

NEW ANALYTIC GEOMETRY

By

SMITH GALE & NEELIEY  
SOLUTIONS OF QUESTIONS

斯蓋尼三氏  
解析幾何題解

蔣憲淞編演



香港中流出版社印行

# 斯蓋尼三氏 解析幾何題解

蔣憲淞編演

香港中流出版社印行

斯蓋尼三氏解析幾何題解

蔣憲淞編撰

---

出版兼發行者：

中流出版社

香港歌賦街十七號

承印者：立信印刷公司  
九龍新蒲崗伍芳街23號11樓

---

一九六九年八月版 定價港幣四元八角

版權所有·不准翻印

## 例 言

一 本書係根據斯蓋尼三氏解析幾何學 (New Analytic Geometry By P. F. Smith, A. S. Gale & J. H. Neeliey) 教本習題所編之題解，每一習題均予以精確詳細之解答。

二 本書專供教師及學生於教授或演算時之參考。凡家居自修，預備應試，均可以將本題解作為幫助，但僅為一般學生在演算困難，思索不得之際，作為指導，倘完全照書直抄，以此依賴，放棄練習演算，實非編者向願。

三 本書編制，分為十七章，每章習題依次解答，每一題解，重於提示，詳簡不一，凡採用中流版漢譯本式及其他書局出版之漢譯本，本題解一概適用。

四 本書在每習題前，均註明原書頁碼，使讀者便於查閱，(中流版譯本頁碼與原書頁碼同)，其他如排式醒目，印刷清晰，校對謹嚴，務期臻於完善，惟編印匆促，脫誤之處，尤恐難免，希國內外專家和讀者教正。

## 解析幾何

**解析幾何學之意義** 解析幾何學爲法人笛卡兒 René Descartes 氏所首創。氏爲有名之哲學家兼科學家，其在數學上之貢獻頗多，而以解析幾何學爲最著。解析幾何者，一名代數幾何，即治代數學與幾何學於一爐，乃用坐標法以研究幾何圖形之性質之學問也。

**本書之特點** 本書之內容，繁簡適中，深淺合度，採作教材，最爲相宜。其編制方法，對於論理程序及學習心理二方，均能兼籌並顧。書中習題，亦頗有伸縮性。教師可以因材施教，不必更事蒐羅。故樂爲譯出之。

**學習解析幾何學之方法** 學習一般數學之要點，爲方法，理論與思考，解析幾何學，亦然。方法爲技術上之問題，熟後方能生巧，此習題之

## 學習要點

所以不能不動作也。理論爲數學之精華，凡一定律或一定理當前，必須細究其理。是否全部明瞭？如若尚有疑點，必須時加應用。切不可徒事強記，以免食而不化。理論或應用題，須時加思考，務使觸類旁通，得心應手，方稱善讀。總之：天資雖有高下，成功端賴努力，更毋一暴十寒，則成績斐然，可預卜也。

**須熟繪各種圖形** 初等代數學中之坐標法，即爲解析幾何學之初步。應用此法，能使幾何圖形用方程式表出之。解析幾何學所涉及之圖形頗多。除直線形與圓外，尚有圓錐曲線，高次曲線，超越曲線，及一次與二次之面。讀者應熟習此種圖形之性質及其畫法，則在繪圖時可得不少便利。

HW-100

# 目 次

## 第二章 笛卡兒坐標

| 原本教科書頁數     | 習 題        | 本書頁數  |
|-------------|------------|-------|
| 8—9 .....   | 1—18 ..... | 1—7   |
| 14—16 ..... | 1—22 ..... | 7—14  |
| 19—20 ..... | 1—9 .....  | 15—18 |
| 24 .....    | 1—7 .....  | 19—23 |

## 第三章 曲線及方程式

| 原本教科書頁數     | 習 題        | 本書頁數  |
|-------------|------------|-------|
| 26—28 ..... | 1—16 ..... | 24—30 |
| 31 .....    | 1—7 .....  | 30—36 |
| 37—39 ..... | 1—15 ..... | 36—47 |
| 42 .....    | 1—4 .....  | 47—53 |
| 42—43 ..... | 1—27 ..... | 53—59 |
| 45 .....    | 1—22 ..... | 59—62 |

## 第四章 直 線

| 原本教科書頁數     | 習 題        | 本書頁數  |
|-------------|------------|-------|
| 48—49 ..... | 1—9 .....  | 62—68 |
| 50—51 ..... | 1—5 .....  | 68—69 |
| 54—55 ..... | 1—11 ..... | 70—77 |
| 58—59 ..... | 1—10 ..... | 79—83 |
| 62—63 ..... | 1—12 ..... | 83—91 |

|            |          |         |
|------------|----------|---------|
| 65—66..... | 1—7..... | 92—98   |
| 68—69..... | 1—7..... | 100—103 |
| 69—70..... | 1—3..... | 103—109 |

## 第五章 圓

| 原本教科書頁數    | 習 題       | 本書頁數    |
|------------|-----------|---------|
| 76—78..... | 1—19..... | 110—120 |
| 80—81..... | 1—11..... | 121—125 |
| 83—84..... | 1—6.....  | 125—128 |

## 第六章 拋物線,橢圓與雙曲線

| 原本教科書頁數      | 習 題       | 本書頁數    |
|--------------|-----------|---------|
| 90.....      | 1—8.....  | 128—132 |
| 96.....      | 1—9.....  | 132—135 |
| 101.....     | 1—6.....  | 136—140 |
| 106—107..... | 1—13..... | 140—144 |

## 第七章 坐標之變換

| 原本教科書頁數      | 習 題       | 本書頁數    |
|--------------|-----------|---------|
| 109—110..... | 1—6.....  | 144—146 |
| 113—114..... | 1—3.....  | 147—150 |
| 116.....     | 1—5.....  | 151—153 |
| 119.....     | 1—3.....  | 154 155 |
| 126—127..... | 1—6.....  | 157—163 |
| 131.....     | 1—8.....  | 164—167 |
| 131.....     | 軌跡問題..... | 167     |

## 第八章 切 線

| 原本教科書頁數  | 習 題      | 本書頁數    |
|----------|----------|---------|
| 134..... | 1—2..... | 170—171 |



|              |            |         |
|--------------|------------|---------|
| 139—140..... | 1— 7 ..... | 173—179 |
| 142—143..... | 1— 2 ..... | 180—185 |
| 146—147..... | 1—15 ..... | 185—195 |

## 第九章 極坐標

| 原本教科書頁數      | 習 題        | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 149 .....    | 1— 9 ..... | 195—196 |
| 153—154..... | 1—19 ..... | 197—199 |
| 155 .....    | 1—18 ..... | 199—200 |
| 159—160..... | 1— 6 ..... | 200—203 |
| 161 .....    | 1—15 ..... | 203—207 |
| 162—163..... | 1— 4 ..... | 207—209 |
| 163—165..... | 1—20 ..... | 209—218 |

## 第十章 超越曲線

| 原本教科書頁數      | 習 題        | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 170 .....    | 1—12 ..... | 219—221 |
| 175 .....    | 1—15 ..... | 221—225 |
| 178 .....    | 1— 9 ..... | 225—229 |
| 180 .....    | 1—13 ..... | 230—233 |
| 182—183..... | 1—17 ..... | 233—235 |

## 第十一章 通徑方程式與軌跡

| 原本教科書頁數      | 習 題        | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 186—187..... | 1—20 ..... | 236—239 |
| 189—190..... | 1— 2 ..... | 240—241 |
| 193—196..... | 1—14 ..... | 244—250 |
| 198—199..... | 1—14 ..... | 251—258 |
| 202—203..... | 1— 9 ..... | 259—265 |

## 第十二章 函數,圖形及經驗方程式

| 原本教科書頁數      | 習 題               | 本書頁數           |
|--------------|-------------------|----------------|
| 206—208..... | 1—10 .....        | 266—270        |
| 210—211..... | 1—18 .....        | 270—276        |
| 216—217..... | 1— 4 .....        | 276—278        |
| 220—221..... | 1— 5 .....        | 279—282        |
| 223—224..... | <b>1— 6</b> ..... | <b>282—287</b> |
| 228—229..... | 1— 5.....         | 287—290        |
| 234 .....    | 1—11 .....        | 294—297        |

## 章十三章 空間之笛卡兒坐標

| 原本教科書頁數      | 習 題        | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 238—239..... | 1— 9 ..... | 297—301 |
| 240—241..... | 1—10 ..... | 301—304 |
| 245—246..... | 1—14 ..... | 304—309 |
| 246—247..... | 1— 9 ..... | 309—311 |
| 249—250..... | 1—10 ..... | 312—315 |

## 第十四章 空間之平面與直線

| 原本教科書頁數      | 習 題        | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 255—257..... | 1—13 ..... | 316—321 |
| 260—262..... | 1—14 ..... | 322—327 |
| 263—264..... | 1—11 ..... | 327—330 |
| 266—267..... | 1—18 ..... | 330—335 |
| 269—270..... | 1— 8 ..... | 336—339 |
| 274—276..... | 1—13 ..... | 339—346 |
| 277—278..... | 1— 6 ..... | 346—350 |
| 278—279..... | 1— 4 ..... | 352—356 |

## 第十五章 特種曲面

| 原本教科書頁數      | 習題         | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 281—283..... | 1—10 ..... | 356—364 |
| 286—287..... | 1— 9 ..... | 365—368 |
| 290 .....    | 1— 3 ..... | 368—371 |
| 295 .....    | 1— 6 ..... | 373—376 |
| 298—299..... | 1— 3 ..... | 377—378 |
| 299 .....    | 1— 6 ..... | 379—380 |

## 第十六章 空間幾何補編

| 原本教科書頁數      | 習題         | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 301—302..... | 1—10 ..... | 380—386 |
| 305—306..... | 1— 9 ..... | 386—394 |
| 309—311..... | 1—13 ..... | 394—401 |
| 313 .....    | 1— 2 ..... | 401—402 |

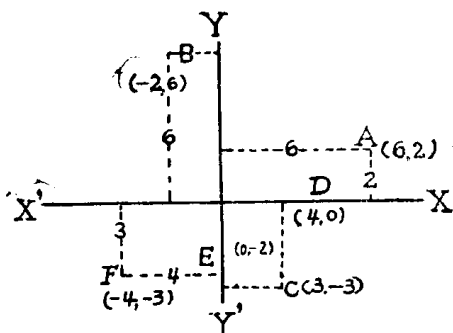
## 第十七章 坐標之變換,各種坐標制

| 原本教科書頁數      | 習題         | 本書頁數    |
|--------------|------------|---------|
| 316—317..... | 1—13 ..... | 402—411 |
| 320 .....    | 1— 2.....  | 411     |
| 322—323..... | 1—13 ..... | 412—419 |

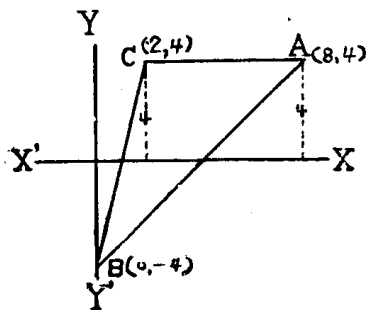
## 第二章 笛卡兒坐標

### 原本第 8—9 頁習題

1. 試正確作  $(6, 2)$ ,  $(-2, 6)$ ,  $(3, -3)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, -2)$ ,  $(-4, -3)$  諸點。



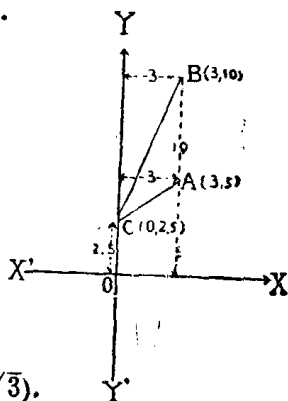
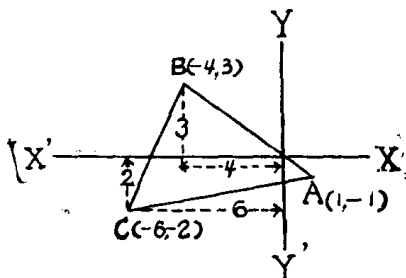
2. 一點之軌跡為何，如此點移動時 (1) 其橫坐標常為  $-3$ ?  
 (2) 其縱坐標常為  $4$ ?
- (1) 平行於  $y$  軸而在  $y$  軸左方  $3$  單位之直線。
  - (2) 平行於  $x$  軸而在  $x$  軸之上  $4$  單位之直線。
3. 作三角形，其頂點如下：



(a) 設 3 頂點為  $A(8, 4)$ ,  $B(0, -4)$  及  $C(2, 4)$ , 則三角形如上圖。

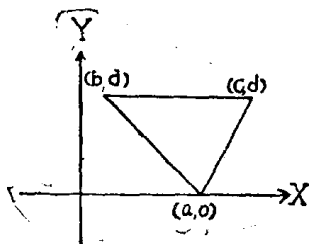
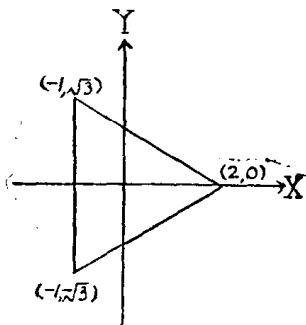
(b)  $(1, -1)$ ,  $(-4, 3)$ ,  $(-6, -2)$ .

(c)  $(3, 5)$ ,  $(3, 10)$ ,  $(0, 2.5)$ .



(d)  $(2, 0)$ ,  $(-1, \sqrt{3})$ ,  $(-1, -\sqrt{3})$ .

(e)  $(b, d)$ ,  $(c, d)$ ,  $(a, 0)$ .



4. 求題 3 之 (c), (d), (e) 諸三角形之面積。

三角形之面積 =  $\frac{1}{2}$  底  $\times$  高。

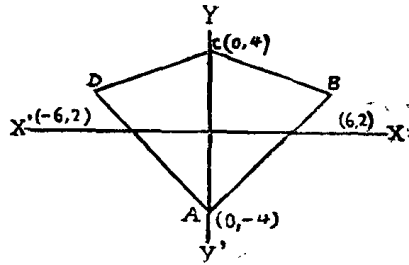
(c) 面積 =  $\frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7.5$ 。

(d) 面積 =  $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$ 。

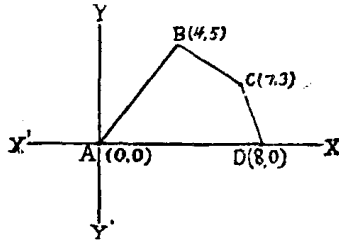
(e) 面積 =  $\frac{1}{2} \times (c - b) \times d = \frac{1}{2}d(c - b)$ 。

5. 作四邊形, 其頂點如下:

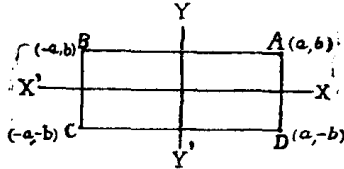
(a) 設四頂點為  $A(0, -4)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(0, 4)$ ,  $D(-6, 2)$ , 則四邊形如下圖。



(b)  $(0, 0), (4, 5), (8, 0), (7, 3)$ .



(c)  $(a, b), (-a, b), (a, -b), (-a, -b)$ .



6. 一點之軌跡為何, (1) 其橫坐標與其縱坐標相等? (2) 其橫坐標與縱坐標之負值相等?

(1) 軌跡為平分  $\angle XOY$  及  $\angle X'OY'$  之直線。

(2) 軌跡為平分  $\angle XOY'$  及  $\angle X'OY$  之直線。

7. 用幾何作圖法, 正確作  $(\sqrt{2}, 3), (\sqrt{3}, 2), (\sqrt{5}, \sqrt{6})$  諸點。

$\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$ , 故可作一直角三角形, 使兩邊各等於 1, 其弦即為  $\sqrt{2}$ 。

$\sqrt{3} = \sqrt{4-1}$ , 故可作一直角三角形, 使一邊為 1 而弦為 2, 其另一邊即為  $\sqrt{3}$ 。

$\sqrt{5} = \sqrt{4+1}$ , 故可作二邊為 2 與 1 之直角三角形而求其弦。

$\sqrt{6} = \sqrt{5+1}$ , 既得  $\sqrt{5}$ , 更於其上作直角, 使另一邊為 1, 聯為三角形, 其弦即為  $\sqrt{6}$ .

或以比例中項求之亦可, 例如  $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3}$ , 求 2 與 3 之比例中項得一線分即為  $\sqrt{6}$ .

既得諸數之線值, 即以爲縱橫坐標而求其點, 例如, 既得  $\sqrt{2}$  之線值, 即以爲橫坐標, 3 爲縱坐標得一點, 即爲所求。

8. 邊長 6 吋之等邊三角形, 其底與  $x$  軸重合, 而其中點在原點上, 則其頂點之坐標爲何?(有二種情形)

$$\begin{aligned} AO &= A'O = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} \\ &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

故頂點之坐標爲  $A(0, 3\sqrt{3})$ ,  $B(0, -3\sqrt{3})$ .

9. 邊長 6 吋之正方形, 其兩對角線在兩坐標軸上, 則其頂點之坐標爲何?

$$\frac{1}{2} \text{ 對角線之長} = \sqrt{\frac{6^2}{2}} = \sqrt{6 \times 3} = 3\sqrt{2}, \text{ 故}$$

頂點之坐標爲  $(0, 3\sqrt{2})$ ,  $(0, -3\sqrt{2})$ ,  $(3\sqrt{2}, 0)$  及  $(-3\sqrt{2}, 0)$ .

10. 何種四邊形其頂點在  $(2, 4)$ ,  $(0, 4)$ ,  $(0, -4)$ ,  $(2, -4)$ ? 其面積爲何?

按此四點作圖得一矩形, 其面積爲  $8 \times 2 = 16$ .

11. 設一長方形之兩邊各長  $a$  與  $b$ , 且各與  $x$  軸及  $y$  軸重合, 則其頂點之坐標爲何?

此長方形之頂點可有四種情形:

(a)  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(a, b)$ .

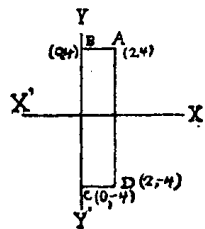
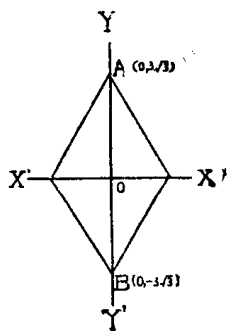
(b)  $(0, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(-a, b)$ .

(c)  $(0, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, -b)$ ,  $(-a, -b)$ .

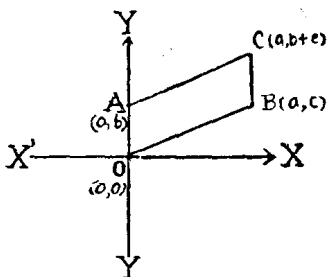
(d)  $(0, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(a, -b)$ ,  $(0, -b)$ .

12. 設  $(0, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(a, c)$  爲一平行四邊形三頂點之坐標, 則其第四頂點之坐標爲何?

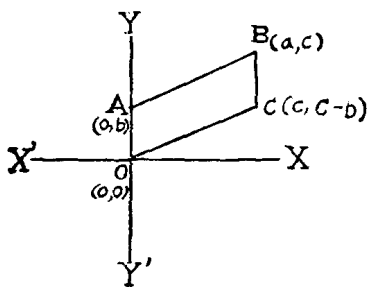
按圖其第四頂點爲  $(a, c-b)$ . 若聯  $OB$  爲一邊, 則  $C$  在  $B$  之上, 故第四頂點 (即  $C$ ) 爲  $(a, b+c)$ .



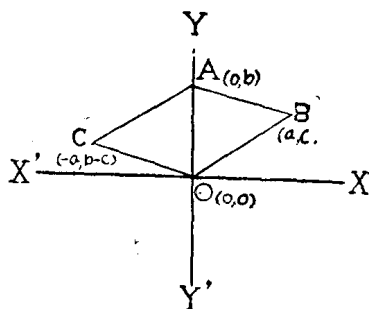
如下圖，則  $C$  爲  $(a, b+c)$ 。



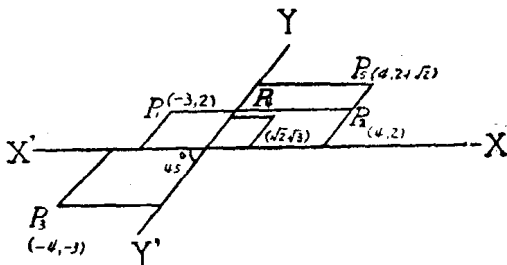
如下圖，則  $C$  爲  $(a, c-b)$ 。



又如下圖，則  $C$  爲  $(-a, b-c)$ 。

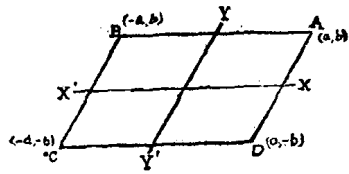
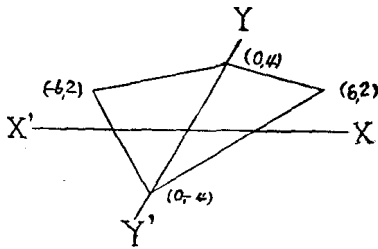


13. 作諸點其斜坐標如下，而坐標軸間之角爲  $45^\circ$ ： $(-3, 2)$ ,  $(4, 2)$ ;  $(-4, -3)$ ,  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ,  $(4, 2 + \sqrt{2})$ 。

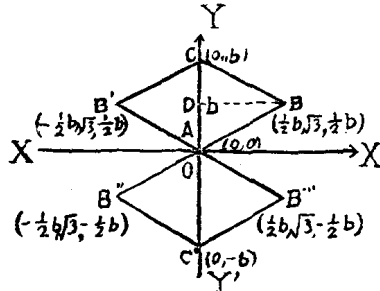


14. 作題 5 之諸四邊形，設坐標軸間之角爲  $60^\circ$ 。





15. 設等邊三角形之一邊長為  $b$ ，一頂點為  $(0, 0)$ ，而一邊在  $y$  軸上，則其餘頂點之坐標為何？(有四種情形)



$DB = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{2}\sqrt{3}$ ，故其餘頂點為：

$(0, b)$  及  $\left(\frac{b}{2}\sqrt{3}, \frac{b}{2}\right)$ ， $(0, b)$  及  $\left(-\frac{b}{2}\sqrt{3}, \frac{b}{2}\right)$ ，

$(0, -b)$  及  $\left(\frac{b}{2}\sqrt{3}, -\frac{b}{2}\right)$ ， $(0, -b)$  及  $\left(-\frac{b}{2}\sqrt{3}, -\frac{b}{2}\right)$ 。

16. 對於  $x$  軸對稱於  $(a, b)$  之點，其坐標為何？對於  $y$  軸？對於原點？

對於  $x$  軸對稱於  $(a, b)$  之點為  $(a, -b)$ 。

對於  $y$  軸則為  $(-a, b)$ 。

對於原點則為  $(-a, -b)$ 。

17. 邊長  $2a$  之正方形，有一頂點在  $(0, 0)$  而一對角線在正  $x$  軸上，則其餘頂點之坐標為何？

$AE = BE$ ，故  $AE = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \sqrt{\frac{4a^2}{2}} = a\sqrt{2}$ ，則其餘三頂點為