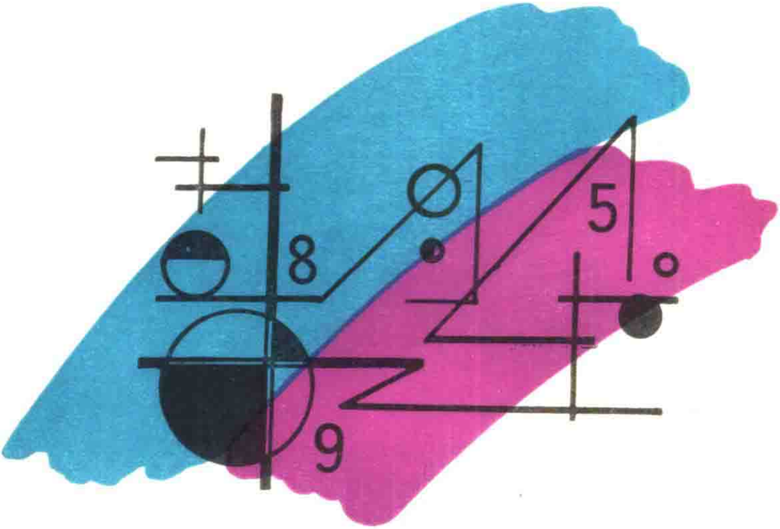
中学生课外阅读丛书



北京市海淀区教师进修学校　主编

高二代数解析几何

上册

机械工业出版社

中学生课外阅读丛书

高二代数解析几何

上　　册

北京市海淀区教师进修学校　主编

机 械 工 业 出 版 社

本书是中学生课外阅读丛书之一，内容包括代数部分和解析几何部分。主要讲述了数列的极限、数学归纳法、不等式的证明与计算、行列式等。书中还列举了大量实例和例题。各章末均有思考题，书末附有答案。

本书通俗易懂、生动有趣，适合高二学生课外阅读，中学各年级学生、家长、教师、具有中学文化水平的青年职工及自学青年亦可参考。

中学生课外阅读丛书

高二代数解析几何

上　册

北京市海淀区教师进修学校　主编

*

责任编辑：郑姗娥　　版式设计：张伟行

责任校对：李广孚

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南里一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

机械工业出版社发行・新华书店经销

*

开本 $787\times1092\ {}^{1}/_{32}$・印张 $5^{3}/_{4}$・字数124千字

1988年5月北京第一版・1988年5月北京第一次印刷

印数　00,001—46,500・定价：1.30元

*

ISBN 7-111-00455-8/G・15

序

知识的获得，能力的增长，智力的开拓和水平的提高，往往得益于课外，这是很多科学家、作家和文艺工作者的切身体会。因为课内的讲授只能是分析、理解知识的内容和知识的结构，而要形成各种能力，则要靠大量的课外阅读。这就是本套丛书编写的目的之一。其次，这套丛书包括了从初中一年级起直至高中三年级的 16 个学科，它能使读者切实地掌握各学科的基础知识，培养、提高读者把握各学科的基本技能和技巧，有利于将来的工作，有利于初高中升学考试。这也是编写本套丛书的意图。中学是基础学习的阶段，如果能奠定坚实的知识基础，培养观察、想像、思维、动手等各方面的能力，对提高全民族文化素质也是有益的。这也是我们编写这套丛书的意愿。

这套丛书共 16 个学科，57 册。其中，政治两册，初、高中语文各六册，初中数学六册，高中数学四册，初、高中英语各三册，初中物理两册，高中物理三册，初中化学一册，高中化学三册，初中中国地理、初中世界地理、高中地理各一册，中国历史、世界历史各两册，生物、动物、植物、生理卫生各一册，音乐、体育、美术各两册，计算机一册。

这套丛书充分体现了知识性、科学性和趣味性，内容充实，行文简洁，形式活泼，语言生动，读者从中可以得到爱国主义、国际主义、辩证唯物主义、历史唯物主义和美学教育。这套丛书除语文外，都是按照教学大纲和教材的要求，

以解决学习中的难点、重点为主线；介绍了本学科古今中外著名的专家学者，以及他们的故事轶闻；设计了多种形式的实验、练习以及解题的多种方法等等。语文中各种文体的文章也是按照教学大纲对每个年级每个学期的知识要求而选择的，内容丰富生动，情节曲折动人，并附有注释及分析。其中大部分文章是名家的新作，具有积极的思想内容和完美的艺术形式。

这套丛书的编写者，都是北京市海淀区有较高业务水平、有较丰富教学经验、有较强的写作能力的教师，其中大多数是中学的高级和一级教师，还有特级教师。编写班子阵容强大、实力雄厚，希望能为开辟学生的第二课堂做一些有益的工作。但限于时间和水平，书中内容有不当之处，敬请读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

1988 年 2 月

前　言

望我中华子孙个个成龙，是人们共同的心愿。有良好的愿望是必要的，但是，如果拿不出实现愿望的正确办法，愿望只好落空。因此，育人的方法措施，是至关重要的问题。

从智育的角度看存在两个问题：一个是学习内容问题；一个是学习方法问题，即学些什么和怎样去学的问题。

回顾我们区近年来的教学实践，在内容方面，经历了三个阶段：一、仅抓课本；二、在掌握课本知识的基础上，举办一些专题讲座；三、适当提供一些“微量元素”。在方法方面，不仅应注意课堂教学和课外作业的正规作战，而且还应适当利用闲暇时间，通过轻松教育辅助同学开阔视野。

编写本书的意图在于给同学们提供数学中的“微量元素”。它包括史、法、用、高、新等方面的内容。史，指古今中外一些数学大家的事迹和其它有启发性的数学史料；法，指重要数学思想和数学方法；用，指数学在生产和生活中的巧妙应用；高，指用高观点认识中学数学；新，指当今数学发展的新动向。这些内容，对开阔视野、激发学习数学的兴趣、更深入地理解课内知识、从根本处掌握数学思想和方法、提高数学思维能力都将大有裨益。它们具有数量不多而作用巨大的特点，把它们比喻为营养学中的“微量元素”不是很恰当吗？

本丛书的数学部分每册都由独立成篇的一些文章组成，文字力求通俗易懂而又具有趣味性，以便于利用零星闲暇时

间阅读，读时，一次未必读很多，只要持之以恒，自能体会到其功效的。

本册由万和瑛编写。全书由魏琳、王吉钊审订。

中学生课外阅读丛书目录

初一代数(上册)
初一代数(下册)
初二代数几何(上册)
初二代数几何(下册)
初三代数几何(上册)
初三代数几何(下册)
高一代数立体几何(上册)
高一代数立体几何(下册)
高二代数解析几何(上册)
高二代数解析几何(下册)
初中语文(第一册)
初中语文(第二册)
初中语文(第三册)
初中语文(第四册)
初中语文(第五册)
初中语文(第六册)
高中语文(第一册)
高中语文(第二册)
高中语文(第三册)
高中语文(第四册)
高中语文(第五册)
高中语文(第六册)
初一英语
初二英语
初三英语
高一英语
高二英语
高三英语
初二物理
初三物理
高一物理
高二物理
高三物理
初三化学
高一化学
高二化学
高三化学
中国历史(古代史部分)
中国历史(半殖民地半封建社会部分)
世界历史(上册)
世界历史(下册)
中国地理
世界地理
高中地理
生理卫生
植　　物
动　　物
高中生物
体育(上册)
体育(下册)
美术(上册)
美术(下册)
音乐(上册)
音乐(下册)
政治常识
中国社会主义建设常识
从 BASIC 语言到 6502 汇编语言

ISBN 7-111-00455-8/G・15

社科新书目： 193-098

定 价： 1.30 元

目　录

一、宰相要的麦粒与兔子吃人

1. 历史对数列的记载

提起数列要追朔到公元前585年（传说是毕达哥拉斯的出生年），以毕达哥拉斯为首的一些古代希腊人对数列就有了一定的认识，并形成了一种学派，称为毕达哥拉斯学派。他们把数描绘成沙滩上的点或小石子，把这些点或小石子所能排列成的形状，将数分类，就知道了数列1，2，3，……，n求和的问题。

到了公元1世纪后期，我国东汉初年编写的“九章算术”有了比较详细的记载。“九章算术”不是一个人一时写成的，它经历了多次整理、删补和修订，是几代人共同劳动的结晶，大约成书于东汉初年。“九章算术”采用问题集形式，列举了246个数学问题，并在若干具体问题之后，叙述了这类问题的解题方法。

在“九章算术”的“均输”一章中，计算如何按人口多少、物价高低、路途远近等条件，合理摊派税收和民工等，就包括了等差数列的有关问题。

在“九章算术”之后，我国重要算书“孙子算经”（约公元4世纪末）、“张邱建算经”中都记载了等差数列求和问题并给出了求和公式。

例如“孙子算经”中一题：今有方物一束，外周一匝有三十二枚，问积几何？答八十一。

这问题解：中心1枚，外包8枚，向外逐层增加8枚，从外周的数32逐次减去8，得到各层的数顺次是32、24、

16、8、1，然后用加法把它们加起来，就得总和。这还只不过是直接相加，没有简便方法，而在“张邱建算经”中就有了求公差、求和、求项数的公式。

在张邱建之后，天文学家曾把等差数列求和的算法用到历法计算上，例如唐代“一行”和尚（公元683～727年）在创制“大衍历”时，计算行星在 n 天内共行的弧长 S（以度作单位），应用的公式是

$$S=n(a+\frac{n-1}{2}d)$$

其中，a 是行星第一天所行的弧长，即等差数列首项；d 是逐日多行的弧长，即等差数列的公差。

北宋时期，数学家沈括（公元1030～1104年）创立了与高阶等差数列有关的“隙积术”。南宋数学家杨辉也研究了高阶等差数列，提出了“垛积术”，到元朝以后又有了新的发展。

2. 简单的赏赐，庞大的数目

印度有一则古老的传说：在印度舍罕王朝时期，有一位宰相叫西萨·班·达依尔，他发明了国际象棋，并把它作为贡品献给国王，国王觉得这种游戏奥妙无穷，非常有趣，因此大为高兴，决定重赏宰相西萨·班。

“爱卿啊，你希望得到怎样的赏赐呢？”国王问。“陛下”，西萨·班作出诚惶诚恐的样子，指着棋盘回答国王说：“请您在第一个小格内，赏我一粒麦子；在第二格内赏我两粒麦子；在第三格内赏四粒，照这样下去，每一格内都比前一格加一倍。陛下啊，请把这样摆满棋盘上所有64格的麦粒，都赏给您的仆人吧”！

“哈哈，只要这么点麦子”？国王觉得好笑，叫人马上拿

一袋小麦来。

计数麦粒的工作开始了，第一格放一粒，第二格放两粒，第三格放四粒，……还没放到第二十格，袋子已经空了，一袋又一袋的小麦被扛到国王的面前来，可是，麦粒数一格接一格增长得那样迅速，把国王惊得目瞪口呆，他这才发现自己上当了。因为即使扛来全印度的粮食，也远远无法兑现他对西萨·班许下的诺言。

这位宰相要的小麦有多少呢？用数学式子表示是：$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{63}$。由等比数列求和公式得到总数是 18446744073709551615 粒小麦。这个数字是全世界当年小麦总产量的几千倍。可见这位聪明的宰相对数学的研究颇深，作宰相是当之无愧的。

3. 兔子吃人是怎么回事

这又是一个有趣的故事。

意大利数学家李纳都·斐波那契生于比萨，生活在约公元 1170～1250 年间。父亲在北非的阿尔及利亚地方的一个海港当海关征税员。为了作生意的需要，请了一位回教徒教他儿子，特别学习当时先进的“印度 – 阿拉伯数字记数法”及东方的乘除计算法，因此斐波那契很小就接触了东方数学。

他长大后也成了商人，到过埃及、西西里、希腊、叙利亚等地，并学会了阿拉伯文，而且特别爱好东方数学。在 1202 年他写了一本数学书“算盘书”。在这本书里第一个介绍了印度 – 阿拉伯记数法，及一些代数几何问题。

这本书里有一个很出名的“兔子生兔子问题”：一个人把一对兔子放在四周围起来的地方，想知道一年后有多少对兔子生出来。假定每个月一对兔子生下另外一对，这

新的一对在两个月后又生下另外一对。

在1月1日只有一对小兔子；在2月1日只有一对大兔子；在3月1日有一对大兔子，一对小兔子；在4月1日有两对大兔子，一对小兔子；在5月1日有三对大兔子，两对小兔子；在6月1日有五对大兔子，三对小兔子；在7月1日有八对大兔子，五对小兔子；在8月1日有十三对大兔子，八对小兔子。

这是一个算术问题，但不能用普通算术公式算出来。

如图1－1，我们用△表示一对小兔子，用○表示一对大兔子，从图中可看出兔子的繁殖情况。图中实箭头表示一对小兔子长成一对大兔子或表示一对大兔子照样生长，虚箭头表示生下来的一对小兔子。

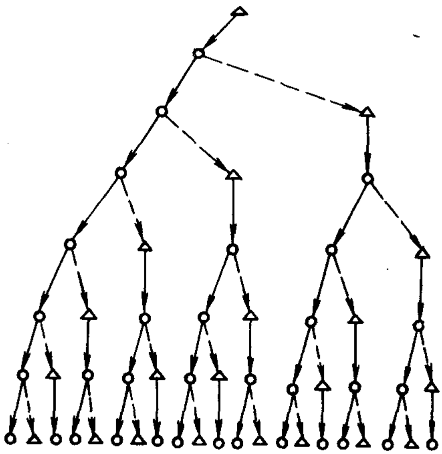


图 1－1

我们知道了这个月的繁殖情况，下个月的繁殖情况很容易写出来，只要把这个月的○改写成○、△（表示○继

续生长且新生一对小兔子），而这个月的 △ 改写成 ○（表示新生小兔子已长成为大兔子）。

将上面计算结果列表如下：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	第二年 1月1日
大兔子个数	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
小兔子个数	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
总数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

从表中容易看出第二年 1 月 1 日应该有 89 对新生的小兔子，总共有兔子 233 对。这个结果实在令人吃惊。当然这只是一个假设。如果兔子真的以这样的速率生育，我们的地球就可能不是“人吃兔子”而是“兔子吃人”了。

4. 神秘的斐波那契数列

按一定次序排列的一列数叫做数列。由于数列中的每一项是依次排列的，当项数 n 确定后，第 n 项的值也就确定了，因此数列也可以看作是一个定义域为自然数集的函数，叫作整标函数。对有限数列，整标函数的定义域就是$\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$了。中学已学过等差、等比数列，下面介绍一种非常有用的数列——斐波那契数列。

(1) 递归数列

例如 $a_1=2, a_2=3, a_{i+2}=3a_{i+1}-2a_i (i=1,2,3,\cdots)$ 我们可以依次得出

$$a_3=3a_2-2a_1=3\times3-2\times2=5$$
$$a_4=3a_3-2a_2=3\times5-2\times3=9$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

这样，就可递推出数列2，3，5，9，……。

一般地，用递推公式

$$a_1=\alpha_1,\ a_2=\alpha_2,\ \cdots a_r=\alpha_r,$$

$$a_{i+r}=f(a_i,\ a_{i+1},\ \cdots a_{i+r-1})\quad (i=1,2,3,\cdots)$$

表示的数列叫递归数列，称 r 元函数 f 为该数列的定义函数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots\alpha_r$ 叫初始值，r 叫递归数列的阶数。

当f 是一线性函数时，即

$$a_{i+r}=c_1a_i+c_2a_{i+1}+\cdots+c_ra_{i+r-1}$$

称这数列为r阶线性递归数列。

递归数列也可以用通项表示，求其通项也有一般规律可循。我们以二阶线性递归数列为例加以说明。

设其定义函数为 $p_1a_{n+1}+p_2a_n$，其通项为f (n)，则整标函数f (x) 满足方程

$$f(n+2)=p_1f(n+1)+p_2f(n) \qquad (1-1)$$

容易证明，若 $f_1(n)$、$f_2(n)$ 都是式 $(1-1)$ 的解，则它们的线性组合 $f(n)=c_1f_1(n)+c_2f_2(n)$ 也是式 $(1-1)$ 的解 (c_1，c_2 为常数)，且可求出形为 $f(n)=x^n$ 的特解，其中 x^n 由下法确定：以 $f(n)=x^n$ 代入式 $(1-1)$ 即：

$$x^{n+2}=p_1x^{n+1}+p_2x^n \quad 即$$

$$x^2-p_1x-p_2=0^{㈠} \qquad (1-2)$$

只要 x 满足代数方程 $(1-2)$ 即可。设 x_1，x_2 为式 $(1-2)$ 的两个根，且 $x_1\neq x_2$，则式 $(1-1)$ 的一般解可写成

$$f(n)=c_1x_1^n+c_2x_2^n$$

其中，c_1、c_2由初始值确定。

(2) 斐波那契数列的通项

前面所述的兔子生兔子的问题所组成的数列

㈠ $x^2-p_1x-p_2=0$称为此递归数列的特征方程。

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots\cdots$$

称为斐波那契数列（以纪念最先得到此数列的数学家），是一个二阶线性递归数列。用$\{u_n\}$表示斐波那斐数列，就有

$$u_1=1,\ u_2=1,\ \cdots,\ u_{i+2}=u_{i+1}+u_i,\ (i=1,2,3,\cdots)$$

显然，其定义函数为 $u_{i+2}=u_{i+1}+u_i$

下面我们推导斐波那契数列的通项公式。

由此数列的定义函数可知其特征方程为

$$x^2-x-1=0$$

它的解为

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

故满足递推公式$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$的整标函数为

$$f(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

由初始值$u_1=1,u_2=1$即有

$$f(1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2=1$$

$$f(2)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}c_1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}c_2=1$$

解出 $$c_1=-c_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

故斐波那契数列的通项公式为

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (1-3)$$

将$n=1,2,3,4,\cdots\cdots$代入式（1－3）得到数列

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \cdots\cdots$$