,加之时间仓促,不足之处在所难免,敬请广大读者给予批评和指正.

编　者

2000.9.15

目　　录

第七章　微分方程

一、基本要求

1. 了解微分方程、通解、初始条件和特解等概念.

2. 掌握可分离变量方程及一阶线性方程的解法.

3. 会解齐次方程和贝努里方程以及欧拉方程,并从中领会用变量变换求解方程的思想.

4. 会用降阶法解下列类型的方程:

$y^{(n)} = f(x)$,　$y'' = f(x,y')$　和　$y'' = f(y,y')$.

5. 理解二阶线性微分方程解的结构.

6. 掌握二阶常系数齐次线性方程的解法,并了解高阶常系数齐次线性方程的解法.

7. 会求自由项为多项式、指数函数、正余弦函数以及它们的和与乘积的二阶常系数非齐次线性方程的解法.

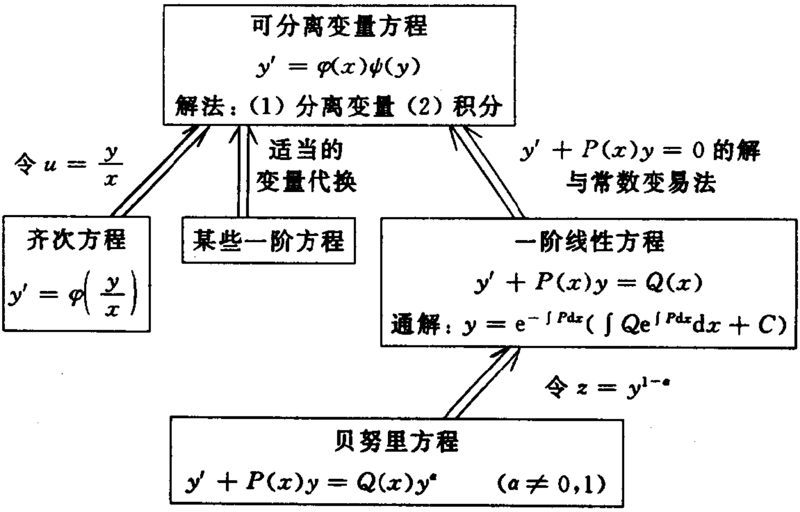
8. 会用微分方程解一些简单的几何和物理问题.

二、基本计算

在解微分方程时,首先要判断方程的类型(有些方程可能属于多种类型),然后用相应的方法求解. 用微分方程解决应用问题时,需根据题意列出微分方程,并找出初始条件来.

1. 一阶微分方程

其解法见如下框图:



2. 可降阶的高阶微分方程

(1) $y^{(n)} = f(x)$ 型：连续积分 n 次即可得通解.

(2) $y'' = f(x, y')$ 型：令 $y' = P$，则 $y'' = \dfrac{dP}{dx}$，可化为一阶方程来求解.

(3) $y'' = f(y, y')$ 型：令 $y' = P$，则 $y'' = P\dfrac{dP}{dy}$，可化为一阶方程来求解.

注：$y'' = f(y)$ 或 $y'' = f(y')$ 型也可按 $y'' = f(y, y')$ 型处理.

3. 二阶常系数齐次线性方程：

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 \qquad (p_1, p_2 \text{ 为实常数})$$

特征方程为 $\quad r^2 + p_1 r + p_2 = 0.$

$r^2 + p_1 r + p_2 = 0$ 的根	$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$ 的通解
两不等实根 $\quad r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两相等实根 $\quad r_1 = r_2$	$y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x)$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

4. 二阶常系数非齐次线性方程：

$$y'' + p_1y' + p_2y = Q(x) \qquad (p_1, p_2 \text{ 为实常数})$$

(1) $Q(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ 型（$P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式，α 为常数），则其特解形式为：$y^* = x^kQ_n(x)e^{\alpha x}$（$Q_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式）.

其中 $$k = \begin{cases} 0, & \alpha \text{ 不是特征方程的根}, \\ 1, & \alpha \text{ 是特征方程的单根}, \\ 2, & \alpha \text{ 是特征方程的二重根}. \end{cases}$$

(2) $Q(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $Q(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 型，先求方程 $y'' + p_1y' + p_2y = P_n(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ 的特解 $y^* = y_1^* + iy_2^*$，则

$y'' + p_1y' + p_2y = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 的特解为 $\mathrm{Re}y^* = y_1^*$，

$y'' + p_1y' + p_2y = P_n(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 的特解为 $\mathrm{Im}y^* = y_2^*$.

注：若 $Q(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$ 型，$P_m(x)$ 与 $P_n(x)$ 分别是 x 的 m 次与 n 次多项式，α, β 为常数，则 $y'' + p_1y' + p_2y = Q(x)$ 有如下形式特解：

$$y^* = x^ke^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x].$$

其中，$Q_l(x)$ 与 $R_l(x)$ 均为 x 的 l 次多项式，

$$l = \max(m, n),$$

$$k = \begin{cases} 0, & \alpha + i\beta \text{ 不是特征方程的根}, \\ 1, & \alpha + i\beta \text{ 是特征方程的单根}. \end{cases}$$

n 阶常系数齐次线性方程和 n 阶常系数非齐次线性方程的解法与二阶常系数齐次线性方程和二阶常系数非齐次线性方程的解法类似.

5. 欧拉方程

对方程 $x^ny^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}xy' + p_ny = Q(x)$（其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 均为实常数），作变换 $x = e^t$（或 $t = \ln x$），并引入记号 $D^k = \dfrac{d^k}{dt^k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，则可将欧拉方程化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程：

$$D(D-1)\cdots(D-n+1)y+p_1D(D-1)\cdots(D-n+2)y$$
$$+\cdots+p_{n-1}Dy+p_ny=Q(e^t),$$

求出这个方程的通解后，用$t=\ln x$（或$e^t=x$）换回原变量，就得到欧拉方程的通解.

三、习题选解

习题 7-1

1. 说出下列微分方程的阶：

(1) $\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$；　(2) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=0$；

(3) $S''+3S'+2S=\cos t$；

(4) $(7x-6y)dx+(x+y)dy=0$；

(5) $\frac{d^3y}{dx^3}-y=e^x$；　(6) $\frac{d\rho}{d\theta}+\rho=\sin^2\theta$.

解　(1) 一阶；(2) 二阶；(3) 二阶；

(4) 一阶；(5) 三阶；(6) 一阶.

2. 对以下各题，验证所给函数是微分方程的解：

(1) $xy'=2y$, $y=5x^2$；

(2) $y''+y=0$, $y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-(a_1+a_2)y'+a_1a_2y=0$,

$y=C_1e^{a_1x}+C_2e^{a_2x}$　(C_1,C_2 为常数)；

(4) $x(y-1)y''+x(y')^2+yy'-2y'=0$, $y=\ln(xy)$.

解　(1) 因 $y'=10x$，代入方程得

$$x\cdot 10x=2\cdot 5x^2,$$

故 $y=5x^2$ 是所给方程的解.

(2) 因 $y'=3\cos x+4\sin x$, $y''=-3\sin x+4\cos x$,

代入方程得　$(-3\sin x+4\cos x)+(3\sin x-4\cos x)=0$,

故 $y=3\sin x-4\cos x$ 是所给方程的解.

(3) 因 $$y' = C_1a_1e^{a_1x} + C_2a_2e^{a_2x},$$
$$y'' = C_1a_1^2e^{a_1x} + C_2a_2^2e^{a_2x},$$
代入方程得
$$(C_1a_1^2e^{a_1x} + C_2a_2^2e^{a_2x}) - (a_1 + a_2)(C_1a_1e^{a_1x} + C_2a_2e^{a_2x}) + a_1a_2(C_1e^{a_1x} + C_2e^{a_2x}) = 0,$$
故 $y = C_1e^{a_1x} + C_2e^{a_2x}$ 是所给方程的解.

(4) 将 $y = \ln(xy)$ 两边对 x 求导,得
$$y' = \frac{1}{xy}(y + xy') = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}y',\text{即 } y' = \frac{y}{xy - x},$$
$$y'' = \frac{y'(xy - x) - y(y + xy' - 1)}{(xy - x)^2} = \frac{-xy' - y^2 + y}{(xy - x)^2}$$
$$= \frac{-xy^3 + 2xy^2 - 2xy}{(xy - x)^3},$$
代入方程得
$$(xy - x)\cdot\frac{-xy^3 + 2xy^2 - 2xy}{(xy - x)^3} + x\cdot\frac{y^2}{(xy - x)^2} + y\cdot\frac{y}{xy - x} - 2\cdot\frac{y}{xy - x} = 0,$$
故 $y = \ln(xy)$ 所确定的函数是所给方程的解.

3. 已知曲线族,求出它相应的微分方程(其中 C, C_1, C_2 均为常数):

(1) $(x + C)^2 + y^2 = 1$;　　(2) $(y - C_2)^2 = 4C_1x$;

(3) $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$.

解　(1) 将$(x + C)^2 + y^2 = 1$ 两边对 x 求导,得
$$2(x + C) + 2yy' = 0,$$
从而 $$x + C = -yy'.$$
代入所给曲线族得
$$(-yy')^2 + y^2 = 1,$$
故 $y^2y'^2 + y^2 = 1$ 为所求微分方程.

(2) 将$(y - C_2)^2 = 4C_1x$ 两边对 x 求导,得
$$2(y - C_2)y' = 4C_1,$$

即 $$(y-C_2)y'=2C_1, \qquad ①$$

两边再对 x 求导得

$$(y')^2+(y-C_2)y''=0,$$

从而 $$y-C_2=-\frac{(y')^2}{y''},$$

代入 ① 式得 $$C_1=-\frac{(y')^3}{2y''},$$

代入所给曲线族，得

$$\left(-\frac{(y')^2}{y''}\right)^2=-\frac{4(y')^3}{2y''}x,$$

即 $$2xy''+y'=0.$$

(3) 将 $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{aligned}y'&=2C_1\cos 2x-2C_2\sin 2x,\\ y''&=-4C_1\sin 2x-4C_2\cos 2x\\ &=-4(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)=-4y,\end{aligned}$$

故 $y''+4y=0$ 为所求微分方程.

4. 在下列各题中，确定函数关系式中所含的常数，使函数满足所给的初始条件：

(1) $x^2-y^2=C$, $y|_{x=0}=5$;

(2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$, $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=1$;

(3) $y=C_1\sin(x-C_2)$, $y|_{x=\pi}=1$, $y'|_{x=\pi}=0$.

解 (1) 因 $y|_{x=0}=5$，故 $C=0-5^2=-25$,

从而 $$y^2-x^2=25.$$

(2) $y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}$,

由 $$y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=1,$$

得 $$\begin{cases}C_1=0,\\ C_2+2C_1=1,\end{cases}$$

故 $$\begin{cases}C_1=0,\\ C_2=1,\end{cases}$$

从而 $$y=xe^{2x}.$$

(3) $y' = C_1\cos(x - C_2)$，

由 $y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0$ 得

$$\begin{cases} C_1\sin(\pi - C_2) = C_1\sin C_2 = 1, \\ C_1\cos(\pi - C_2) = -C_1\cos C_2 = 0, \end{cases}$$

故 $$C_1 = 1,\quad C_2 = \frac{\pi}{2},$$

从而 $$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

5. 写出下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线在点(x,y)处的切线的斜率等于该点横坐标的平方；

(2) 曲线上点$P(x,y)$处的法线与x轴的交点为Q，且线段PQ被y轴平分.

解 (1) 设曲线为$y = y(x)$，则曲线上点(x,y)处的切线斜率为y'，由题意知所求微分方程为$y' = x^2$.

(2) 设曲线为$y = y(x)$，则曲线上点$P(x,y)$处的法线斜率为$-\dfrac{1}{y'}$，由题设知PQ中点的横坐标为0，所以点Q的坐标为$(-x,0)$，则有

$$\frac{y-0}{x+x} = -\frac{1}{y'},$$

故$yy' + 2x = 0$为所求微分方程.

6. 用微分方程表示物理命题：某种气体的气压P对于温度T的变化率与气压成正比，与温度的平方成反比.

解 $\dfrac{dP}{dT} = k\dfrac{P}{T^2}$，$k$为比例系数.

习题 7-2

(一) 可分离变量方程

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy' - y\ln y = 0$;　　(2) $\sqrt{1-x^2}y' = \sqrt{1-y^2}$;

(3) $3x^2 + 5x - 5y' = 0$;

(4) $\sec^2 x \cdot \tan y\mathrm{d}x + \sec^2 y \cdot \tan x\mathrm{d}y = 0$;

(5) $(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}y = 0$;

(6) $\cos x \cdot \sin y\mathrm{d}x + \sin x \cdot \cos y\mathrm{d}y = 0$;

(7) $(y+1)^2 y' + x^3 = 0$;　(8) $y' = 10^{x+y}$;

(9) $y\mathrm{d}x + (x^2 - 4x)\mathrm{d}y = 0$.

解　(1) 将方程分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得　$\ln(\ln y) = \ln x + \ln C = \ln(Cx)$,

即　$\ln y = Cx$,

故通解为 $y = \mathrm{e}^{Cx}$.

(2) 将方程分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

积分得　$\arcsin y = \arcsin x + C$,

此即为所求通解.

(3) 将方程分离变量,得

$$5\mathrm{d}y = (3x^2 + 5x)\mathrm{d}x,$$

积分得　$5y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1$,

故通解为　$y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C \quad \left(C = \frac{1}{5}C_1\right)$.

(4) 将方程分离变量,得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y}\mathrm{d}y = -\frac{\sec^2 x}{\tan x}\mathrm{d}x,$$

积分得　$\ln(\tan y) = -\ln(\tan x) + \ln C = \ln\left(\frac{C}{\tan x}\right)$,

即　$\tan y = \frac{C}{\tan x}$,

故通解为 $$\tan x \cdot \tan y = C.$$

(5) 将方程改写成 $\dfrac{e^x}{e^x+1}dx + \dfrac{e^y}{e^y-1}dy = 0$,

积分得 $$\ln(e^x+1) + \ln(e^y-1) = \ln C,$$

即 $$\ln[(e^x+1)(e^y-1)] = \ln C,$$

故通解为 $$(e^x+1)(e^y-1) = C.$$

(6) 将方程分离变量,得

$$\frac{\cos y}{\sin y}dy = -\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

积分得 $$\ln(\sin y) = -\ln(\sin x) + \ln C = \ln\frac{C}{\sin x},$$

即 $$\sin y = \frac{C}{\sin x},$$

故通解为 $$\sin x \cdot \sin y = C.$$

(7) 将方程分离变量,得

$$(y+1)^2 dy = -x^3 dx,$$

积分得 $$\frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C_1,$$

故通解为 $$3x^4 + 4(y+1)^3 = C \qquad (C = 12C_1).$$

(8) 将方程分离变量,得

$$10^{-y}dy = 10^x dx,$$

积分得 $$-\frac{10^{-y}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10} + C_1,$$

即 $$10^{-y} = -10^x - C_1\ln 10,$$

故通解为 $$y = -\lg(-10^x + C) \qquad (C = -C_1\ln 10).$$

(9) 将方程分离变量,得

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{4x - x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right)dx,$$

积分得 $$4\ln y = \ln x - \ln(4-x) + \ln C = \ln\frac{Cx}{4-x},$$

即 $$y^4 = \frac{Cx}{4-x},$$

故通解为 $$y^4(4-x) = Cx.$$

2. 求下列微分方程的特解：

(1) $y' = e^{2x-y}$，$y|_{x=0} = 0$；

(2) $\cos x \cdot \sin y\mathrm{d}y = \cos y \cdot \sin x\mathrm{d}x$，$y|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y'\sin x = y\ln y$，$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$；

(4) $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x - \dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y = 0$，$y|_{x=0} = 1$；

(5) $x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x = 0$，$y|_{x=2} = 1$.

解 (1) 分离变量得

$$e^y\mathrm{d}y = e^{2x}\mathrm{d}x,$$

积分得
$$e^y = \frac{1}{2}e^{2x} + C,$$

由 $y|_{x=0} = 0$,解得 $C = \dfrac{1}{2}$,

故特解为
$$e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1).$$

(2) 分离变量得

$$\tan y\mathrm{d}y = \tan x\mathrm{d}x,$$

积分得
$$-\ln(\cos y) = -\ln(\cos x) - \ln C,$$

即
$$\cos y = C\cos x,$$

由 $y|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}$,可得 $C = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

故特解为
$$\sqrt{2}\cos y = \cos x.$$

(3) 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{\sin x},$$

积分得
$$\ln(\ln y) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \ln C = \ln\left(C\tan\frac{x}{2}\right),$$

即
$$\ln y = C\tan\frac{x}{2},$$

由 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$,得 $C = 1$,

故特解为
$$\ln y = \tan\frac{x}{2}.$$

(4) 分离变量得

$$x(1+x)\mathrm{d}x = y(1+y)\mathrm{d}y,$$

积分得 $$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+C,$$

由 $y|_{x=0}=1$,得 $C=-\dfrac{5}{6}$,

故特解为 $$2(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+5=0.$$

(5) 分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{2\mathrm{d}x}{x},$$

积分得 $$\ln y=-2\ln x+\ln C,$$

故 $$y=\frac{C}{x^2},$$

由 $y|_{x=2}=1$,得 $C=4$,

所以特解为 $$x^2y=4.$$

3. 镭的衰变有如下规律:镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比,且镭经过 1 600 年后,只余原始量 R_0 的一半,试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

解 由题设知 $$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-kR \qquad (k>0\text{为比例系数}),$$

分离变量得 $$\frac{\mathrm{d}R}{R}=-k\mathrm{d}t,$$

积分得 $$\ln R=-kt+C_1,$$

故 $$R=C\mathrm{e}^{-kt} \qquad (C=\mathrm{e}^{C_1}).$$

因 $R|_{t=0}=R_0$,所以 $C=R_0$,从而 $R=R_0\mathrm{e}^{-kt}$.

又 $R|_{t=1\,600}=\dfrac{R_0}{2}$,可求得 $k=\dfrac{\ln 2}{1\,600}$,

故 $$R=R_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{1\,600}t}=R_0\mathrm{e}^{-0.000\,433t} \qquad (\text{时间以年为单位}).$$

4. 一容器内有100升的盐水,其中含盐10公斤,现以每分钟3升的速度注入清水,同时又以每分钟2升的速度将冲淡的盐水排出,问1小时后,容器内尚有多少盐?

解 设在时刻 t(分)容器内的含盐量为 $Q=Q(t)$ 公斤,因流入清水与流出盐水的速度之差为1升/分,故在时刻 t 容器内的溶