五年制高等职业教育教材

基础数学

初等数学

西部、东北高职高专数学教材编写组

Mathematics

高等教育出版社

五年制高等职业教育教材

基础数学

（初等数学）

西部、东北高职高专数学教材编写组

高等教育出版社

内容提要

本书根据教育部颁布的全国五年制高等职业教育《应用数学基础》基本要求编写的，它紧密围绕工科类高职的培养目标和专业特点，遵循"拓宽基础、强化能力、立足应用"、"必须与够用为度"的原则，介绍了最基本的知识和解决实际问题的方法.供招收初中毕业生使用.本书也可作为中等职业学校学生的教材，也可作为成人高考教材.

本书系西部、东北高职高专教材编写组编写的系列教材之一，全套书分《基础数学（初等数学）》、《基础数学（一元微积分）》、《高等数学》、《工程数学》四本.招收初中生的五年制的高职生使用《基础数学（初等数学）》、《高等数学》、《工程数学》三本.招收高中生的高职高专学生使用《高等数学》、《工程数学》.招生中职生的使用《基础数学（初等数学）》、《基础数学（一元微积分）》.

图书在版编目（CIP）数据

基础数学：初等数学／西部、东北高职高专数学教材编写组. —北京：高等教育出版社，2002.7

ISBN 7-04-011219-1

Ⅰ.基… Ⅱ.西… Ⅲ.初等数学-职业教育-教材 Ⅳ.012

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 043988 号

责任编辑 邵 勇 封面设计 于文燕 责任绘图 尹 莉

版式设计 马静如 责任校对 杨雪莲 责任印制 韩 刚

基础数学（初等数学）

西部、东北高职高专数学教材编写组

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010－64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销 新华书店北京发行所

排　　版 高等教育出版社照排中心

印　　刷 高等教育出版社印刷厂

开　　本	787×1092 1/16	版　　次	2002 年 7 月第 1 版
印　　张	18.5	印　　次	2002 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	480 000	定　　价	16.80 元

编者的话

根据2000年教育部“应用数学基础”课程的基本要求，供五年制高职学生使用的本教材遵循“拓宽基础，强化能力，立足应用”，“必需、够用为度”的原则编写。强调与计算机应用相结合，书中编写了计算器的使用简介。教师在教学中应适当安排时间组织教学实验，以便学生掌握计算机器的使用，解决相关问题。

为把学生培养成有较宽的数学基础，具有创新意识，懂得管理，有较强应用能力的高素质人才，本书对传统数学体系削枝强干，力求深入浅出，在不影响数学体系的前提下，淡化理论推导，强化实践能力培养，加强了例题和习题的编写，使数学理论和实际应用结合得更紧密。教材渗透了数学建模思想，整体上有一定的创新。

教材展示了数学广泛的应用，编写了大量新颖的例题、习题，其中有许多数学在其他学科中应用的题目，例如，经营管理，人口问题，环境保护等有关计算，这些题目有助于开阔学生视野、启迪思维，激发学生对数学的学习兴趣，从而使学生不仅会学数学，也会用数学。

教材富有弹性，大部分内容是用宋体印刷的，少部分内容是用楷体印刷的，有的部分加有“*”号。楷体或整节加有“*”号的内容，供教师根据专业的特点与学生的实际选用。本书立足“好教、好学”，每节复习题分A组和B组两组，A组为基本题，B组供学生选用，在内容选择和文字叙述上，始终贯穿编写原则。本书后面附有常用对数表、反对数表和三角函数表，供经济欠发达地区的一些学生使用。

本书也适合中职、职高学生作为初等数学教材，对于参加成人高考的学生也适合。

本书由谭洪坤任主编，王开洪、周建任副主编，黄非难、张邻、杨涛、王智全、王石健、苟伟、高敏参加编写，由宋利平任主审，易刚、张秀蓉、陈利任副主审，梁涛、李敏参加审稿。

本书是高职高专数学系列教材之一，这套系列高职高专教材由周世武主编，朱明刚、王开洪、周晓康、游家桦任副主编。

四川大学数学科学学院熊华鑫、白苏华教授审阅了全稿，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限和时间仓促，错误之处在所难免，恳请使用本教材的广大师生批评指正，以便我们修订提高。

西部、东北高职高专数学教材编写组

2002年3月

目　录

第一章　集合与函数

集合论是19世纪末叶,由德国数学家康托(Contor)等建立的一个数学分支.集合的基本知识已渗透到了数学的各个领域,使人们深化了对传统数学的某些内容的理解,有利于进一步学习数学和现代科学技术.本章介绍集合的概念及其有关运算,然后介绍不等式的解法,最后介绍用集合概念来描述函数的定义、简易逻辑与不等式,讨论函数与反函数的基本性质,介绍分段函数及其定义域.

§1-1　集合的概念

一、集合

我们先考察下面由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些事物为对象所组成的全体:

(1) 1, 3, 5, 7, 9;

(2) 到两定点的距离相等的所有点;

(3) 同一平面内的所有四边形;

(4) $2x$, $3x$, $x+y$;

(5) 某车间的全体工人.

容易发现:每一组对象的全体都是在一定范围内具有某种特定性质.例如,(1)中的每一个对象都是大于零小于10的奇数;(2)中的每一个对象都是到两个定点等距离的点;(3)中的每一个对象都是同一平面内的四边形;(4)中的每一个对象都是整式;(5)中的每一个对象都是某个车间的工人.我们把在一定范围内具有某种特定性质的对象的全体,称为**集合**(set),简称**集**,把组成某一集的各个对象称为这个集的**元素**.

如果集合 A 含有有限个元素,则称集 A 为**有限集**,此时 A 中的元素的个数记为 $n(A)$.例如,上面(1)、(4)、(5)就是有限集.含有无限个元素的集称为**无限集**.例如,上面(2)、(3)就是无限集.

集一般用大写字母 A、B、C…来表示,而集的元素则用小写字母 a、b、c…来表示.如果元素 a 是集 A 的元素,记为"$a\in A$",读作"a 属于 A";如果元素 a 不是集 A 的元素,记为"$a\notin A$",读作"a 不属于 A".例如,设 $\mathbf{N}$ 为自然数组成的集(规定0是自然数),则

$$5\in\mathbf{N},\quad 59\in\mathbf{N},\quad 1203\in\mathbf{N},\quad 0\in\mathbf{N};$$

而

$$-3\notin\mathbf{N},\quad \frac{2}{3}\notin\mathbf{N}.$$

由数组成的集称为**数集**.例如,前面的(1)和 $\mathbf{N}$ 都是数集.我们通常把自然数集、整数集、有理数集、实数集,分别表示为 $\mathbf{N}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$.为了方便起见,有时我们还用 $\mathbf{Q}^+$ ($\mathbf{Q}^-$)表示正(负)有理数集,用 $\mathbf{R}^+$ ($\mathbf{R}^-$)表示正(负)实数集,用 $\mathbf{Z}^+$ ($\mathbf{Z}^-$)表示正(负)整数集.

由点组成的集称为**点集**.如前面的(2)就是一个点集.

一个“给定集”的含义是：这个集的元素是**确定的**.就是说，对任何一个对象，我们都可以确定它是或者不是这个集的元素.例如，“某校一年级的全体学生”就是一个给定的集.因为我们可以考察任何一个人是或者不是这个学校一年级的学生，所以它的元素是确定的.又例如，“某班所有的高个子学生”，就不是一个集.因为并没有规定身高为多少以上的才算“高个子学生”.这就是说，集合的元素具有**确定性**.

二、集的表示法

集的表示法，主要有列举法和描述法.

1. 列举法

把属于某个集的元素一一列举出来，写在括号{ }内，集的这种表示法称为**列举法**.

例如，集 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,2,3,\cdots,100\}$，$C=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$，$D=\{$北京，天津，上海，重庆$\}$等等，每个元素只写一次，不能重复，而且不考虑排列顺序，也就是说，集具有元素的**互异性**和**无序性**.例如，由 a、b、c、d 四个元素组成的集，可以表示为$\{a,b,c,d\}$，也可以表示为$\{c,a,d,b\}$，但不能表示为$\{a,b,a,c,d\}$.

2. 描述法

把属于某一集的元素所具有的特定性质描述出来，写在括号{ }内，这种表示集的方法称为**描述法**.它的一般形式为

{元素的特定性质}　或　{元素的一般形式|元素的特定性质}[①].

例如，由所有直角三角形组成的集合，可表示为

$\{$直角三角形$\}$ 或 $\{\triangle ABC \mid \triangle ABC$ 有一内角为 $90°\}$；

由不等式 $2x-3>0$ 的解组成的集合，可表示为

$\{$不等式 $2x-3>0$ 的解$\}$ 或 $\{x \mid 2x-3>0\}$；

正比例函数 $y=kx$ 图像上的点组成的集合，可表示为

$\{$正比例函数 $y=kx$ 的图像上的点$\}$ 或 $\{(x,y) \mid y=kx\}$；

平面直角坐标系中第二象限的点所组成的集合可表为$\{(x,y) \mid x<0, y>0\}$.

在实际应用时，用集的哪一种表示法，要由具体问题来定，有的集既可用列举法表示，也可用描述法表示，有的集只能用描述法表示.例如，方程 $2x-1=0$ 的根可表示为$\{x \mid 2x-1=0\}$，也可用列举法表示为$\left\{\frac{1}{2}\right\}$；而不等式 $-3<x\leqslant 1$ 的解只能用描述法表示为$\{x \mid -3<x\leqslant 1\}$，却无法用列举法表示.

三、单元素集和空集

定义 1　如果集合 A 只含有一个元素，即 $n(A)=1$，则称 A 为**单元素集**.

我们把方程 $f(x)=0$ 的解组成的集合，称为该方程的**解集**.

例如，方程 $2x-1=0$ 的解集$\left\{\frac{1}{2}\right\}$就是一个单元素集；{某工厂的厂长}也是一个单元素集；集$\{x \mid x+3=3\}$同样是一个单元素集，即$\{0\}$.

定义 2　不含有任何元素的集，称为**空集**，记为$\varnothing$，于是 $n(\varnothing)=0$.

---

① 有的书也用冒号或分号代替竖线，例如 $\{x \mid x>3\}$ 可表示为 $\{x : x>3\}$.

例如，{本班今天第一节课缺席的所有学生}是一个给定集，但是本班今天第一节课没有人缺席，那么这个集就没有任何元素，是一个空集.

应注意，{0}是含有一个元素 0 的单元素集，$\varnothing$是不含任何元素的集，即 $n(\{0\})=1, n(\varnothing)=0$，它们是两个完全不同的集；$a$ 与$\{a\}$是不同的概念，a 只表示一个元素，而$\{a\}$则表示含一个元素 a 的单元素集.

四、子集

定义 3 在两个集 A 和 B 中，如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素，则称 A 为 B 的**子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"**.

例如，$\{a,b\}\subseteq\{a,b,c\}$，或 $\{a,b,c\}\supseteq\{a,b\}$；又例如，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}\supseteq\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}\supseteq\mathbf{Z}$ 等等.

当 A 不是 B 的子集时，记为 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$，读作"A 不包含于 B"(或"B 不包含 A").

对于任何一个集 A，因为它的任何一个元素都属于集 A 本身，所以 $A\subseteq A$. 也就是说，任何一个集都是它本身的子集. 此外还规定，空集是任何集合的子集(当然也有$\varnothing\subseteq\varnothing$).

定义 4 如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 为 B 的**真子集**，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(也可记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$)，读作"A 包于 B"或"B 包 A".

例如，$\{a,b\}\subseteq\{a,b,c\}$，而且$\{a,b\}\subset\{a,b,c\}$；还有$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$；$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$；$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$等等.

我们规定，空集是任何非空集的真子集.

为了形象地表示集之间的关系，通常用圆(或任何封闭曲线围成的图形)表示集，用图形中的点表示该集的元素. 这样的图形称为**文氏(Venn)图**. 图1－1就表示 $A\subset B$.

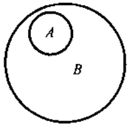


图 1－1

定义 5 在两个集 A 和 B 中，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称集 A 与集 B **相等**，记为 $A=B$.

例 1 写出集$\{a,b,c\}$的所有子集，并指出哪些是真子集.

解 集$\{a,b,c\}$的所有子集为 $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}$.

除$\{a,b,c\}$外，其余都是 A 的真子集.

例 2 讨论集 $A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$与集 $B=\{x\mid x+1=0\}$的包含关系.

解 因为 $A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}=\{-1,-2\}$，$B=\{x\mid x+1=0\}=\{-1\}$，

所以
$$B\subset A.$$

习题 1－1

1. 举出三个给定集的例子.
2. 判断下列各对象的全体能否组成集：
(1) 某个图书馆里的所有藏书； (2) 某校在校学生； (3) 所有的胖子； (4) 所有的小孩.
3. 用列举法表示下列各集：
(1) 小于 10 的自然数； (2) 小于 30 的素数； (3) $\{x\mid x=2n-1, x\leqslant 10, n\in\mathbf{N}\}$；
(4) $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}\right\}$.
4. 用描述法表示下列各集：
(1) $\{1,4,9,16,25\}$； (2) $\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}$；
(3) {北京，上海，天津，重庆}； (4) {火药，指南针，印刷术，纸}.

5. 用表示元素与集关系的符号$\in$或$\notin$填空：

(1) 0 ____ $\mathbf{N}$;　(2) -2 ____ $\mathbf{Z}^+$;　(3) -5 ____ $\mathbf{Q}^-$;

(4) $\sqrt{5}$ ____ $\mathbf{R}$;　(5) $-\frac{1}{3}$ ____ $\mathbf{Q}$;　(6) $\{1,2,3\}$ ____ $\{3,1,2\}$.

6. 用符号$\in$、$\notin$、$=$、$\supset$、$\subset$填空：

(1) $\varnothing$ ____ $\{e\}$;　(2) a ____ $\{a,b\}$;　(3) $\frac{\pi}{3}$ ____ $\mathbf{Q}$;

(4) $\varnothing$ ____ $\{0\}$;　(5) $\mathbf{Q}$ ____ $\mathbf{R}$;　(6) $\{P,Q\}$ ____ $\{P,Q\}$.

7. 单元素集的子集有多少个？$\varnothing$的子集有多少个？

8. 写出$\{r,s,t\}$的所有子集，指出哪些是真子集.

9. 讨论下列两个集的包含关系：

(1) $A=\{x\mid x=4n,n\in\mathbf{N},且\ n<8\}$与$B=\{4,12,8,16,20\}$;

(2) $A=\{2,3,5,7,11,13\}$与$B=\{小于\ 15\ 的素数\}$.

10. 用文氏图表示下列各组中集 A 与 B 之间的关系：

(1) $A=\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=6k-3,k\in\mathbf{Z}\}$;

(2) $A=\{x\mid x+2>1\}$，　$B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<4\right\}$.

*11. 若 $M=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}\}$，$P=\{y\mid y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}\}$. 验证：$M=P$.

§1－2　集合的运算

集的运算主要有交、并、差、补等运算，下面逐一介绍.

一、交集及交运算

6 的正约数的集为 $A=\{1,2,3,6\}$，10 的正约数的集为$B=\{1,2,5,10\}$，易见 6 与 10 的正公约数集为 $C=\{1,2\}$.

显然，集 $C=\{1,2\}$是由所有属于 B 且属于A 的元素组成的. 对于这样的集，给出下述定义：

定义 1　由所有属于集 A 且属于集B 的元素所组成的集，称为 A 与 B 的**交集**(intersection)，记为 $A\cap B$，读作“A 交B”，即　$A\cap B=\{x\mid x\in A\ 且\ x\in B\}$.

所谓“$x\in A$ 且$x\in B$”的含义为 x 是集A 与B 的公共元素. 如图 1－2 中的阴影部分就是 A 与 B 的交集$A\cap B$. 它分为 $A\cap B\neq\varnothing$（图 1－2(1)、(3)、(4)，其中(3)、(4)是(1)的两种特殊情况）和 $A\cap B=\varnothing$(图 1－2(2))两种情形. 所以，6 与 10 的正公约数的集可以从求 6 的正约数集与 10 的正约数集的交集而得出，即

$$\{1,2,3,6\}\cap\{1,2,5,10\}=\{1,2\}.$$

由交集的定义，显然有

$$A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B,\quad A\cap A=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing.$$

求交集的运算称为**交运算**.

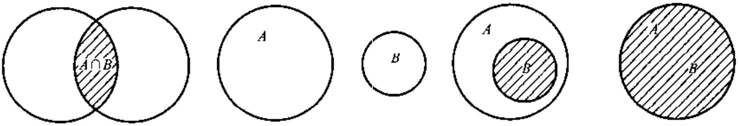
例 1　设 $A=\{x\mid x>-2\}$，$B=\{x\mid x<4\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{x\mid x>-2\}\cap\{x\mid x<4\}=\{x\mid -2<x<4\}$.

例 2　设 $A=\{四边形\mid 四个角相等\}$，$B=\{四边形\mid 四边相等\}$，求 $A\cap B$.

解　$A\cap B=\{四边形\mid 四个角相等\}\cap\{四边形\mid 四边相等\}$

$=\{四边形\mid 四边相等且四个角相等\}$.



(1) (2) $A\supset B$ (3) $A=B$ (4)

图 1-2

例 3 设 $A=\{2n \mid n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{3n \mid n\in\mathbf{N}\}$,求 $A\cap B$.

解 $A=\{0,2,4,6,8,10,12,\cdots,2n,\cdots\}$, $B=\{0,3,6,9,12,\cdots,3n,\cdots\}$,

故 $A\cap B=\{0,6,12,18,\cdots,6n,\cdots\}=\{x \mid x=6n, n\in\mathbf{N}\}$.

例 4 已知 $A=\{a,b,c,d,e\}$, $B=\{a,c,d,e,f\}$, $C=\{d,e,f,m,n\}$,

试求:(1) $(A\cap B)\cap C$; (2) $A\cap(B\cap C)$.

解 (1) $(A\cap B)\cap C=\{a,c,d,e\}\cap\{d,e,f,m,n\}=\{d,e\}$;

(2) $A\cap(B\cap C)=\{a,b,c,d,e\}\cap\{d,e,f\}=\{d,e\}$.

显然,交运算满足交换律和结合律,即

(1) $A\cap B=B\cap A$; (2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

例 5 如图 1-3, $A\supset B\supset C$,求:(1) $A\cap C$; (2) $A\cap B\cap C$.

解 (1) $A\cap C=C$;

(2) $A\cap B\cap C=C$.

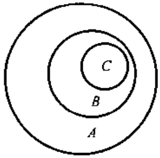


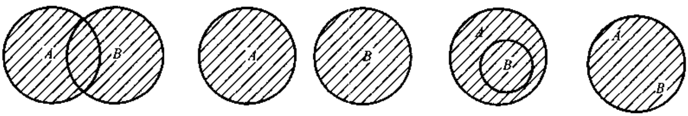
图 1-3

二、并集及并运算

设集 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{2,3,5,7\}$,把 A 和 B 两个集的所有元素合并在一起(相同元素只取一个)可以组成一个集 $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.对于这样的集,给出下述定义:

定义 2 由所有属于集 A 或属于集 B 的元素所组成的集,称为 A 与 B 的**并集**(union),记为 $A\cup B$,读作"A 并 B",即 $A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$.

$A\cup B$ 的文氏图如图 1-4,图中阴影部分为 $A\cup B$,它分 $A\cap B\neq\varnothing$(图 1-4(1),(3),(4),其中(3)、(4)是(1)的特殊情况)和 $A\cap B=\varnothing$(图 1-4(2))两种情形.



(1) (2) (3) (4)

图 1-4

由定义和图 1-4 可知 $A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$.

对于任何一个集 A,显然有 $A\cup A=A$， $A\cup\varnothing=A$.

求并集的运算称为**并运算**.

例 6 设 $A=\{x\mid(x+2)(x-3)=0\}$,$B=\{x\mid x^2-9=0\}$,求 $A\cup B$.

解 因为 $A=\{x\mid(x+2)(x-3)=0\}=\{-2,3\}$, $B=\{x\mid x^2-9=0\}=\{-3,3\}$.

所以 $$A\cup B=\{-2,3\}\cup\{-3,3\}=\{-3,-2,3\}.$$

例 7 设 $A=\{x\mid -1<x<3\}$,$B=\{x\mid 1<x<3\}$,$C=\{x\mid 2<x<5\}$.求:

(1) $A\cup B$; (2) $(A\cup B)\cup C$; (3) $A\cup(B\cup C)$.

解 (1) $A\cup B=\{x\mid -1<x<3\}\cup\{x\mid 1<x<3\}=\{x\mid -1<x<3\}$;

(2) $(A\cup B)\cup C=\{x\mid -1<x<3\}\cup\{x\mid 2<x<5\}=\{x\mid -1<x<5\}$;

(3) 因为 $B\cup C=\{x\mid 1<x<3\}\cup\{x\mid 2<x<5\}=\{x\mid 1<x<5\}$,

所以 $$A\cup(B\cup C)=\{x\mid -1<x<3\}\cup\{x\mid 1<x<5\}=\{x\mid -1<x<5\}.$$

例 8 求 $\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\cup\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}\cup\mathbf{R}$.

解 $\mathbf{N}\cup\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}\cup\mathbf{Q}=\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}\cup\mathbf{R}=\mathbf{R}$.

可以证明,并运算满足交换律与结合律,即

(1) $A\cup B=B\cup A$; (2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

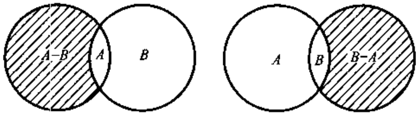
*三、差集及差运算

设 $A=\{$甲班第一、二、三组的全体同学$\}$,$B=\{$甲班第一、二组全体同学$\}$.我们把属于集 A 而不属于集 B 的所有元素组成一个集 $C=\{$甲班第三组的全体同学$\}$.对于这样的集,给出下述定义:

定义 3 由属于集 A 而不属于集 B 的所有元素组成的集称为 A 与 B 的**差集**(difference),记为 $A-B$(或 $A\setminus B$),读作"A 减 B", 即 $A-B=\{x\mid x\in A,\text{且 } x\notin B\}$.

上例中的集 C 就是 A 与 B 的差集,即 $C=A-B$.

集 $A-B$ 与集 $B-A$ 的文氏图分别如图 1-5 的(1)与(2)的阴影部分所示.



(1) (2)

图 1-5

求两个集的差集的运算,称为**差运算**.

例 9 已知 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$B=\{2,4,6,8,10\}$,求 $A-B$.

解 $A-B=\{1,3,5,7,9\}$.

四、全集和补集

当研究集与集的关系时,在某些情况下,这些集都是某一个给定集的子集,这个给定的集一般称为**全集**,记为 Ω.这样,全集包含了所要研究的这些集的全部元素,而各个集都是它的子集.

例如,在研究数集时,常常把实数集 $\mathbf{R}$ 看作全集,自然数集、整数集、有理数集、无理数集等都是它的子集.

研究全集 Ω 和它的子集 A 时,常常涉及 Ω 中不属于 A 的元素组成的集,为此,引入补集的概念.

定义 4 设 Ω 为全集,集 $A\subseteq\Omega$,由 Ω 中不属于 A 的元素组成的集,称为集 A 的**补集**(complement),记为 $\overline{A}$(或 $\complement_{\Omega}A$),读作“A 补”,即 $\overline{A}=\{x\mid x\in\Omega,x\notin A\}$.

全集的文氏图一般用矩形表示.图 1-6 的阴影部分表示 A 的补集 $\overline{A}$.

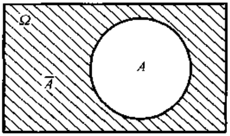


图 1-6

由补集定义可知

$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \overline{\Omega}=\varnothing,\quad \overline{\varnothing}=\Omega,\quad \overline{\overline{A}}=A.$

求补集的运算称为**补运算**.

例如,若 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{1,3,5\}$,则 $\overline{A}=\{2,4,6\}$.

容易看出,$\{1,3,5\}\cup\{2,4,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$,

$$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing,\overline{\overline{A}}=\overline{\{2,4,6\}}=\{1,3,5\}=A.$$

例 10 设 $\Omega=\mathbf{R}$,求 $\overline{\mathbf{Q}}$.

解 有理数集在实数集中的补集是无理数集,所以

$$\overline{\mathbf{Q}}=\{a\mid a\text{ 为无理数}\}.$$

例 11 已知 $\Omega=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid 3x+2<0\}$,求 $\overline{A}$.

解 因为 $A=\{x\mid 3x+2<0\}=\left\{x\mid x<-\dfrac{2}{3}\right\}$,所以

$$\overline{A}=\left\{x\,\middle|\,x\geqslant-\frac{2}{3}\right\}.$$

例 12 设 $\Omega=\{2,4,6,8,10,12\}$, $A=\{4,8,12\}$,$B=\{2,4,8\}$.

求 $\overline{A}$、$\overline{B}$,并验证等式:(1)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; (2)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

解 $\overline{A}=\{2,6,10\}$, $\overline{B}=\{6,10,12\}$, $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,6,10\}\cup\{6,10,12\}=\{2,6,10,12\}$,又 $A\cap B=\{4,8\}$,$\overline{A\cap B}=\overline{\{4,8\}}=\{2,6,10,12\}$,所以

(1) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

因为 $\overline{A\cup B}=\overline{\{2,4,8,12\}}=\{6,10\}$,$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,6,10\}\cap\{6,10,12\}=\{6,10\}$,所以

(2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

一般地,对任意集 A、B 有下面的等式成立:

(1) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; (2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

(1)、(2)式称为**德·摩根**(De Morgan)公式.

五、集合的简单应用举例

计算有限集合元素的个数是在一些实际应用和理论研究(如概率论)常遇到的问题.

例 13 设甲、乙两商店分别经销 200 种和 150 种商品,其中有 60 种商品相同,求甲、乙两商店共有多少种商品?

解 设 $A=\{$甲商店经销的商品$\}$,$B=\{$乙商店经销的商品$\}$,由题意知

$$n(A)=200,\quad n(B)=150,\quad n(A\cap B)=60.$$

甲、乙两商店的商品数($n(A\cup B)$)应为甲商店的商品数与乙商店的商品数之和中扣出它们相同商品的商品数,所以

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=200+150-60=290(\text{种}).$$

即　两个商店共有 290 种商品.

一般地,设 A、B 为有限集,则有

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

这个公式称为**两集合的并集的计数公式**.在这个公式中只要知道其中三项,就可求出第四项.

习题 1－2

1. 判断下列各命题的正误:

(1) 若 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,2,1\}$,则 $A\neq B$;　(　　)

(2) 空集是任何集合的真子集;　(　　)

(3) 设 $A=\{2,4,6\}$,$B=\{1,3,4,5\}$,则 $A\cup B=\{2,4,6,1,3,4,5\}$;　(　　)

(4) 设 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{3,5,7\}$则 $A\cap B=\{3,5\}$;　(　　)

(5) 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{c,d,e\}$,$C=\{d,e,f\}$,则 $A-B=B-C$.　(　　)

2. 已知两个集 A 与 B,求 $A\cap B$:

(1) $A=\{a,b,c,d,e\}$,$B=\{c,d,e,f\}$;　(2) $A=\{$整数$\}$,$B=\{$无理数$\}$;

(3) $A=\{$直角三角形$\}$,$B=\{$等腰三角形$\}$;　(4) $A=\{x\mid x\geqslant 2y\}$,$B=\{x\mid x<4\}$.

3. 已知两个集 A 与 B,求 $A\cup B$:

(1) $A=\{a,b,c,d,e\}$,$B=\{c,d,e,f\}$;　(2) $A=\{$负整数$\}$,$B=\{$负分数$\}$;

(3) $A=\{x\mid x>-2\}$,$B=\{x\mid x<3\}$.

4. 用适当的符号($\supseteq,\subseteq,=$)填空:

(1) $A\cap B$ ____ B;　(2) $A\cap B$ ____ $B\cap A$;　(3) $A\cup B$ ____ B;　(4) $A\cup B$ ____ $A\cap B$.

5. 设 $A=\{x\mid x(x+2)(x-5)=0\}$,$B=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$.

6. 设 $A=\left\{x\,\middle|\,x-\frac{3}{5}<0\right\}$,$B=\{x\mid 5x+1>0\}$,求 $A\cap B$,$A\cup B$.

7. 设 $A=\{a,b,c,d,e,f\}$,　$B=\{a,c,e,f,g\}$,　$C=\{c,e,g\}$,求:

(1) $A\cup B\cup C$;　(2) $A\cap B\cap C$;　(3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

8. 用文氏图验证:

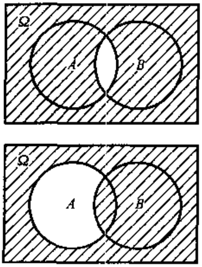
(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;　(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

9. 设 $A=\{x\mid x+2=x^2\}$,$B=\{x\mid \sqrt{x+2}=x\}$,求 $A-B$ 及 $B-A$.

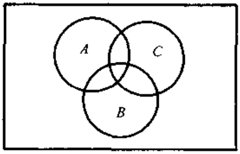
10. A 是任意一个集,求:$A\cap A$,$A\cup A$,$A\cap\varnothing$,$A\cup\varnothing$,$A-A$,$A-\varnothing$,$\varnothing-A$.

11. 设 $\Omega=\{x\mid -3<x<10\}$,　$A=\{x\mid -2<x<5\}$,求 $\overline{A}$.

12. 在下列各图中,A 与 B 表示集,用 A 与 B 的运算关系表示图中阴影部分:



第 12 题图



第 13 题图

13. 设 A、B、C 是全集 Ω 的子集(如图),在图中用阴影表示下列各集:

(1) $(A\cap B)\cup C$;　　(2) $(A\cap B)\cap C$;　　(3) $\overline{(A\cap B)}\cap C$.

14. 某外语进修班有学生 40 人,开设英语和日语两门外语,其中有 28 人学英语,17 人学日语,问同时学习两门外语的有几人?

§1-3　命　　题

一、命题的概念

我们在初中已经学过命题,可以判断真假的语句称为**命题**.例如语句:

①$6>5$,　　②3 是 15 的约数,　　③π 是整数

都是命题.其中①、②是真的,③是假的.不能判断真假的句子,不能称为命题.例如,句子

④祝你健康!　　⑤你会说英语吗?　　⑥你快离开这里

等都不是命题.正确的命题称为**真命题**,错误的命题称为**假命题**.命题常用小写的拉丁字母 p,q,r,s,…表示.

以上三个命题比较简单,由简单的命题可以组合成新的比较复杂的命题.例如,

⑦5 的倍数的末位数字是 0 或 5,　　⑧菱形的对角线互相垂直且平分,

⑨π 是非整数.

"或"、"且"、"非"这些词称为**逻辑联结词**.不含逻辑联结词的命题,称为**简单命题**,例如命题①、②、③.由简单命题与逻辑联结词构成的命题,称为**复合命题**,例如命题⑦、⑧、⑨.

下面介绍这几个联结词.

二、"且"与"或"

1.且

设 p、q 是两个命题,则 p 且 q 构成一个新命题,记为 $p\wedge q$,读作 p 且 q.例如,命题

p:15 能被 3 整除,　　q:15 能被 5 整除,

用"且"联结,则构成新命题

15 能被 3 整除,且能被 5 整除.

表 1

p	q	$p\wedge q$
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

容易理解,两个命题用"且"联结构成的新命题,**当且仅当这两个命题都是真命题时,新命题才是真命题;如果其中有一个是假命题,那么新命题就是假命题**.给定两个命题 p、q,它们与 p 且 q 的真假关系可列成表 1.根据表 1,我们可由命题 p、q 的真假判断出 p 且 q 的真假.表 1 称为 $p\wedge q$ 的**真值表**.

2.或

设 p、q 是两个命题,则 p 或 q 构成一个新命题,记为 $p\vee q$,读作 p 或 q.例如,命题

p:$4>3$,　　q:$4=3$,

用"或"连结,则构成新命题

$4>3$　或 $4=3$.

上式又通常记为 $4\geqslant3$,读作 4 大于或等于 3.

两个命题用"或"联结构成的新命题,在数学中,规定**只有在两个命题都是假命题情况才是假**

命题,在其他情况下所得的新命题都是真命题.给定两个命题 p、q,它们与 $p\vee q$ 的真假关系可列成表2.根据表2,我们可由 p、q 的真假来判断 $p\vee q$ 的真假.表2称为 $p\vee q$ 的**真值表**.

在上面的例子中,$4>3$ 是真的,$4=3$ 是假的,则 $4\geqslant3$ 应是真命题.

我们再看一个例子:　　p:明天刮风,　　q:明天下雨,

用"或"联结,则构成新命题:　　明天刮风或明天下雨.

根据上述真值表,这个新命题,当"明天刮风不下雨",或者"明天下雨不刮风",或者"明天刮风又下雨"时是真命题,只有当"明天既不刮风又不下雨"时才是假命题.

表 2

p	q	$p\vee q$
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

例 1　指出下列命题组构成的"p 且 q","p 或 q"形式的复合命题的真假:

(1) p:$2+1=5$,　q:$4>3$;(2) p:20 是 5 的倍数,q:20 是 4 的倍数.

解　(1) 因为 p 假、q 真,所以由且、或的真值表得

$2+1=5$,且 $4>3$ 是假命题;　　$2+1=5$ 或 $4>3$ 是真命题.

(2) 因为 p 真、q 真,所以由且、或的真值表得

20 是 5 的倍数,且 20 是 4 的倍数是真命题;

20 是 5 的倍数或 20 是 4 的倍数是真命题.

例 2　指出下列命题的真假:(1) $3\geqslant3$;(2) $4\leqslant3$.

解　(1) $3\geqslant3$ 的含意是 $3>3$ 或 $3=3$,由于 $3=3$ 是真命题,所以 $3\geqslant3$ 是真命题;

(2) $4\leqslant3$ 的含意是 $4<3$ 或 $4=3$,由于这两个命题都是假命题,所以 $4\leqslant3$ 是假命题.

三、否(非)

设 p 是一个命题,则 p 的"否"构成一个新命题,记为 $\neg p$,读作"非 p".例如

①p:$5=3$,　$\neg p$:$5\neq3$ ($\neg p$ 还可写为"$5>3$ 或 $5<3$");　　②p:$2>3$,　$\neg p$:$2\leqslant3$;

③p:全班同学**都是**男生,$\neg p$:全班同学**不都是**男生,或$\neg p$:全班同学至少有一个女生;

(注意:"都是"的否定只需是"不都是",而不必是"都不是".事实上有一个不是就足以把"都是"否定了.)

④p:甲、乙两射手都击中目标,$\neg p$:甲、乙两射手中至少有一个没有击中目标.

容易理解,**如果 p 是真命题,则 $\neg p$ 是假命题,如果 p 是假命题,则 $\neg p$ 是真命题**.p 与 $\neg p$ 的真假关系,可列成表3.根据表3,我们可由 p 的真假来判断 $\neg p$ 的真假.表3称为 $\neg p$ 的**真值表**.

表 3

p	$\neg p$
真	假
假	真

例 3　写出下列命题的否定,并判断它们的真假:

(1) p:$5\geqslant2$;　(2) q:对任意实数 x,$x^2-2x+1\geqslant0$;

(3) r:存在一个实数 x,使 $x^2-4=0$.

解　(1) $\neg p$:$5<2$,$\neg p$ 假.

(2) $\neg q$:存在一个实数,使得 $x^2-2x+1<0$,

因为 $x^2-2x+1=(x-1)^2\geqslant0$,对任意实数都成立,

所以不存在一个实数 x,使得 $x^2-2x+1<0$.　即$\neg q$ 假.

(3) $\neg r$:对任意实数 x,都有 $x^2-4\neq0$,令 $x=2$,则 $2^2-4=0$,所以$\neg r$ 假.

注　在例3中,我们证明$\neg r$ 是假的方法称为**举反例**.因为命题$\neg r$ 表述的是对任意实数 x,