NEW ANALYTIC GEOMETRY

By

SMITH GALE & NEELIEY

SOLUTIONS OF QUESTIONS

斯蓋尼三氏
解析幾何題解

蔣憲淞編演

香港中流出版社印行

斯蓋尼三氏
解析幾何題解

蔣憲淞編演

香港中流出版社印行

斯蓋尼三氏解析幾何題解

蔣憲淞編演

出版兼發行者：

中流出版社

香港歌賦街十七號

承印者：　立信印刷公司

九龍新蒲崗伍芳街23號11樓

一九六九年八月版　定價港幣四元八角

例　　言

一　本書係根據斯蓋尼三氏解析幾何學 (New Analytic Geometry By P. F. Smith, A. S. Gale & J. H. Neeliey) 教本習題所編之題解，每一習題均予以精確詳細之解答。

二　本書專供教師及學生於教授或演算時之參考。凡家居自修，預備應試，均可以將本題解作爲幫助，但僅爲一般學生在演算困難，思索不得之際，作爲指導，倘完全照書直抄，以此依賴，放棄練習演算，實非編者向願。

三　本書編制，分爲十七章，每章習題依次解答，每一題解，重於提示，詳簡不一，凡採用中流版漢譯本式及其他書局出版之漢譯本，本題解一概適用。

四　本書在每習題前，均註明原書頁碼，使讀者便於查閱，(中流版譯本頁碼與原書頁碼同)，其他如排式醒目，印刷清晰，校對謹嚴，務期臻於完善，惟編印匆促，脫誤之處，尤恐難免，希國內外專家和讀者教正。

解析幾何

解析幾何學之意義　解析幾何學爲法人笛卡兒René Descartes氏所首創。氏爲有名之哲學家兼科學家,其在數學上之貢獻頗多,而以解析幾何學爲最著。解析幾何者,一名代數幾何,即冶代數學與幾何學於一爐,乃用坐標法以研究幾何圖形之性質之學問也。

本書之特點　本書之內容,繁簡適中,深淺合度,採作教材,最爲相宜。其編制方法,對於論理程序及學習心理二方,均能兼籌並顧。書中習題,亦頗有伸縮性。教師可以因材施教,不必更事蒐羅。故樂爲譯出之。

學習解析幾何學之方法　學習一般數學之要點,爲方法,理論與思考,解析幾何學,亦然。方法爲技術上之問題,熟後方能生巧,此習題之

學習要點

所以不能不勤作也。理論爲數學之精華，凡一定律或一定理當前，必須細究其理。是否全部明瞭？如若尚有疑點，必須時加應用。切不可徒事强記，以免食而不化。理論或應用題，須時加思考，務使觸類旁通，得心應手，方稱善讀。總之：天資雖有高下，成功端賴努力，更毋一暴十寒，則成績斐然，可預卜也。

須熟繪各種圖形　初等代數學中之坐標法，即爲解析幾何學之初步。應用此法，能使幾何圖形用方程式表出之。解析幾何學所涉及之圖形頗多。除直線形與圓外，尚有圓錐曲線，高次曲線，超越曲線，及一次與二次之面。讀者應熟習此種圖形之性質及其畫法，則在繪圖時可得不少便利。

目　　次

第二章　笛卡兒坐標

第三章　曲線及方程式

第四章　直　線

第五章 圓

第六章 拋物線,橢圓與雙曲線

第七章 坐標之變換

第八章 切線

第九章 極坐標

第十章 超越曲線

第十一章 通徑方程式與軌跡

第十二章 函數,圖形及經驗方程式

章十三章 空間之笛卡兒坐標

第十四章 空間之平面與直線

第十五章　特種曲面

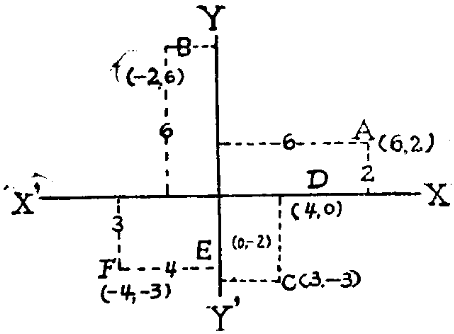
第十六章　空間幾何補編

第十七章　坐標之變換,各種坐標制

第二章　笛卡兒坐標

原本第8—9頁習題

1.　試正確作 $(6,2)$, $(-2,6)$, $(3,-3)$, $(4,0)$, $(0,-2)$, $(-4,-3)$ 諸點。

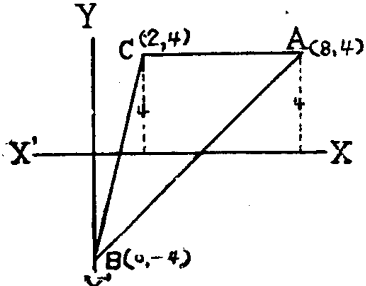


2.　一點之軌跡為何，如此點移動時 (1) 其橫坐標常為 -3? (2) 其縱坐標常為 4?

(1)　平行於 y 軸而在 y 軸左方 3 單位之直線。

(2)　平行於 x 軸而在 x 軸之上 4 單位之直線。

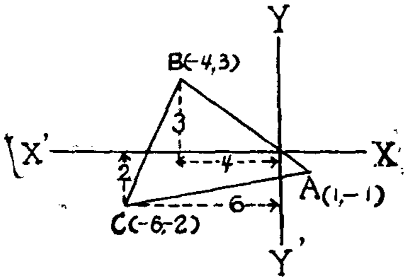
3.　作三角形，其頂點如下：

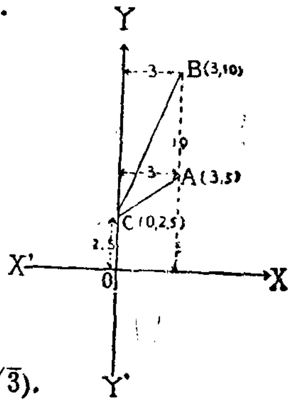


(*a*) 設 3 頂點爲 $A(8, 4)$, $B(0, -4)$ 及 $C(2, 4)$, 則三角形如上圖.

(*b*) $(1, -1)$, $(-4, 3)$, $(-6, -2)$.

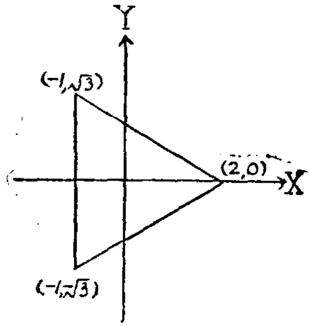
(*c*) $(3, 5)$, $(3, 10)$, $(0, 2.5)$.

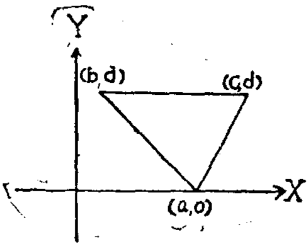




(*d*) $(2, 0)$, $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$.

(*e*) (b, d), (c, d), $(a, 0)$.





4. 求題 3 之 (*c*), (*d*), (*e*) 諸三角形之面積.

三角形之面積 $= \frac{1}{2}$ 底 $\times$ 高.

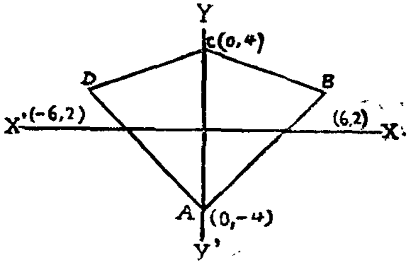
(*c*) 面積 $= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7.5$.

(*d*) 面積 $= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$.

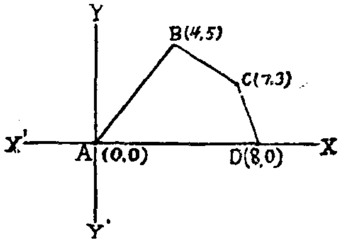
(*e*) 面積 $= \frac{1}{2} \times (c-d) \times d = \frac{1}{2} d(c-d)$.

5. 作四邊形,其頂點如下:

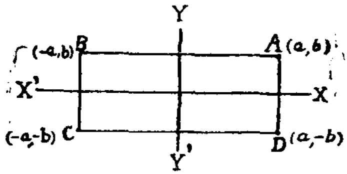
(*a*) 設四頂點爲 $A(0, -4)$, $B(6, 2)$, $C(0, 4)$, $D(-6, 2)$, 則四邊形如下圖.



(b) (0, 0), (4, 5), (8, 0), (7, 3).



(c) $(a, b), (-a, b), (a, -b), (-a, -b)$.



6. 一點之軌跡爲何，(1) 其橫坐標與其縱坐標相等? (2) 其橫坐標與縱坐標之負值相等?

(1) 軌跡爲平分 $\angle XOY$ 及 $\angle X'OY'$ 之直線.

(2) 軌跡爲平分 $\angle XOY'$ 及 $\angle X'OY$ 之直線.

7. 用幾何作圖法，正確作 $(\sqrt{2}, 3), (\sqrt{3}, 2), (\sqrt{5}, \sqrt{6})$ 諸點.

$\sqrt{2}=\sqrt{1+1}$, 故可作一直角三角形，使兩邊各等於 1, 其弦即爲 $\sqrt{2}$.

$\sqrt{3}=\sqrt{4-1}$, 故可作一直角三角形，使一邊爲 1 而弦爲 2, 其另一邊卽爲 $\sqrt{3}$.

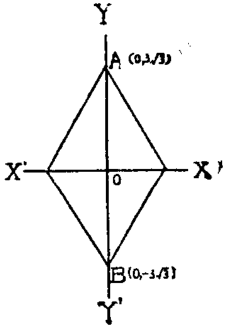
$\sqrt{5}=\sqrt{4+1}$, 故可作二邊爲 2 與 1 之直角三角形而求其弦.

$\sqrt{6}=\sqrt{5+1}$，既得$\sqrt{5}$，更於其上作直角，使另一邊爲 1，聯爲三角形，其弦卽爲 $\sqrt{6}$.

或以比例中項求之亦可，例如 $\sqrt{6}=\sqrt{2\times3}$，求 2 與 3 之比例中項得一線分卽爲 $\sqrt{6}$.

既得諸數之線値，卽以爲縱橫坐標而求其點，例如，既得 $\sqrt{2}$ 之線値，卽以爲橫坐標，3 爲縱坐標得一點，卽爲所求。

8.　邊長 6 吋之等邊三角形，其底與 x 軸重合，而其中點在原點上，則其頂點之坐標爲何？(有二種情形)



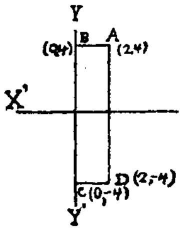
$$AO=A'O=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{6^2-3^2}$$
$$=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

故頂點之坐標爲 $A(0,3\sqrt{3})$，$B(0,-3\sqrt{3})$.

9.　邊長 6 吋之正方形，其兩對角線在兩坐標軸上，則其頂點之坐標爲何？

$\frac{1}{2}$ 對角線之長 $=\sqrt{\frac{6^2}{2}}=\sqrt{6\times3}=3\sqrt{2}$，故頂點之坐標爲 $(0,3\sqrt{2})$，$(0,-3\sqrt{2})$，$(3\sqrt{2},0)$ 及 $(-3\sqrt{2},0)$.

10.　何種四邊形其頂點在 (2, 4)，(0, 4)，(0, −4)，(2, −4)？其面積爲何？



按此四點作圖得一矩形，其面積爲 $8\times2=16$.

11.　設一長方形之兩邊各長 a 與 b，且各與 x 軸及 y 軸重合，則其頂點之坐標爲何？

此長方形之頂點可有四種情形：

(a)　$(0,0)$，$(a,0)$，$(0,b)$，(a,b).

(b)　$(0,0)$，$(-a,0)$，$(0,b)$，$(-a,b)$.

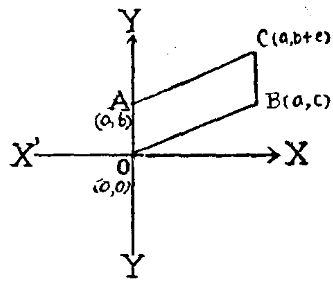
(c)　$(0,0)$，$(-a,0)$，$(0,-b)$，$(-a,-b)$.

(d)　$(0,0)$，$(a,0)$，$(a,-b)$，$(0,-b)$.

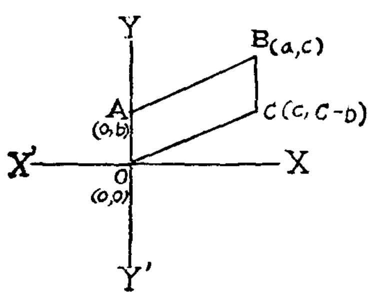
12.　設 $(0,0)$，$(0,b)$，(a,c) 爲一平行四邊形三頂點之坐標，則其第四頂點之坐標爲何？

按圖其第四頂點爲 $(a,c-b)$．若聯 OB 爲一邊，則 C 在 B 之上，故第四頂點 (卽 C) 爲 $(a,b+c)$.

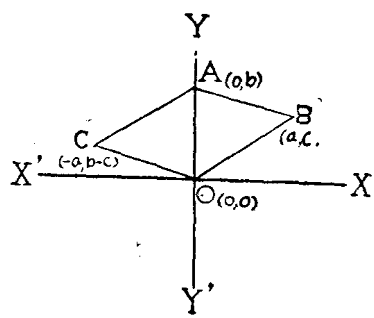
如下圖，則 C 爲 $(a, b+c)$.



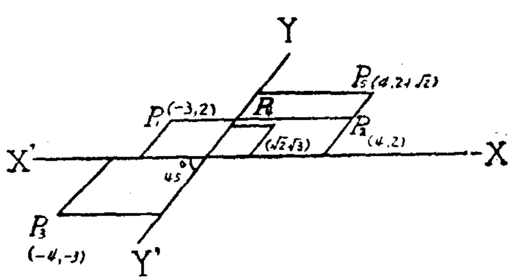
如下圖，則 C 爲 $(a, c-b)$.



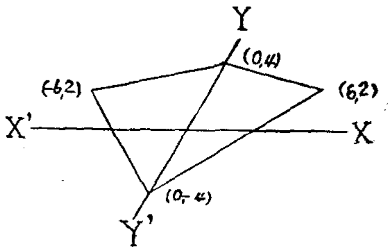
又如下圖，則 C 爲 $(-a, b-c)$.

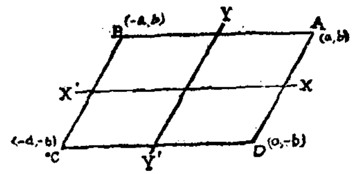


13. 作諸點其斜坐標如下，而坐標軸間之角爲 45°：$(-3, 2)$, $(4, 2)$, $(-4, -3)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(4, 2+\sqrt{2})$.

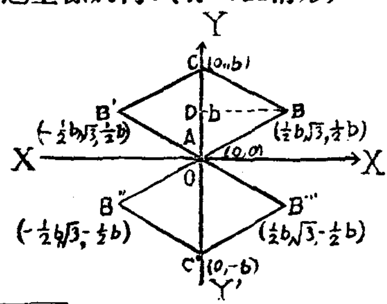


14. 作題 5 之諸四邊形，設坐標軸間之角爲 60°.





15. 設等邊三角形之一邊長爲 b，一頂點爲 $(0, 0)$，而一邊在 y 軸上，則其餘頂點之坐標爲何？(有四種情形)



$DB=\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\frac{b}{2}\sqrt{3}$，故其餘頂點爲：

$(0, b)$ 及 $\left(\frac{b}{2}\sqrt{3},\ \frac{b}{2}\right)$，　$(0, b)$ 及 $\left(-\frac{b}{2}\sqrt{3},\ \frac{b}{2}\right)$，

$(0, -b)$ 及 $\left(\frac{b}{2}\sqrt{3},\ -\frac{b}{2}\right)$，　$(0, -b)$ 及 $\left(-\frac{b}{2}\sqrt{3},\ -\frac{b}{2}\right)$.

16. 對於 x 軸對稱於 (a, b) 之點，其坐標爲何？對於 y 軸？對於原點？

對於 x 軸對稱於 (a, b) 之點爲 $(a, -b)$.

對於 y 軸則爲 $(-a, b)$.

對於原點則爲 $(-a, -b)$.

17. 邊長 $2a$ 之正方形，有一頂點在 $(0, 0)$ 而一對角線在正 x 軸上，則其餘頂點之坐標爲何？

$AE=BE$，故 $AE=\sqrt{\frac{\overline{AB}^2}{2}}=\sqrt{\frac{4a^2}{2}}=a\sqrt{2}$，則其餘三頂點爲