21世纪高等院校计算机教材系列

离散数学

尤枫 颜可庆 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

361

21世纪高等院校计算机教材系列

离 散 数 学

尤 枫 颜可庆 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书系统地介绍了离散数学领域中各分支的主要内容，包括数理逻辑、集合论、代数系统和图论四个部分，各部分之间相对独立而又相互联系。具有内容系统、概念清晰、证明严谨的特点，各章均配有典型的例子和适量习题，以便读者理解和掌握所学的内容。

本书可作为高等学校计算机科学与技术及相关专业的教材，也可供从事计算机工作的科技人员和工程技术人员参阅。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/尤枫，颜可庆编著．—北京：机械工业出版社，2003.1
（21世纪高等院校计算机教材系列）
ISBN 7-111-11509-0

Ⅰ.离… Ⅱ.①尤…②颜… Ⅲ.离散数学—高等学校—教材 Ⅳ.O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第001372号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码 100037）
策 划：胡毓坚
责任编辑：刘 青 周艳娟
责任印制：路 琳

北京大地印刷厂印刷 ·新华书店北京发行所发行

2003年1月第1版·第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·16印张·396千字
0 001—5 000册
定价：23.00元

出版说明

随着计算机技术的飞速发展，计算机在经济与社会发展中的地位日益重要。在高等院校的培养目标中，都将计算机知识与应用能力作为其重要的组成部分。根据计算机科学发展迅速的学科特点，计算机教育应面向社会，面向潮流，与社会接轨，与时代同行。随着计算机软硬件的不断更新换代，计算机教学内容也必须随之不断更新。

为满足高等院校计算机教材的需求，机械工业出版社聘请了清华大学、北方交通大学、北京邮电大学等院校的老师，经过反复研讨，结合当前计算机发展需要和编者长期从事计算机教学的经验精心编写出“21世纪高等院校计算机教材”。

本套教材理论教学和实践教学相结合，图文并茂，内容实用，层次分明，讲解清晰，系统全面，其中溶入了老师大量的教学和科研经验，是各类高等院校、高等职业学校及相关院校的最佳教材，也可作为培训班和自学使用。

前　言

离散数学是随着计算机科学的发展而逐步建立起来的一门新兴的学科，属于现代数学的范畴，是现代数学的一个重要分支。离散数学主要研究离散量的结构和相互之间的关系，其研究对象一般是有限空间，因此它能充分描述计算机科学离散性的特点。

离散数学课程是介绍离散数学各分支的基本概念、基本理论、基本研究方法和研究工具的课程。它的内容丰富且涉及面广，广泛应用于计算机科学技术和相关专业的诸领域。从科学计算到信息处理，从计算机理论科学到计算机应用技术，从计算机软件到计算机硬件，都与离散数学密切相关。

离散数学自 20 世纪 70 年代初形成以来，已成为计算机科学与技术学科的核心专业基础课程。一方面，它为后继课程，如数据结构、操作系统、编译原理、数据库、人工智能和算法分析等提供了必要的数学基础；另一方面，通过对离散数学的学习，可以培养和提高学生的抽象思维和逻辑思维能力，为学生今后的学习和工作打下坚实的基础。

本书是在作者多年从事离散数学教学实践、参考国内外多种教材的基础上编写而成的，在编写过程中力求做到内容通俗流畅、简明扼要。书中各部分均配有典型的例题，各章都有适量的习题，通过这一环节，能培养和提高学生解决问题的能力和技巧。

全书共分四个部分：数理逻辑、集合论、代数系统和图论。由尤枫统稿。其中第 1、2、9、10 和 11 章由尤枫编写，第 3、4、5、6、7 和 8 章由颜可庆编写。朱望规教授和赵子江副教授对本书的编写提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在不当与疏漏之处，恳请读者批评指正。

本书的编写得到北京化工大学教材建设基金资助。

作　者

目　　录

第1章　命题逻辑

逻辑学是一门研究思维形式和思维规律的科学。根据研究对象和方法的不同,逻辑学又分为辩证逻辑、形式逻辑和数理逻辑。

辩证逻辑是以辩证法认识论为基础的学科,形式逻辑是对思维的形式结构和规律进行研究的学科,而数理逻辑则是以数学方法研究推理规律的学科,研究的中心问题是推理。

数理逻辑是由德国数学家和哲学家莱布尼兹(G.W.Leibniz)在17世纪中叶创立的。但直到20世纪30年代,随着数学家哥德尔(Gödel)对完全性定理的证明,数理逻辑的基础才得到了完善。

现代数理逻辑可分为证明论、模型论、公理化集合论和递归函数论等,已成为数学的一个重要分支。由于它引入了一套表意符号体系,能简洁地表达出各种推理的逻辑关系,因此,数理逻辑又称为符号逻辑。它的优点是表达简洁、推理方便、概括性好、易于分析。

数理逻辑和计算机的发展有着密切的关系,它被广泛地应用于定理机器证明、人工智能、自动程序设计、计算机辅助设计等计算机应用和理论研究领域。

1.1　命题和逻辑联结词

1.1.1　命题

在数理逻辑中,进行推理的基本要素是命题。**命题**是指能判断真假的陈述句。每个命题都有惟一的取值,该值称为命题的**真值**。真值只有"真"和"假"两个值,分别记作 T(真)和 F(假)。如果一个命题的取值为真,我们就说它是真命题或它的真值为真;如果一个命题的取值为假,我们就说它是假命题或它的真值为假。

【例1-1】判断下列语句是否为命题。

(1) 北京是中国的首都。

(2) 水是固体。

(3) $3+5=8$。

(4) $x+4>7$。

(5) 今天是星期三吗?

(6) 这里的景色真美啊!

在此例中,(1),(2)和(3)都是命题,并且(1)和(3)是真命题,(2)是假命题;(4)虽然是陈述句,但其真值随 x 的取值会发生变化,不是惟一的,因此不是命题;(5)和(6)都不是陈述句,故不是命题。

【例1-2】判断下列语句是否为命题。

(1) 地球之外有生命存在。

(2) 太阳能是未来的主要能源。

这两个句子都是命题，虽然我们现在不能分辨他们的真假，不能判断它们是真命题还是假命题，但他们本身是有真假的，到了将来一切都会清楚。一个句子本身是否能分辨真假与我们是否知道它的真假是两回事，也就是说，有时我们可能无法判断一个句子的真假，但这个句子本身是有真假的。

从上述分析可以看到，判断一个句子是否是命题，首先要看它是否是陈述句，然后再看它是否具有惟一的真值。

上面两例中所列举的命题都是最简单的命题，它们都是由简单句构成的，这种由简单句构成的命题称为**简单命题**或**原子命题**。

原子命题一般用大写英文字母 $P,Q,R,\cdots$，或者带下标的大写英文字母来表示，并将字母放在所表示的命题之前，这些表示原子命题的符号称为**命题标识符**。例如：

P：海南是个美丽的岛屿。

Q：今天是晴天。

那么 P 就表示命题"海南是个美丽的岛屿"，Q 就表示命题"今天是晴天"。在这里，P 和 Q 就是命题标识符，这样就把符号和命题联系起来了。

还有一些命题是由若干个原子命题通过联结词构成的复合句来表示的，这类命题称为**复合命题**。

例如，"他既是数学家又是物理学家"这句话就是由原子命题"他是数学家"和"他是物理学家"通过联结词"既…又"复合而成的复合命题。

又如，"我明天或者去八达岭长城或者去颐和园"这句话就是由原子命题"我明天去八达岭长城"和"我明天去颐和园"通过联结词"或者…或者"复合而成的复合命题。

复合命题的真值依赖于复合命题中各原子命题的真值和所使用的联结词。复合命题的符号化要涉及到两个方面：复合命题中所包含原子命题的符号化和复合命题中所包含逻辑联结词的符号化。

1.1.2 逻辑联结词

下面介绍常用的五种符号化的逻辑联结词及相应复合命题的定义。

1. 否定联结词

定义 1-1 设 P 为一命题，则 P 的否定称为命题 P 的否命题，记作 $\sim P$。符号 $\sim$ 称为否定联结词。复合命题 $\sim P$ 取值为真当且仅当 P 为假。

$\sim P$ 的真值可用列表给出定义，如表 1-1 所示。表的每行对应于命题 P 的一种可能取值，即真(T)或假(F)。第一行表示如果 P 的真值为假，则 $\sim P$ 的真值为真；第二行表示如果 P 的真值为真，则 $\sim P$ 的真值为假。

在自然语言中，非 P、不是 P、并非 P 等都可表示成 P 的否定。例如：

P：人人都爱吃肉，$\sim P$：并非人人都爱吃肉。

Q：成都是一个城市，$\sim Q$：成都不是一个城市。

表 1-1

P	$\sim P$
F	T
T	F

2. 合取联结词

定义 1-2 设 P 和 Q 为命题，复合命题“P 并且 Q”称为 P 和 Q 的合取式复合命题，记作 $P\wedge Q$，符号 $\wedge$ 称为合取联结词。复合命题 $P\wedge Q$ 取值为真当且仅当 P,Q 同时为真。

$P\wedge Q$ 的真值如表 1-2 所示。表的每行对应于两个命题 P 和 Q 取值的一种可能组合。第一行表示如果 P 与 Q 的真值均为假，则 $P\wedge Q$ 的真值为假；第二行表示如果 P 的真值为假而 Q 的真值为真，则 $P\wedge Q$ 的真值为假；第三行表示如果 P 的真值为真而 Q 的真值为假，则 $P\wedge Q$ 的真值为假；第四行表示如果 P 与 Q 的真值均为真，则 $P\wedge Q$ 的真值为真。

表 1-2

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

在自然语言中，“既…又”、“并且”、“和”、“不但…而且”等都可符号化为 $\wedge$。例如，“李明和张华都在看电视”可表示为 $P\wedge Q$，其中 P 和 Q 分别表示命题“李明在看电视”和“张华在看电视”。

3. 析取联结词

定义 1-3 设 P 和 Q 为命题，复合命题“P 或 Q”称为 P 和 Q 的析取式复合命题，记作 $P\vee Q$，符号 $\vee$ 称作析取联结词。复合命题 $P\vee Q$ 取值为真当且仅当 P,Q 至少有一个为真。

$P\vee Q$ 的真值如表 1-3 所示。

表 1-3

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

在自然语言中，“或者…或者”、“或者”、“要么…要么”等都可符号化为 $\vee$。例如，“我选修《离散数学》课程或者选修《计算机安全学》课程”可表示为 $P\vee Q$，其中 P 和 Q 分别表示命题“我选修《离散数学》课程”和“我选修《计算机安全学》课程”。

4. 条件联结词

定义 1-4 设 P 和 Q 为命题，复合命题“如果 P 则 Q”称为 P 和 Q 的条件式复合命题，记作 $P\rightarrow Q$，符号 $\rightarrow$ 称为条件联结词。一般将 P 称为条件式的前件，Q 称为条件式的后件。当 P 为真和 Q 为假时，$P\rightarrow Q$ 取值为假，否则 $P\rightarrow Q$ 取值为真。

$P\rightarrow Q$ 的真值如表 1-4 所示。

表 1-4

P	Q	$P\rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

在自然语言中，“如果…则”、“只有…才”、“只要…就”等都可符号化为 $\rightarrow$。条件式表示的基本逻辑关系是：P 是 Q 的充分条件。例如，“如果两角为对顶角，则两角相等”可表示为 $P\rightarrow Q$，其中 P 和 Q 分别表示命题“两角为对顶角”和“两角相等”。

对于条件式，当 P 为真 Q 也为真时，$P\rightarrow Q$ 为真，即从前件 P 成立一定可以推出后件 Q 成立，这在通常意义下是正确的；当 P 为真 Q 为假时，$P\rightarrow Q$ 为假，即从前件 P 成立不能推出后件 Q 成立，这在通常意义下也是正确的。而按照定义，当前件 P 为假时，无论后件 Q 为真还是假，$P\rightarrow Q$ 均为真，这是一种善意的认定，下面通过一个例子来说明这一善意的认定。

例如，设 P：他有时间，Q：他会帮助你，则 $P\rightarrow Q$ 表示命题“如果他有时间，那么他会帮助你”。把这个命题看作是一个诺言讨论该命题的真值，有四种情况：

(1) 他有时间，他也帮助了你。这时他没有违背诺言，诺言 $P \to Q$ 为真。

(2) 他有时间，他却没有帮助你。这时他违背了诺言，诺言 $P \to Q$ 为假。

(3) 他没有时间，他帮助了你。这时他没有违背诺言，所以认定诺言 $P \to Q$ 为真是合适的。

(4) 他没有时间，他也没有帮助你。这时他没有违背诺言，所以认定命题 $P \to Q$ 为真也是合适的。

这里需要指出的是，在自然语言中，对于“如果 P 则 Q”这样的命题，P 和 Q 总是有着内在的联系。但是，在数理逻辑中，只要 P 和 Q 是命题，复合命题 $P \to Q$ 就有意义，而不要求 P 和 Q 一定有什么关系。例如，“如果鲨鱼会飞，则长城位于中国北方”就可表示为复合命题 $P \to Q$ 的形式，其中 P 表示命题“鲨鱼会飞”，Q 表示命题“长城位于中国北方”，且因为命题 P 为假，命题 Q 为真，故复合命题 $P \to Q$ 为真。

5. 双条件联结词

定义 1-5 设 P 和 Q 为命题，复合命题“P 当且仅当 Q”称为 P 和 Q 的双条件式复合命题，记作 $P \leftrightarrow Q$，符号 $\leftrightarrow$ 称为双条件联结词。复合命题 $P \leftrightarrow Q$ 取值为真当且仅当 P，Q 取值相同。

$P \leftrightarrow Q$ 的真值如表 1-5 所示。

表 1-5

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

在自然语言中，“当且仅当”、“等价于”、“同…一样”等都可符号化为 $\leftrightarrow$。双条件式表示的基本逻辑关系为 P 是 Q 的充分必要条件。例如，“一个数是偶数当且仅当该数能被 2 整除” 可表示为 $P \leftrightarrow Q$，其中 P 和 Q 分别表示命题“一个数是偶数”和“一个数能被 2 整除”。

对于一般的命题，均可利用上面介绍的五种逻辑联结词符号化，将命题表示成数学符号的形式。

1.2 命题公式和真值表

1.2.1 命题公式

在数学中，字母 $x, y, z \cdots$ 经常用来表示变量，这些变量可以表示任意的实数，也可以表示一个特定的实数。同样，在数理逻辑中，字母 $P, Q, R \cdots$ 可以表示一个特定的命题，称为**命题常元**，也可以表示任意命题，称为**命题变元**。由于命题常元表示一个特定的命题，所以它有确定的真值(真或假)，而命题变元没有确定的真值，仅当它与一个具体的命题相联系，即将一个命题变元用一个特定的命题去取代时，它才有确定的真值(真或假)，这称为对命题变元的真值指派或解释。

上节介绍了五种最基本的复合命题 $\sim P$，$P \wedge Q$，$P \vee Q$，$P \to Q$ 和 $P \leftrightarrow Q$，通过它们可以定义更复杂的复合命题。

通常情况下，一个复合命题可能有许多组成部分，而各部分本身可以是原子命题也可以是复合命题，例如 $(P \vee Q) \wedge (R \to \sim S)$，即由命题常元和联结词可组成更复杂的复合命题。若在复合命题中，P, Q, R 等不仅可代表命题常元，还可代表命题变元，这样组成的复合命题形

式称为命题公式。抽象地说，命题公式是由命题常元、命题变元、逻辑联结词和圆括号组成的符号串，但并不是由命题常元、命题变元、逻辑联结词和圆括号组成的任何符号串都是命题公式，它的表示有一定规则。命题公式可按下述规则进行递归定义。

定义 1-6 **命题公式**(简称**公式**)递归定义如下：

(1) 命题常元和命题变元(例如 $P,Q,R,\cdots,T,F$)是命题公式(也称为原子命题公式)；

(2) 如果 A 是命题公式，则$\sim A$ 也是命题公式；

(3) 如果 A,B 是命题公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$也是命题公式；

(4) 规则(1)～(3)的有限次使用得到的由命题常元、命题变元、逻辑联结词和括号组成的符号串也是命题公式。

为了简化书写，约定任一命题公式的最外层括号可以省略。

例如，如下的一些符号串都是命题公式：

$$P\wedge Q,(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\vee R,((P\wedge Q)\wedge R)\rightarrow(P\wedge(Q\wedge R))$$

而如下的一些符号串却不是命题公式：

$$(P\wedge Q)\rightarrow(\rightarrow R),\wedge R\vee P,(P\vee Q)\rightarrow R)$$

由于命题公式是通过递归方法进行定义的，所以它的各个组成部分本身也可以是命题公式，称为子命题公式。

定义 1-7 如果 A_1 是命题公式 A 的一个组成部分，且 A_1 本身也是一个命题公式，称 A_1 是 A 的**子命题公式**或**子公式**。

例如，对命题公式$(P\wedge Q)\rightarrow(R\vee(Q\wedge S))$而言，$(P\wedge Q)$，$(Q\wedge S)$，$(R\vee(Q\wedge S))$都是它的子公式。

命题公式本身不是命题，也没有真假值。只有当其中的命题变元用确定的命题取代时，命题公式才变成一个命题，它的真值依赖于取代命题变元的那些命题的真值。

1.2.2 命题的翻译

把一个用自然语言描述的命题表示成命题公式的形式，称为**命题的翻译**或**命题的符号化**。命题翻译在数理逻辑中占有很重要的地位，往往在逻辑推理中最先遇到的就是命题的符号化。

命题翻译一般经过如下三个步骤：

(1) 找出命题中各原子命题，将原子命题符号化。

(2) 找出命题中各联结词，将联结词符号化。

(3) 把符号化的原子命题和符号化的联结词联结起来。

【例 1-3】将下列命题符号化。

(1) 她是一个 20 岁的大学生。

(2) 如果他是美国人或英国人，那么他一定会说英语。

(3) 两集合 A,B 相等，当且仅当集合 A 包含集合 B 并且集合 B 包含集合 A。

(4) 华楠是一名港澳同胞，她来自香港。

(5) 如果我没完成作业，就不去打球。

(6) 如果今天我不上课而去看电影，那么我的心情会很好。

解 (1) 设 P：她 20 岁，Q：她是大学生。该命题符号化为 $P\wedge Q$。

(2) 设 P:他是美国人,Q:他是英国人,R:他会说英语。该命题符号化为$(P \vee Q) \rightarrow R$。

(3) 设 P:两集合 A,B 相等,Q:集合 A 包含集合B,R:集合 B 包含集合A。该命题符号化为 $P \leftrightarrow (Q \wedge R)$。

(4) 设 P:华楠是一名港澳同胞,Q:她来自香港。该命题符号化为 $P \wedge Q$。

(5) 设 P:我完成了作业,Q:我去打球。该命题符号化为$\sim P \rightarrow \sim Q$ 或$Q \rightarrow P$。

(6) 设 P:今天我上课,Q:今天我去看电影,R:我的心情很好。该命题符号化为$(\sim P \wedge Q) \rightarrow R$。

同样,一个命题公式也可以翻译成用自然语言表示的陈述句。

【例 1-4】设 P:天下雨,Q:我将去镇上,R:我有时间。试用自然语言描述下列命题:

(1) $(\sim P \wedge R) \rightarrow Q$

(2) $Q \leftrightarrow R$

(3) $P \rightarrow \sim Q$

解 (1) 如果天不下雨并且我有时间,那么我将去镇上。

(2) 我将去镇上,当且仅当我有时间。

(3) 如果天下雨,那么我就不去镇上。

在日常语言中,一个句子各部分之间总是存在着某种内在的联系,从而使整个句子表现出一定的意义。但在数理逻辑中,关心的只是复合命题与其中各简单命题之间的真值关系,即抽象的逻辑关系,而命题本身是否有意义并不重要。因此,两个内容上完全不相干的命题也可组成具有确定真值的复合命题。例如,"如果汽车会飞,那么咖啡是棕色的"看起来是不合乎逻辑的,但在数理逻辑中,它是具有确定真值命题,其真值为真。

在研究推理时,如果把命题分析到简单命题为止,那么这种建立在以简单命题为基本推理单位之上的逻辑体系,称为**命题逻辑**。

1.2.3 真值表

定义 1-8 设 A 是一个命题公式,$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在A 中的所有命题变元(一般地,也可用 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$来表示含有 n 个命题变元$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的命题公式A),给变元$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 指定一组真值,称为对 A 的一个**真值指派**或对A 的一种**解释**。

一个命题变元有两种可能的取值(真或假),因此一个含有 n 个变元的命题公式有 2^n 组不同的真值指派,对于每一个真值指派,命题公式都有一个确定的真值。

命题公式与其所包含命题变元之间的真值关系,可通过真值表来表示。

定义 1-9 对于命题公式 A,由 A 所有可能的真值指派和A 在其所有可能真值指派下所得真值列成的表,称为命题公式 A 的**真值表**。

真值表反映了命题公式的真值随其命题变元真值变化的情况,一个命题公式的真值表由两部分组成:

(1) 表的左边部分列出命题公式的每一个真值指派。对于一个含有 n 个命题变元的命题公式,不同的真值指派共有 2^n 个;

(2) 表的右边部分列出对应每一个真值指派命题公式取得的真值。

若有必要或命题公式本身很复杂,可在表的中间部分列出对应每一个真值指派命题公式中各子公式的真值(按子公式出现的先后顺序排列,若有括号,应从内层向外层展开)。

【例 1-5】给出命题公式$(\sim P\wedge Q)\vee P$的真值表。

解 命题公式$(\sim P\wedge Q)\vee P$的真值表如表 1-6 所示。

表 1-6

P	Q	$\sim P$	$\sim P\wedge Q$	$(\sim P\wedge Q)\vee P$
F	F	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	T	F	F	T

【例 1-6】给出命题公式$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\vee\sim Q)$的真值表。

解 命题公式$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\vee\sim Q)$的真值表如表 1-7 所示。

表 1-7

P	Q	$P\rightarrow Q$	$\sim Q$	$P\vee\sim Q$	$(P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\vee\sim Q)$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F
T	T	T	F	T	T

1.2.4 永真式与永假式

一般情况下，命题公式的真值是随着对其真值指派不同而变化的。但有些命题公式，例如$P\vee\sim P$，对于所有的真值指派，其真值恒为真；而有些命题公式，例如$P\wedge\sim P$，对于所有的真值指派，其真值恒为假。

定义 1-10 给定一个命题公式 A，若 A 的所有真值指派，都使 A 的真值为真，则称命题公式 A 为**永真式或重言式**；若 A 的所有真值指派，都使 A 的真值为假，则称命题公式 A 为**永假式或矛盾式**；若 A 至少有一个真值指派，使 A 的真值为真，则称命题公式 A 为**可满足式**。

对于给定的命题公式，判断它的类型(永真式、永假式或可满足式)问题，称为命题公式的**判定问题**。在命题逻辑中，任何一个命题公式所包含的命题变元是有限的，所以命题公式的真值指派数目也是有限的，因此判定问题是可解的。命题公式的判定问题可以采用真值表法。

【例 1-7】用真值表判定命题公式$((P\rightarrow Q)\wedge P)\rightarrow Q$的类型。

解 命题公式$((P\rightarrow Q)\wedge P)\rightarrow Q$的真值表如表 1-8 所示。

表 1-8

P	Q	$P\rightarrow Q$	$(P\rightarrow Q)\wedge P$	$((P\rightarrow Q)\wedge P)\rightarrow Q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

由真值表可知，$((P\to Q)\wedge P)\to Q$ 为永真式。

【例 1-8】用真值表判定命题公式 $(P\wedge(P\vee Q))\leftrightarrow\sim P$ 的类型。

解 命题公式 $(P\wedge(P\vee Q))\leftrightarrow\sim P$ 的真值表如表 1-9 所示。

表 1-9

P	Q	$P\vee Q$	$P\wedge(P\vee Q)$	$\sim P$	$(P\wedge(P\vee Q))\leftrightarrow\sim P$
F	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F
T	F	T	T	F	F
T	T	T	T	F	F

由真值表可知，$(P\wedge(P\vee Q))\leftrightarrow\sim P$ 为永假式。

当命题公式中所含命题变元较多或命题公式本身较为复杂时，用真值表的方法来判断命题公式的类型十分繁琐，这时可以采用另外一种方法，即公式推演法，这种方法将在下面介绍。

1.3 等价式和蕴涵式

1.3.1 等价式

不同的命题公式，尽管结构不尽相同，但它们之间常有一些内在的关系，最基本的关系是等价关系和蕴涵关系。

1. 命题定律

定义 1-11 设 A 和 B 是两个命题公式，若对 A,B 的任何一个真值指派，A 和 B 总是取得相同的真值，则称命题公式 A 和 B 是等价的，记作 $A\Leftrightarrow B$，读作 A 等价于 B，称 $A\Leftrightarrow B$ 为等价式。

两命题公式是否等价，可通过真值表来进行判断，若命题公式 A 和 B 的真值表是相同的，则命题公式 A 和 B 是等价的。

【例 1-9】证明 $P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$。

证明 命题公式 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 的真值表如表 1-10 所示。

表 1-10

P	Q	$P\wedge Q$	$Q\wedge P$
F	F	F	F
F	T	F	F
T	F	F	F
T	T	T	T

由真值表可知，命题公式 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 的真值表相同，所以两命题公式等价。

注意：$\Leftrightarrow$和$\leftrightarrow$是两个完全不同的符号，具有不同的含义。$\leftrightarrow$是逻辑联结词，它是作为命题公式的一个部分出现在命题公式中；$\Leftrightarrow$不是逻辑联结词，它不能作为命题公式的一个部分，而仅表示两个命题公式之间的关系。但两者之间也有着密切的联系，$A\Leftrightarrow B$ 的充要条件是 $A\leftrightarrow B$ 为永真式，这样就可以通过