详解版

初中
数学奥林匹克竞赛
全真试题

南秀全 主编

全国联赛卷

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

初中数学奥林匹克竞赛全真试题.全国联赛卷/南秀全主编.
—武汉:湖北教育出版社,2003
ISBN 7-5351-3495-5

Ⅰ.初… Ⅱ.南… Ⅲ.数学课-初中-试题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 033571 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015 电话:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北恒吉印务有限公司 (430077·武昌岳家嘴特 1 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32 13.75 印张
版 次:2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷
字 数:320 千字 印数:1-5 000

ISBN 7-5351-3495-5/G·2815 定价:18.00 元

前　言

奥林匹克数学竞赛是覆盖面最广的一种群众性竞赛活动，几乎覆盖了全国各地每一所学校，“华罗庚金杯少年数学邀请赛”每年不知牵动了多少市民的心，人们都希望自己的孩子都能成为第二个华罗庚，成为第二个陈景润；也有许多的数学教师，总希望自己成为一个出类拔萃的教师。但当我们的父母看到孩子做不出训练题目想帮一把却又感到无助之时，总感叹自己手中没有一本好书，不是太难，就是太易，或是太偏，或是缺少系统性，而面对太多的竞赛资料又总觉得有些茫然。我们的许多教师也为竞赛书太多太滥大伤脑筋，为竞赛缺少一个既有系统性而又不超竞赛大纲的书而犯愁。为此我们广泛收集，将近八年的全国小学、初中奥林匹克竞赛试题、华杯赛试题及全国部分省市的初中竞赛试题，汇编成这套丛书。书中通过对试卷的全面分析和研究，对每道赛题都逐一进行了详细的解析。本套丛书力求体现以下特点：

1. **导向性**。全面反映了近几年中、小学数学竞赛的题型，及所考查的知识点和解题方法，从而可以看出未来竞赛命题的走向和原则。

2. **新颖性**。所选内容均是近八年全国及部分省市的竞赛试题，不仅内容新，题型新，而且具有广泛的代表性。用后一定会感到内容新鲜，题目新颖，精彩有趣。

3. **精巧性**。因为许多试题虽有一定难度，但难而不怪；灵活性强，高而可攀。当然，解答时具备较强的分析推理能力和灵活运用知识的能力。我们在解析时，注意做到语句通俗、简明，思路清晰、简捷。有的还配有图表说明，便于学生理解。对于一题多解，限于篇幅，一般采用一、两种最简便巧妙的方法。这对拓展学生思路，启迪思维，发展智力，将有很大帮助。

4. **实用性**。本丛书中前半部分是试题,并留有解答的空间,后半部分是解析。可作学生在赛前进行检测,检测后再对照答案掌握和理解解题方法。这样既便于学生用,也便于家长和教师参考。

5. **权威性**。本丛书是由在国际奥赛中屡夺金牌的黄冈的特、高级教师和国家级奥林匹克优秀教练员编写。

参加本书编写的有:南秀全、石涧、秦必耕、吕伦彬、余梦、魏友成、余曙光、付东峰、姜文清、肖九河、王飞、肖珂、沈立新、肖一鸣、胡海波、张克刚、吕中浩、刘明虎、段文涛、杨世俊、南山、杨仕春、杜江、陈正。

由于时间仓促和水平有限,编写中难免出现错误或不当之处,敬请广大读者提出宝贵意见。希望本套丛书铺就您的金牌之路。

MULU

目录

MU LU 目录

1997年全国初中数学联赛试题

第一试(70分)

一、选择题（满分42分，每小题7分）

1. 下述四个命题

(1) 一个数的倒数等于自身，那么，这个数是1；

(2) 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形；

(3) a^2的平方根是$\pm|a|$；

(4) 大于直角的角一定是钝角.

其中错误的命题有（　）.

(A) 1个　　(B) 2个　　(C) 3个　　(D) 4个

2. 已知$\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}<x<\dfrac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. 那么，满足上述不等式的整数$x$的个数是（　）.

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

3. 若实数a、b、c满足$a^2+b^2+c^2=9$，则代数式$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$的最大值是（　）.

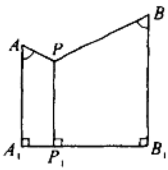
(A) 27　　(B) 18　　(C) 15　　(D) 12

4. 给定平面上的n个点，已知1，2，4，8，16，32都是其中两点之间的距离. 那么，点数n的最小可能值是（　）.

(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 7

5. 在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$\angle B=30°$，$\angle C=60°$，E、M、F、N分别为AB、BC、CD、DA的中点．已知$BC=7$，$MN=3$. 则EF之值是（　）.

(A) 4　　(B) $4\frac{1}{2}$　　(C) 5　　(D) 6



6. 如图，已知$\angle A=\angle B$，AA_1、PP_1、BB_1均垂直于A_1B_1，$AA_1=17$，$PP_1=16$，$BB_1=20$，$A_1B_1=12$. 则$AP+PB$的值是（　）.

(A) 12　　(B) 13　　(C) 14　　(D) 15

二、填空题（满分 28 分，每小题 7 分）

1. 从等边三角形内一点向三边作垂线，已知这三条垂线的长分别为 1，3，5，则这个三角形的面积是______.

2. 当a取遍 0 到 5 的所有实数值时，满足 $3b=a(3a-8)$ 的整数b的个数是________.

3. 若a、b满足 $3\sqrt{a}+5|b|=7$，则$s=2\sqrt{a}-3|b|$的取值范围是________.

4. 若正整数x、y满足方程$x^2+y^2=1997$，则$x+y$等于______.

第二试(70 分)

一、(20 分) 设P为等腰直角三角形ACB斜边AB上任意一点，PE垂直AC于点E，PF垂直BC于点F，PG垂直EF于点G，延长GP并在其延长线上取一点D，使得$PD=PC$. 试证：$BC\perp BD$，且$BC=BD$.

二、(25 分) 已知a、b为整数，且$a>b$，方程 $3x^2+3(a+b)x+4ab=0$ 的两个根α、β满足关系式

$\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)=(\alpha+1)(\beta+1)$.

试求所有的整数点对 (a,b).

三、(25 分) 已知定理："若三个大于 3 的质数a、b、c满足关系式 $2a+5b=c$，则$a+b+c$是整数n的倍数." 试问：上述定理中的整数n的最大可能值是多少?并证明你的结论.

1998 年全国初中数学联赛试题

第一试(150 分)

填空题（每小题 10 分，共 150 分）

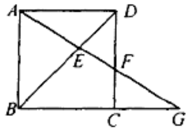
1. 设$m=\sqrt{5}+1$，那么$m+\dfrac{1}{m}$的整数部分是______.

2. 在Rt△ABC中，两条直角边AB，AC的长分别是 1cm，2cm，那么直角的平分线的长度等于______ cm.

3. 已知$x^2-x-1=0$，那么代数式x^3-2x+1的值是____.

4. 已知m、n是有理数，并且方程$x^2+mx+n=0$ 有一个根是$\sqrt{5}-2$. 那么$m+n$的值是____.

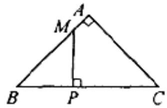
5. 如图，$ABCD$为正方形，A、E、F、G在同一条直线上，并且AE=5 厘米，EF=3 厘米. 那么FG=____ 厘米.



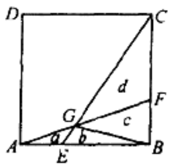
6. 满足 $1998^2+m^2=1997^2+n^2$ $(0<m<n<1998)$ 的整数对 (m, n) 共有____ 个.

7. 设平方数y^2是 11 个相继整数的平方和，则y的最小值是____.

8. 直角三角形ABC中，直角边AB上有一点M，斜边BC上有一点P，已知$MP\perp BC$，$\triangle BMP$的面积等于四边形$MPCA$的面积的一半，BP=2 厘米，PC=3 厘米，那么直角三角形ABC的面积是______平方厘米.



9. 如图已知正方形$ABCD$的面积为 35 平方厘米，E，F分别为边AB，BC上的点，AF、CE相交于点G，并且$\triangle ABF$的面积为 5 平方厘米，$\triangle BCE$的面积为 14 平方厘米，那么四边形$BEGF$的面积是______平方厘米.

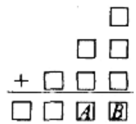


10. 把 100 个苹果分给若干个人，每人至少分一个，且每人分的数目各不相同，那么至多有______ 人.

11. 设a，b为实数，那么a^2+ab+b^2-a-2b的最小值是______.

12. 1，2，3，…，98 共 98 个自然数中，能够表示成两整数的平方差的个数是______.

13. 在右边的加法算式中，每一个□表示一个数字，任意两个数字都不相同，那么A与B乘积的最大值是______.



14. 直线AB和AC与圆O分别为相切于B，C两

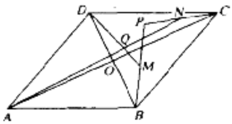
点，P为圆上一点，P到AB，AC的距离分别为4厘米，6厘米，那么P到BC的距离为______厘米．

15. 每一本书都有一个国际书号：$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J$，其中$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I$由九个数字排列而成，$J$是检查号码，令$S=10A+9B+8C+7D+6E+5F+4G+3H+2I$，$r$是$S$除以11所得的余数，若$r$不等于0或1，则按$J=11-r$．(若$r=0$，则规定$J=0$，若$r=1$，规定$J$用$x$表示)，现有一本书的书号是$962y707015$，那么$y=$________．

第二试(共70分)

1. (20分) 求所有正实数a，使得方程$x^2-ax+4a=0$仅有整数根．

2. (25分) 如图，已知P为$\square ABCD$内一点，O为AC与BD的交点，M、N分别为PB，PC的中点，Q为AN与DM的交点．求证：



(1) P，Q，O三点在一条直线上；

(2) $PQ=2OQ$．

3. (25分) 试写出5个自然数，使得其中任意两个数中的较大的一个数可以被这两个数的差整除．

1999年全国初中数学联赛试题

第一试(70分)

一、选择题（全题满分42分，每小题7分）

本题共有6个小题，每小题都给出了（A），（B），（C），（D）四个结论，其中只有一个是正确的，请把你认为正确结论的代表字母写在题后的圆括号内，每小题选对得7分，不选、错选或选出的代表字母超过一个（不论是否写在圆括号内），一律得0分．

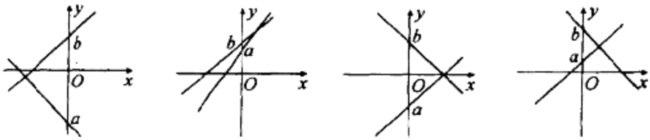
1. 计算$\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$的值是（　　）．

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2

2. $\triangle ABC$的周长是24，M是AB的中点，$MC=MA=5$，则$\triangle ABC$的面积是（　　）.

（A）12　　（B）16　　（C）24　　（D）30

3. 设$b>a$，将一次函数$y=bx+a$与$y=ax+b$的图象画在同一平面直角坐标系内，则有一组a、b的取值，使得下列4个图中的一个为正确的是（　　）.

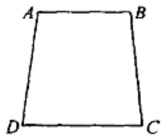


（A）　　（B）　　（C）　　（D）

4. 若函数$y=\frac{1}{2}\left(x^2-100x+196+|x^2-100x+196|\right)$，则当自变量$x$取1，2，3，…，100这100个自然数时，函数值的和是（　）.

（A）540　　（B）390　　（C）194　　（D）97

5. 如图，在等腰梯形$ABCD$中，$AB/\!/DC$，$AB=998$，$DC=1001$，$AD=1999$，点P在线段AD上，则满足条件$\angle BPC=90°$的点P的个数为（　　）.



（A）0　（B）1　（C）2　（D）不小于3的整数.

6. 有下列三个命题：

（甲）若α，β是不相等的无理数，则$\alpha\beta+\alpha-\beta$是无理数；

（乙）若α，β是不相等的无理数，则$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$是无理数；

（丙）若α，β是不相等的无理数，则$\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}$是无理数.

其中正确命题的个数是（　　）.

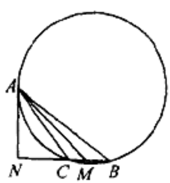
（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

二、填空题（本题满分28分，每小题7分）

本题共有4道小题，要求直接将答案写在横线上.

1. 已知$\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$且$a\neq 0$，则$\frac{b+c}{a}=$____.

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=36°$，$\angle ACB=128°$，$\angle CAB$的平分线交BC于M，$\triangle ABC$的外接圆的切线AN交BC的延长线于N，则$\triangle ANM$的最小角等于______.

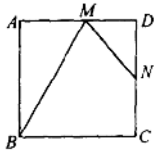


3. 已知a，b为整数，且满足

$$\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{3}.$$

则$a+b=$______.

4. 在正方形$ABCD$中，N是DC的中点，M是AD上异于D的点，且$\angle NMB=\angle MBC$，则$\operatorname{tg}\angle ABM=$______.



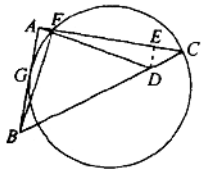
第二试

一、(本题满分20分)

某班参加一次智力竞赛，共a，b，c三题，每题或者得满分或者得0分. 其中题a题满分20分，b、c题满分分别为25分. 竞赛结果，每个学生至少答对了一题，三题全答对的有1人、答对其中两道题的有15人，答对题a的人数与答对题b的人数之和为29；答对题a的人数与答对题c的人数之和为25；答对题b的人数与答对题c的人数之和为20，问这个班的平均成绩是多少?

二、(本题满分25分)

如图，设$\triangle ABC$是直角三角形，点D在斜边BC上，$BD=4DC$，已知圆过点C且与AC相交于点F，与AB相切于AB的中点G.



求证：$AD\perp BF$.

三、(本题满分25分)

已知b，c为整数，方程$5x^2+bx+c=0$的两根都大于-1且小于0，求b和c的值.

四、(本题满分25分)

a是大于零的实数，已知存在唯一的实数k，使得关于x的二次方程

$x^2+(k^2+ak)x+1999+k^2+ak=0$

的两个根均为质数，求a的值.

2000年全国初中数学联赛试题

第一试

一、选择题（满分42分，每小题7分）

1. 计算$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$的值是（　）.

(A) 1　(B) $\sqrt{5}$　(C) $2\sqrt{5}$　(D) 5

2. 若$\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$，则$\frac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}$的值是（　）.

(A) $\frac{9}{2}$　(B) $\frac{9}{4}$　(C) 5　(D) 6

3. 设a、b是不相等的任意正数，又$x=\frac{b^2+1}{a}$，$y=\frac{a^2+1}{b}$. 则x、y这两个数一定（　）.

(A) 都不大于2　(B) 都不小于2

(C) 至少有一个大于2　(D) 至少有一个小于2

4. 正整数n小于100，并且满足等式$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=n$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数. 这样的正整数$n$有（　）个.

(A) 2　(B) 3　(C) 12　(D) 16

5. 已知一个梯形的四条边的长分别为1、2、3、4. 则此梯形的面积等于（　）.

(A) 4　(B) 6　(C) $8\sqrt{2}$　(D) $\frac{10}{3}\sqrt{2}$

6. 已知$ABCD$是一个半径为R的圆内接四边形，$AB=12$，$CD=6$，分别延长AB和DC，它们相交于P，且$BP=8$，$\angle APD=60°$. 则R等于（　）.

(A) 10　(B) $2\sqrt{21}$　(C) $12\sqrt{2}$　(D) 14

二、填空题（满分 28 分，每小题 7 分）

1. a、b是正数，并且抛物线$y=x^2+ax+2b$和$y=x^2+2bx+a$都与x轴有公共点. 则a^2+b^2的最小值是______.

2. 某果品商店进行组合销售，甲种搭配：2 千克A水果，4 千克B水果；乙种搭配：3 千克A水果，8 千克B水果，1 千克C水果；丙种搭配：2 千克A水果，6 千克B水果，1 千克C水果. 已知A水果每千克 2 元，B水果每千克 1.2 元，C水果每千克 10 元. 某天该商店销售这三种搭配共得 441.2 元，其中A水果的销售额为 116 元. 则C水果的销售额为______元.

3. 实数x、y满足$x \geqslant y \geqslant 1$和$2x^2-xy-5x+y+4=0$. 则$x+y=$______.

4. 设正$\triangle ABC$的边长为 2，M是AB边上的中点，P是BC边上的任意一点，$PA+PM$的最大值和最小值分别记为s和t. 则$s^2-t^2=$______.

第二试

三、（满分 20 分）设p是实数，二次函数$y=x^2-2px-p$的图象与x轴有两个不同的交点A（x_1，0），B（x_2，0）.

(1) 求证：$2px_1+x_2^2+3p>0$；

(2) 若A、B两点之间的距离不超过$|2p-3|$，求p的最大值.

四、（满分 25 分）如图 1，$EFGH$是正方形$ABCD$的内接四边形，$\angle BEG$与$\angle CFH$都是锐角. 已知$EG=3$，$FH=4$，四边形$EFGH$的面积为 5. 求正方形$ABCD$的面积.

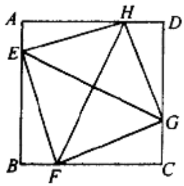


图 1

五、（满分 25 分）设关于x的二次方程$(k^2-6k+8)x^2+(2k^2-6k-4)x+k^2=4$的两根都是整数. 求满足条件的所有实数$k$的值.

2001年全国初中数学联赛试题

第一试

一、选择题（本题满分42分，每小题7分）

本题共有6小题，每题均给出了代号为A，B，C，D的四个结论，其中有且仅有一个是正确的. 将正确答案的代表字母填在题后的括号内. 每小题选对得7分；不选、选错或选出的代表字母超过一个（不论是否写在括号内），一律得0分.

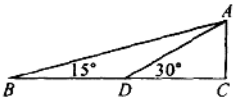
1. a，b，c为有理数，且等式$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$成立，则$2a+999b+1001c$的值是（　　）

(A) 1999　(B) 2000　(C) 2001　(D) 不能确定

2. 若$a\cdot b\neq 1$，且有$5a^2+2001a+9=0$及$9b^2+2001b+5=0$，则$\frac{a}{b}$的值是（　　）

(A) $\frac{9}{5}$　(B) $\frac{5}{9}$　(C) $-\frac{2001}{5}$　(D) $-\frac{2001}{9}$

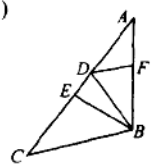
3. 已知在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=15°$，$BC=1$，则AC的长为（　　）



(A) $2+\sqrt{3}$　(B) $2-\sqrt{3}$

(C) 0.3　(D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

4. 如图，在$\triangle ABC$中，D是边AC上一点，下面四种情况中，$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$不一定成立的情况是（　　）



(A) $AD\cdot BC=AB\cdot BD$

(B) $AB^2=AD\cdot AC$

(C) $\angle ABD=\angle ACB$

(D) $AB\cdot BC=AC\cdot BD$

5. ①在实数范围内，一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根为$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

②在$\triangle ABC$中，若$AC^2+BC^2>AB^2$，则$\triangle ABC$是锐角三角形；

③在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中，a、b、c分别为$\triangle ABC$的三边，a_1、b_1、c_1分别为$\triangle A_1B_1C_1$的三边，若$a>a_1$，$b>b_1$，$c>c_1$，则$\triangle ABC$的面积$S>\triangle A_1B_1C_1$的面积S_1；

以上三个命题中，假命题的个数是（　　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6. 某商场对顾客实行优惠，规定：

①如一次购物不超过200元，则不予折扣；

②如一次购物超过200元但不超过500元的，按标价给予九折优惠；

③如一次购物超过500元的，其中500元按第②条给予优惠，超过500元的部分则给予八折优惠.

某人两次去购物，分别付款168元与423元. 如果他只去一次购买同样的商品，则应付款是（　　）

(A) 522.8元　(B) 510.4元　(C) 560.4元　(D) 472.8元

二、填空题（本题满分28分，每小题7分）

1. 已知点P在直角坐标系中的坐标为（0，1），O为坐标原点，$\angle QPO=150°$，且P到Q的距离为2，则Q的坐标为________ .

2. 已知半径分别为1和2的两个圆外切于点P，则点P到两圆外公切线的距离为______ .

3. 已知x，y是正整数，并且$xy+x+y=23$，$x^2y+xy^2=120$，则$x^2+y^2=$______ .

4. 一个正整数，若分别加上100与168，则可得到两个完全平方数. 这个正整数为______ .

第二试(A)

一、（本题满分20分）

在直角坐标系中有三点A（0，1），B（1，3），C（2，6），已知直线$y=ax+b$上横坐标为0，1，2的点分别为D，E、F.

试求a、b的值使得$AD^2+BE^2+CF^2$达到最小值.

二、（本题满分25分）

(1) 证明：若x取任意整数时，二次函数$y=ax^2+bx+c$总取整数