

彈 性 地 基 上 的  
板 和 梁 計 算 問 題

哥勒尼  
Б. Г. 柯列涅夫 著

建 筑 工 程 出 版 社

# 彈性地基上的板和梁計算問題

立 之 譯

建 筑 工 程 出 版 社 出 版

• 1 9 5 8 •

**內容提要** 本書系敘述彈性地基上等厚的受彎梁與板的計算理論；此外還敘述此種地基上因恒載作用而受壓或受拉的梁與板的計算理論。計算理論的敘述均以例題解說。書中列有實際設計中最常用的計算參數值表。

本書可供設計工程師、科學工作者及研究生參考。

**原本說明**

**書名** ВОПРОСЫ РАСЧЕТА БАЛОК И ПЛИТ  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

**著者** Б. Г. Коренев

**出版者** Государственное издательство литературы  
и строительству и архитектуре

**出版地点  
及年份** Москва—1954

**彈性地基上的板和梁計算問題**

立 之 譯

\*

建筑工程出版社出版（北京市惠康門外大街）

（北京市書刊出版業營業許可証出字第062號）

建筑工程出版社印刷廠印刷·新華書店發行

書號 654 200千字 850×1168 1/32 7<sup>5</sup>/<sub>8</sub>印張

1958年5月第1版 1958年5月第1次印刷

印數：1—2,700冊 定價（10）1.40元

# 目 录

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| 前 言 .....                               | 5   |
| 緒 論 .....                               | 7   |
| 第 1 节 彈性地基的型式 .....                     | 7   |
| 第 2 节 彈性地基上梁与板的变形 .....                 | 14  |
| 第 3 节 本書中所采用的計算方法 .....                 | 17  |
| 第一章 彈性地基上的梁 .....                       | 19  |
| 第 1 节 整片勻質地基上的梁。基本关系 .....              | 19  |
| 第 2 节 无限長梁的計算 .....                     | 20  |
| 第 3 节 就地基系数假說而言的彈性地基上的<br>有限長梁的計算 ..... | 27  |
| 第 4 节 起始参数法、靜力学的解釋及与<br>抵偿荷载法的关系 .....  | 34  |
| 第 5 节 双彈性特征地基上的梁 .....                  | 39  |
| 第 6 节 利用起始参数法确定抵偿荷载 .....               | 44  |
| 第 7 节 彈性地基上梁的塑性变形 .....                 | 46  |
| 第 8 节 上配筋梁的計算 .....                     | 51  |
| 第二章 彈性地基上的圓板的軸对称变形 .....                | 60  |
| 第 1 节 基本关系 .....                        | 60  |
| 第 2 节 基本解 .....                         | 65  |
| 第 3 节 有限長半徑板的計算 .....                   | 73  |
| 第 4 节 起始参数法 .....                       | 79  |
| 第 5 节 彈性地基上的中央面內受恒压作用的圓板 .....          | 90  |
| 第 6 节 考虑环形截面中塑性变形圓板的計算 .....            | 102 |
| 第三章 圓板的非軸对称变形 .....                     | 105 |
| 第 1 节 基本关系 .....                        | 105 |
| 第 2 节 彈性面微分方程的积分 .....                  | 106 |
| 第 3 节 基本解的确定 .....                      | 110 |

|     |                      |     |
|-----|----------------------|-----|
| 第4节 | 圓板非軸对称变形时的起始参数法      | 114 |
| 第5节 | 抵偿荷载法                | 120 |
| 第6节 | 圓板計算例題               | 126 |
| 第7节 | 具有圓形嵌入物的无限長半徑板的計算    | 134 |
| 第8节 | 受有集中力或受有沿圓面积分布荷载的圓板  | 137 |
| 第9节 | 中間平面受有恒压及垂直于中間平面荷载的板 | 142 |
| 第四章 | 彈性地基上的非圓板問題的抵偿荷载法    | 144 |
| 第1节 | 基本解的确定               | 145 |
| 第2节 | 抵偿解的确定               | 149 |
| 第五章 | 綫变形地基上的板和梁           | 161 |
| 第1节 | 荷载与地基位移之間的关系         | 162 |
| 第2节 | 无界板及无限長梁的弯曲          | 171 |
| 第3节 | 沿圓形区域施加的荷载           | 189 |
| 第4节 | 借以表示基本解的积分計算的近似方法    | 192 |
| 第5节 | 綫变形彈性地基上的有限尺寸梁和板的計算  | 202 |
| 附 录 |                      | 215 |
|     | 貝塞尔函数理論的初步知識         | 215 |

## 前 言

彈性地基上的結構的計算，是結構力學中研究得最廣泛并很詳盡的一部分。彈性地基上結構的計算方法，在我國許多科學家的著作中已有了非常精深的研究。

就地基系數假說而言的彈性地基上的結構的計算理論，獲得了特別廣泛的發展。

在這方面從事過研究工作的有著名的俄國力學專家Н. Е. 儒科夫斯基教授、А. Н. 克雷洛夫院士及А. Н. 吉尼克院士等。П. Л. 帕斯捷爾納克、А. А. 烏曼斯基、Г. Л. 杜托夫、В. А. 基謝列夫、С. С. 果魯什凱維奇等也對這個問題作了一系列的重要研究。

此外，近二十年來，在我國有了一系列計算板和梁的著作，討論板和梁位於各向同性的均質彈性半空間地基上面的問題。在這些著作中，應當指出 Г. Э. 普羅克托爾、Н. М. 蓋爾塞瓦諾夫、А. М. 馬切列特、М. И. 果爾布諾夫-波沙多夫、В. А. 弗洛林、В. Н. 熱莫契金、И. Я. 什塔葉爾曼、А. П. 西尼岑、Л. А. 加林、О. Я. 舍赫捷爾等人的研究工作。

除此以外，最近還發表了不少著作，在這些著作中研究了其他型式的彈性地基，例如М. М. 費洛寧柯-鮑羅吉奇、В. З. 符拉索夫、П. Л. 帕斯捷爾納克、И. Я. 什塔葉爾曼、Г. К. 克列茵等人提出的型式。

本書研究彈性地基上等厚的板和梁的計算。

本書的一大部分篇幅系研究彈性地基上結構的計算問題，此地基彈性系就地基系數假說而言的。書中採用了抵償荷載法與起始參數法來解決這些問題。此外，還研究了一些型式相當普遍的均質彈性地基上的板和梁等結構的計算。彈性半空間型式和薄片型

式等是这类地基的个别情况。我们以就地基系数假说而言的弹性地基上的板或梁作为基本系统来计算这种地基上的板和梁。应当指出,本书所加以发展的方法,可用以解决一系列在考虑塑性变形的弹性地基上结构的计算问题;作者在本书中只能简略叙述这类问题,因为如将作者在中央工业建筑科学院研究这个问题已得结果在本书中详细叙述,会使本书增加不必要的篇幅。

本书所叙述的,基本上是作者的研究结果,这一点在文字叙述上可以看得出来,同时也是本书材料分配很不均衡的原因。

在阐明结论的同时,作者仍然力求使本书能适合于实际工程计算上的应用。为此,在第一章中颇为详尽地叙述了长梁的计算理论,而在第二章及第三章的开始,即引述了一些弹性地基上圆板计算的基本公式。

第一章、第二章及第三章叙述较为详细,其余几章写的较为简要。作者的意图,主要是把所研究的计算方法的实质充分详尽地叙述清楚。为了读者方便起见,书中附有一些表格及一部分贝塞尔函数表。

作者对 M. M. 费洛宁柯-鲍罗吉奇教授审阅稿件所给予的宝贵指教,并对技术科学副博士 M. H. 卢奇姆斯基整理稿件所作的巨大工作,表示衷心的感谢。

对本书的意见及批评,请寄交出版社,地址:莫斯科,特列恰考夫斯基大街 1 号。

## 緒 論

### 第 1 节 彈性地基的型式

众所周知,彈性地基上的梁或板,是指一种除有已知的主动力作用之外,尚有被动力作用(决定于这种結構位移的彈性地基的反力)的結構。

因此,当計算梁或板时,我們会遇到 两种 荷载:主动荷载或称已知荷载  $q$ , 及待确定的反力(負載)  $p$ 。目前所采用的理論,大都假定反力  $p$  是梁的撓度  $w$  的某种函数。自然,在研究各种物理問題时,我們也会遇到彈性地基的反力与其边界位移之間的各种关系,边界位移是和所研究的結構有关的。同时,当提出彈性地基上結構的計算問題时,在照顧到所采取的計算图形对 結構 实际工作条件的近似精确的同时,还必须以一定的方法来簡化这些关系,以免計算过于复杂。实际上,在位移与反力之間可能产生各式各样的关系;在彈性地基上結構的計算書籍中,仅对很少数的彈性地基型式进行过詳細研究。对温克尔-切米尔曼假說的板、梁計算理論(亦称为地基系数型式),研究得最为詳細。彈性层和所謂双彈性特征地基上的梁或板問題,則研究得不甚詳細。

彈性半空間体上的板和彈性半平面及彈性半空間体上的梁,近年来已作了詳細研究。

在本書中研究上述型式,同时也研究下面将要提到的 其他型式的彈性地基上結構的某些問題,后者是綜合性的型式。所以我們現在就来研究結構的位移与地基反力之間可能发生的各种关系。在許多技术問題中,反压力是和結構的位移成直綫关系的。这就是說,当  $p_1 = F(w_1)$  及  $p_2 = F(w_2)$  时,  $p_1 + p_2 = F(w_1 + w_2)$ , 因而当  $p = F(w)$  时,  $ap = F(aw)$ 。这种彈性地基,我們將称为綫变形彈性

地基。

假如我們只限于研究梁或板中的彈性变形及小的位移，則外部压力与撓度之間的关系可用綫微分方程式表示。因此綫变形地基上的彈性梁計算問題是綫性的。計算这种梁时，可利用作用叠加原理。

本書将研究綫变形彈性地基問題。

互不相联的具有直綫性質的独立彈簧系統是最簡單的綫变形地基型式(图 1)。对于此种地基， $p = k_0 bw$ ，式中  $b$ —梁寬， $k_0$ —彈簧单位面积的彈性指标。这种型式应予以专用名詞，此后即将称之为地基系数型式。在浮梁問題中—当計算浮桥时即会产生此种浮梁問題(图 2)—剛好符合上述关系，这种关系是阿基米德原理的直接結果。

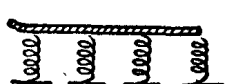


图 1



图 2

当一个旋轉圓柱薄壳发生軸对称变形时(图3)，其母綫的变形就和一个除有外力作用之外，尚有与該点的徑向位移成正比的反力  $p$  作用的梁一样。

当計算图 4 中所示的十字梁系时，可以認為縱梁是位于彈性地基上，此彈性地基是由一些不相联系的彈簧橫梁所組成。

A. H. 克雷洛夫院士在他的著作“彈性地基上梁的計算”一書中，研究了许多关于十字梁的問題。因而，所列举的例子就說明了結構力学中的許多問題，均可充分地用就地基系数假說而言的彈性地基上的梁和板的弯曲理論来加以解說。

这个假定称为温克尔假說，由于以这种假定为依据的問題之解很易求得，因而被广泛地应用于基础建筑中。但是，在計算基础时，認為土壤表面任一点的沉陷是与該点的压力成正比的这种說法，著名的欧拉氏也曾經提出过。

早在 1922 年曾对基础建筑中的温克尔假說提出过批判的

Г.Э. 普罗克托尔和維格尔德首倡下,提出了引用其他更能充分說明土壤工作情況的地基型式問題。

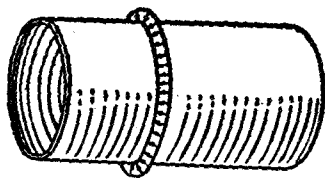


图 3

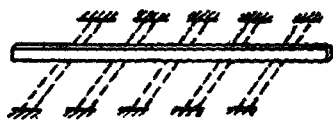


图 4

所以目前地基系数假說在基础建筑中的应用不如以前那样普遍了。但目前,在某些情况下,还可以認為这个假說是完全适当的,例如,在計算地基垫层相当密实的、較薄的一层柔韌土壤上的基础时,即可应用这个假說。

因此,在許多技术問題中,上述的地基反力与結構位移之間的最簡單的关系,我們都要用到。由于这个假說所導出的計算比較簡單,因而可以用研究透彻并詳列成表的函数来表示,所以当研究更复杂的彈性地基型式时,可以将最簡單的彈簧型式作为基本系統。这个問題将在本書最后一章中进行分析。

大多数結構力学問題都是研究彈性地基上梁的弯曲問題,其地基反压力与撓度及撓度的二次导数有关——直綫关系。

$$p(x) = k_1 w(x) + k_2 w''(x). \quad (1.1)$$

在此情况下,某点的反压力是該点的位移和位移二次导数的函数。M. M. 費洛宁柯-鲍罗吉奇提出了一种彈性地基的計算型式<sup>①</sup>(图5),它由一排彼此之間以柔綫相連的彈簧組成。此时,反压力  $p$  与彈簧上端位移之間将产生式(1.1)的关系。

当圓柱薄壳、浮板受弯时,往往产生相当于計算我們称为双彈性特征<sup>②</sup>的地基上梁的問題。在已确定的簡化的假定之下,鋼筋

① 应当指出,由 B.З. 符拉索夫根据其他假說所提出的型式,亦导出同样的最終关系。由 П.Л. 帕斯捷尔納克所提出的双彈性特征的彈性地基型式也得到这种相同的關係。

② 这个术语是 П.Л. 帕斯捷尔納克所引用的。

混凝土楼板边梁的计算问题，可以归结为这类问题。这个问题所导出的方程式和就地基系数假说而言的弹性地基上受有轴向力作用的梁的弯曲方程式相同。

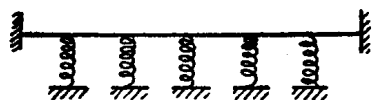


图 5

至于就 M. M. 费洛宁柯-鲍罗吉奇型式而言的弹性地基上的板的问题，应以弹性薄片代替弹性线。在这种情况下，则得出下式以代替式(1.1)：

$$p(x, y) = k_0 w(x, y) + B \Delta w(x, y),$$

式中  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  ——拉普拉斯微分算子。

在各种技术问题中，在应力与位移之间可能产生综合式(1.1)的关系，且具有下列形式

$$p = L_1(w), \quad (1.2)$$

式中  $L_1$  ——线微分算子；其中，上面所提到的以线联结一系列弹簧所构成的混合弹性地基型式 (M. M. 费洛宁柯-鲍罗吉奇) 即是这种综合式。

可得出更为普遍的关系，若设：

$$L_2(p) = L_1(w), \quad (1.3)$$

式中  $L_2$  ——亦系线微分算子。

所有在上面研究的弹性地基型式，当研究梁的弹性变形时，总是导向线性微分方程的。在式(1.3)的假定下，微分方程式的阶数将比式(1.2)有所增高，其增高值为算子  $L_2$  的阶。

稍为综合之后，即可将就地基系数假说而言的弹性地基上的结构计算法，推广至所研究过的任何一种地基上的结构上。

在叙述所研究的型式的性质时，曾确定了梁与地基在同一点的各种数值之间的关系；这些地基型式或许可以姑且称为点式地基，虽然严格说来，只是地基系数型式是点式的，因为其余的点式地基，其位移不仅发生在荷物下面，在其他各点也发生。

现在来研究更复杂的地基型式，点式地基即是这型式的个别

情况。以  $K(x-\xi)$  表示地基边界位移的函数,此位移是由作用于  $\xi$  点的单位力所产生的,  $\xi$  点称为核。

在这种情况下,反压力  $p$  与地基表面的位移  $w$  之间有下列关系:

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) K(x-\xi) d\xi. \quad (1.4)$$

例如,对于弹性半平面体或弹性半空间体上的梁,可从熟知的受有垂直于边缘的单位集中力的半平面体和半空间体的问题解中求得核。

现在已有不少解答弹性半平面体和弹性半空间体上的梁和板弯曲问题的著作;这些问题主要是从基础的计算方面研究的;各向同性的匀质弹性半空间体,是目前广泛采用的土壤型式。但假如在所有的情况之下都利用这唯一的型式那也是不对的,因为土壤可能是不匀质的,例如多层的土壤等。

关于选择地基型式的问题,实际上尚未研究得很详尽,并且除了匀质的各向同性弹性半空间体以外,土壤力学尚能提供其他的地基型式,由于注意到这种情况,所以研究其他种核也是有益的。虽然属于式(1.4)问题的方程式,在这种情况下仍是线性的,但在式(1.4)中添入积分界限的这一情况,这表明了这个问题的某些特性;特性之一就是一个独立梁的变形和旁边有其他结构的梁的变形不同。在解决下面即将叙述的采用抵偿荷载法可能性问题时,必须注意这一情况。

在某些问题中,将所研究过的两组弹性地基综合来研究是合理的,这种地基将称为混合地基。这种混合地基最简单的一种就是一个位于弹性半空间体上的彼此不相联系的弹簧系统<sup>①</sup>(图6)。在此情况下

---

① 位于地基系数及弹性半空间体联合型式弹性地基上的柱墩,Н.Я. 什塔叶尔曼已经用熟知的赫芝解法的综合步骤研究过,位于这种地基上的梁已由 Б.Н. 热莫契金及 А.П. 西尼岑研究过。

$$w(x) = kp(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi)p(\xi)d\xi, \quad (1.5)$$

例如，若在彈性半空間體上有一層較薄的、具有另外一種彈性模數的彈性層時，即可採用這種關係。

若沿梁或板的整個支持面壓力與位移之間的關係均相同時，則這種地基稱為均質地基。

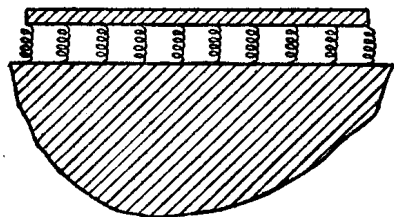


圖 6

在本書中所研究的梁與板，均系等厚的，且一般是位於均質彈性地基上的；因此彎曲方程式從根本上簡化了。對於地基係數型式而言，這將是有固定係數的微分方程；對於具

有核的型式——核對所有各點均相同——以及對於等厚的無界板則可得到結構比較簡單的廣義積分形式的解；即使在均質混合地基情況下亦同。因此，我們將廣泛地利用簡化式。簡化式是由均質彈性地基而得。

可以利用綫變形型式的範圍相當大。但是反壓力與位移之間的關係是非綫性的問題也會遇到。作用疊加原理對非綫性地基的問題是不適用的。若結構的變形是用非綫性方程表示，則此處不能發展一些對大部分問題皆為適合的通法。茲列舉一些非綫性彈性地基的例子。假定以不相聯系的非綫性彈簧系統作為地基，則

$$w(x) = F[p(x)].$$

具有兩階段變形性質的地基甚為有意義(圖 7)；這種型式可用來敘述圓柱管的對稱變形(圖 8)。在此種情況下，圓柱管壁的塑性變形與圖 7 的特性近似。

土壤上的板，在許多情況下均應認為是具有地基塑性變形的；這類問題極為複雜，直到目前彈性-塑性半空間體上結構的計算理論尚未研究出來。因此，須注意當柔性板負有荷載時，塑性變形主要是在比較淺的土層中擴展；並假定在半空間體中只產生彈性變

形,而在彈簧中产生彈性的或彈性-塑性变形<sup>①</sup>,在这种情况下,即可利用混合地基型式。

假如在梁与地基之間存在着縫隙,則当梁的彈性变形很小时,可能要产生非綫性的問題。如果在結構上作用有重复荷載,而在地基上产生殘留变形,則在梁与地基之間即可出現縫隙。

上面叙述了彈性地基的各种型式。当然会想到它們在計算方法上也会各有不同。关于在某种情况下應該采用何种計算型式的問題,在本書中不予以研究。在大多数有关构筑物結構构件的計算問題中,代替其他构件作用的彈性地基型式的選擇問題已講得相当清楚了。但基础建筑是一极其复杂的問題,因为彈性地基型式的選擇,还应当考虑土壤力学情况。从我們的观点来看,在基础建筑中,地基型式的選擇問題尙欠研究,如果在这方面能进行專門的試驗和实物觀測,还会有許多新的发现。

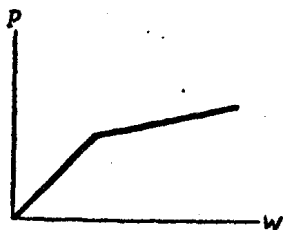


图 7

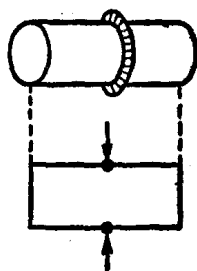


图 8

作者在本書中不再研究這個問題。

在彈性地基上結構的計算理論中,綫变形地基上的非綫变形結構問題应当起着极重要的作用。当研究土壤上的較柔韌的盖板时,就会发生这种問題;由这种盖板傳至土壤上的应力往往不大,同时当地基中仅产生彈性变形时,盖板結構随着荷載的增长可能改变自己的剛度。例如,在鋼筋混凝土結構中会发生裂縫扩展,因

<sup>①</sup> B. H. 热莫契金和 A. П. 西尼岑曾提出过关于混合彈性地基类似于这方面的意見。

此按第一阶段工作的結構即轉入第二阶段;此后,可能在低配筋板中个别部分发生塑性变形。

同时結構的性能也将改变。此时所产生的問題,将在下节中研究。

## 第2节 彈性地基上梁与板的变形

确定彈性地基上的梁与板的位移問題,对于此类結構的靜力計算是非常重要的。只有正确估計彈性地基上結構的变形,才能得到所产生力的完全可靠的数值,因为所有的計算数值一般不仅取决于地基的变形,而且同时更重要的还要取决于結構的剛度。

估計彈性地基上結構剛度的問題,在現有的書籍中注意得較差,这与此問題的重要意义是不相称的。

目前,按照現行的标准,采用条件法来确定鋼筋混凝土构件的剛度,这种方法是将混凝土截面假設为彈性的、勻質的、无裂縫的。

确定慣矩时,混凝土截面和鋼筋截面全部包括在內;混凝土的彈性模数視为混凝土抗压极限強度的函数。

В. И. 穆拉肖夫在中央工业建筑科学研究所进行的、并已由 Я. М. 涅米罗夫斯基用实验証实的研究結果表明,鋼筋混凝土构件的实际剛度和假定的标准剛度相差很大。

这个問題,在 В. И. 穆拉肖夫不久以前出版的著作中<sup>①</sup>研究得极为詳尽。現在介紹一些有关的見解,以便說明計算彈性地基上的結構时正确决定剛度的全部重要性,并且为从事基础計算的工作人员指出在这方面因此而产生的那些新問題。

正如实验結果和理論研究結果所表明,計算标准中所采用的确定剛度条件法的誤差,对于在基础建筑中所广泛采用的低配筋受弯結構是很大的。按照 В. И. 穆拉肖夫的方法計算表明,鋼筋混凝土构件的实际剛度在許多情况中都較目前在計算中所引用的假定剛度低。

---

① В. И. 穆拉肖夫:“鋼筋混凝土的抗裂性、剛度和强度”。莫斯科, 1950 年。

彈性地基上結構的實際工作性質，主要的是由其剛度來確定。實際上，概略地說，彎矩圖的性質及在規定範圍內彎矩的大小，主要的是取決於受彎結構的剛度和地基剛度的比值。減低結構的剛度，或更正確地說，即不是毫無根據地誇大結構的剛度，一般會使受彎基礎構件中的內力減少，因此在許多情況下這顯然是很經濟的，但同時會增加土壤中的應力。

剛度的正確計算，至今在彈性地基上結構計算理論中尚未研究過，它與正確地估計地基的壓陷是同等重要的。如果把估算剛度的問題，只看作是計算公式中簡單地將一個數字更換為另外一個數字，這種想法是不正確的。問題在於鋼筋混凝土結構的剛度本身並非是某種已知的常數；實際上它是根據許多情況而變的，這些情況在計算時必須予以注意。首先應指出的，是剛度在很大程度上要取決於裂縫擴展的程度，而裂縫擴展的程度又取決於截面中內力的大小；因此，當計算彈性地基上的柔性鋼筋混凝土結構時，在應力段中（例如，在梁的中間部分受有較為集中的荷載）截面的剛度將比相鄰應力較小的邊緣部分低。這種情況有助於彎矩圖的平衡。對於彈性地基上的結構，當校核抗裂性時，這一情況起着重要作用。強度計算也與所指出的這種情況有着重要的關係。

此處順便還提一提另一個問題，即根據何種荷載來確定剛度——根據計算荷載還是根據極限荷載。問題在於使用荷載下的剛度形成的應力圖是一定的，但如果荷載增加時，則剛度減低，因此結構中的彎矩較荷載的增長小；但土壤中的應力增長較大。

這個論證說明，確定彈性地基上的結構中的應力不能作為估計安全系數的完全可靠的標準；另一方面，用破壞荷載法確定安全系數，不僅要求克服具有原則意義的困難，而主要的是不能解決確定變形、裂縫擴展的程度及土壤的耐壓力等許多極重要的問題。

然而，所有這些問題對相當多的結構來說，却有着極大意義。首先是所有比較柔韌而長的結構，因為這些結構一般都是只利用土壤容許應力的很小一部分；工業廠房的地面、路面、長的条形基礎（如轉運起重機下的基礎）等均屬此類。另一方面，當研究旋轉薄

壳体以及十字梁等的强度时,也会产生类似的问题。因此,考虑上述刚度的变化来研究弹性地基上的梁和板的计算问题是合理的。

为阐明解决考虑刚度变化的结构力学基本问题时所产生的困难的性质,我们来研究就地基系数假说而言的弹性地基上的等截面的梁。假定梁的刚度  $B$  仅取决于该点弯矩的大小,则

$$B = \varphi(M),$$

式中  $\varphi$ ——已知函数;显然,  $B$  随  $M$  的增长而减少;这个关系也可表示为  $B = \varphi_1(w'')$ 。梁的弹性微分方程式,由两个基本方程式得出:

$$-Bw'' = M \quad \text{及} \quad M'' = -q + kw,$$

由此

$$(Bw'')'' + kw = q$$

或

$$\varphi_1 w^{IV} + 2\varphi_1' w''' + \varphi_1'' w'' + kw = q。$$

由此可见,在  $M$  与  $B$  之间的任意关系下,方程式都是非线性的。但这并不是说,按照这种方法就不能获得解决。不过,解决这样提出的实际问题,显然是很复杂的。因此研究较为粗略的结构工作图形是适当的,虽然此图形未考虑由于裂缝扩展而引起的刚度变化,但却考虑了由于钢筋的塑性变形所引起的内力重分配。当结构中钢筋的应力超过钢筋流限,而弯矩保持为常数时,就是这种近似情况。

若荷载沿结构移动时,由于考虑因裂缝扩展而发生的刚度改变的修正,则没有我们所说过的那些特性;这里,应当只限于考虑钢筋中的塑性变形。

因此,从我们的观点来看,对于比较柔韧的板和梁,当估算各种极限状态时,考虑钢筋中的塑性变形,将起主要作用。

本书中,将研究这方面的某些最简单的弹性-塑性变形问题。

为了简化起见,假定在钢筋未产生塑性变形的地方,结构的刚度为常数,而钢筋也不强化。