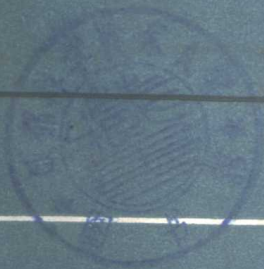


845925

# 板壳理论

黄克智等 编著



清华大学出版社

845925

3325

4448 1: 1

3325

# 板壳理论

黄克智

夏之熙

薛明德

任文敏

清华大学出版社

390

• 40

## 内 容 简 介

本书系清华大学工程力学系固体力学专业教材，它凝聚了作者多年来的教学经验并部分地反映了作者的有关科研成果。全书共分弹性平板，弹性薄壳及板壳稳定三大部分，书中系统地阐述了板壳的基本理论以及圆板、矩形板、柱壳、锥壳、球壳等典型结构的强度与稳定问题。各章附有习题及解答。

本书可作为工程力学专业本科生教材，亦可供机械，土木，能源，航空，船舶等工程专业的研究生及工程技术人员参考。

## 板 壳 理 论

黄克智 夏之熙 等

☆

清华大学出版社出版

(北京 清华园)

北京通县向阳印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/16 印张：26 字数：648千字

1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷

印数：00001~4000

统一书号：平装15235·278 定价：平装4.30元

精装15235·279 精装6.30元

## 序

目前在国内外已经有一些有关板壳理论的书籍或专著，但适合于作为工程力学专业教材的，为数还不甚多。本书是在作者1963年以后为清华大学工程力学系固体力学专业历届板壳理论课讲授的课程讲义基础上，根据多年以来的教学实践经验，不断改进而写成的。在编写过程中作者力求兼顾理论上的系统性和在几何上与物理上的直观性。

作为工程力学专业教材，本书注重基本概念、基本理论的阐述，同时也兼顾解决实际问题的方法。在第一篇弹性平板部分着重讨论了基本假设的近似性。在通常教科书的内容之外增加了用变分方法(能量原理)求解薄板弯曲问题、考虑剪切变形的板和大挠度弯曲等内容。

薄壳理论的基本关系与方程本来是很复杂的，有许多种不同的简化理论与方程。本书第二篇弹性薄壳部分用变化长度的概念和量级分析的方法来讲授各种简化理论(例如无矩理论，简单边界效应、扁壳理论、半无矩理论)。这样，可以使读者对薄壳的应力状态有一个较全面的、统一的了解，并在此基础上能够用比较简单的方法解决复杂的实际薄壳问题。在第三篇弹性薄壳稳定性的讨论中也使用了这一方法。

本书是在黄克智教授的主持下和集体讨论的基础上分工执笔写成。全书分为弹性平板、弹性薄壳与板壳理论三部分，各由薛明德、夏之熙与任文敏执笔。由于时间仓促，并限于水平，可能出现错误，欢迎读者指正。

# 目 录

## 第一篇 弹性平板

<b>第一章 薄板弯曲的基本理论</b> .....	( 1 )
§1.1 研究对象.....	( 1 )
§1.2 弹性薄板小挠度理论的基本假设.....	( 1 )
§1.3 等厚薄板弯曲的基本微分方程.....	( 5 )
§1.4 板的边界条件.....	(17)
§1.5 小挠度薄板弯曲的变分方程.....	(22)
习题.....	(35)
<b>第二章 圆柱坐标下薄板的弯曲问题</b> .....	(36)
§2.1 圆板的轴对称弯曲微分方程及解.....	(36)
§2.2 轴对称圆板的边界条件与连续条件.....	(39)
§2.3 轴对称圆板计算举例.....	(41)
§2.4 圆柱坐标下板的非轴对称弯曲问题基本方程及解.....	(54)
§2.5 非轴对称圆板(或扇形板)弯曲问题算例.....	(58)
习题.....	(65)
<b>第三章 矩形板的解法</b> .....	(69)
§3.1 四边简支矩形板的双三角级数纳维埃解.....	(69)
§3.2 对边简支矩形板的单三角级数列维解.....	(71)
§3.3 运用叠加原理解各种边缘支承情况的矩形板.....	(78)
习题.....	(81)
<b>第四章 利用能量原理解薄板弯曲问题</b> .....	(83)
§4.1 里兹法.....	(83)
§4.2 伽辽金法.....	(87)
习题.....	(88)
<b>第五章 考虑剪切变形的板的理论</b> .....	(89)
§5.1 古典薄板理论的局限性.....	(89)
§5.2 赖斯纳关于中厚板的基本假定.....	(90)
§5.3 考虑剪切变形板的基本方程与边界条件.....	(92)
§5.4 赖斯纳中厚板理论的应用.....	(100)
§5.5 赖斯纳理论的可适用性.....	(112)
<b>第六章 薄板的大挠度弯曲</b> .....	(115)
§6.1 矩形薄板大挠度弯曲的基本方程.....	(115)
§6.2 无限长薄板大挠度弯曲的精确解.....	(123)
§6.3 圆板轴对称大挠度弯曲的基本方程.....	(125)

§6.4 均布载荷作用下周边固支圆板的摄动解法 .....	(128)
-------------------------------	-------

## 第二篇 弹性薄壳

<b>第七章 弹性薄壳的一般理论</b> .....	(133)
§7.1 概论 .....	(133)
§7.2 几种承重结构形式的比较 .....	(133)
§7.3 基本概念与假设 .....	(136)
§7.4 曲面微分几何的基本知识 .....	(137)
§7.5 中面的伸长与剪切变形分量 .....	(147)
§7.6 平行曲面(等距曲面)的伸长与剪切变形分量 .....	(151)
§7.7 内力与内矩 .....	(155)
§7.8 平衡方程 .....	(157)
§7.9 薄壳的虚功原理 .....	(160)
§7.10 边界条件 .....	(171)
§7.11 中面变形的协调条件 .....	(172)
<b>第八章 无矩壳体理论</b> .....	(178)
§8.1 无矩理论的基本方程 .....	(178)
§8.2 边界条件 .....	(180)
§8.3 旋转壳的无矩理论 .....	(181)
§8.4 轴对称情况下旋转壳的无矩应力状态 .....	(183)
§8.5 轴对称情况下旋转壳的变形分量与位移间的关系 .....	(184)
§8.6 在非对称载荷作用下旋转壳的无矩理论 .....	(191)
§8.7 柱形壳体的无矩理论 .....	(195)
§8.8 无矩应力状态存在的条件 .....	(198)
<b>第九章 圆柱壳的有矩理论</b> .....	(202)
§9.1 基本微分方程 .....	(202)
§9.2 圆柱壳在对任一子午面为对称情况下的有矩理论 .....	(203)
§9.3 在边缘载荷作用下圆柱壳的边界效应 .....	(210)
§9.4 承受均匀内压的圆柱形容器 .....	(218)
<b>第十章 旋转壳轴对称情况的有矩理论</b> .....	(227)
§10.1 基本微分方程 .....	(227)
§10.2 基本方程的解法 .....	(228)
§10.3 球壳的精确解 .....	(232)
§10.4 旋转壳的近似解法 .....	(236)
§10.5 轴对称旋转壳边界条件与连续条件的简化 .....	(245)
§10.6 改进的近似解法 .....	(258)
<b>第十一章 薄壳基本方程的简化</b> .....	(270)
§11.1 基本方程汇录 .....	(270)
§11.2 无矩理论的基本方程 .....	(271)

§11.3	扁壳应力状态的基本方程	(272)
§11.4	扁壳方程应用举例	(276)
§11.5	简单边界效应基本方程	(284)
§11.6	任意截面闭口中长柱壳的半无矩理论	(296)

### 第三篇 板 壳 稳 定

<b>第十二章</b>	<b>弹性薄板的稳定性</b>	(313)
§12.1	弹性系统平衡稳定性的基本概念	(313)
§12.2	用静力平衡法求解板的稳定性	(323)
§12.3	用能量法求解矩形板的稳定性	(334)
§12.4	四边简支单向轴压矩形板的过屈曲变形	(341)
<b>第十三章</b>	<b>弹性薄壳的稳定性</b>	(345)
§13.1	弹性薄壳稳定性的基本方程	(345)
§13.2	圆柱壳失稳时的应力状态	(351)
§13.3	两端简支圆柱壳液压失稳的渐近解	(357)
§13.4	圆柱壳的扭转失稳	(367)
§13.5	圆柱壳的轴压失稳	(371)
§13.6	圆锥壳的失稳	(379)
§13.7	球壳的失稳	(386)
<b>附录</b>	<b>习题答案</b>	(390)

# 第一篇 弹性平板

## 第一章 薄板弯曲的基本理论

### §1.1 研究对象

由两个平行平面(称为表面)和垂直于表面的柱面所限制的物体,当表面间的距离远小于表面本身的尺寸(长度、宽度或直径)时,称为薄板,表面间的距离称为板的厚度,用 $h$ 表示,与两表面等距离的平面称为中面,若中面的特征尺寸(例如直径、边长)为 $l$ ,则当 $h/l \ll 1$ 时称为薄板,否则称为厚板。对于一般的计算精度要求, $h/l$ 不超过大约 $1/5$ 时,可以按薄板计算<sup>①</sup>。

薄板所受的外力可以有三种情况:1.外力为作用于中面内的面内载荷。2.外力为垂直于中面的侧向载荷。3.面内载荷与侧向载荷共同作用。第一种情况是典型的弹性力学平面应力问题。第二种情况是薄板弯曲问题。关于第三种情况,当中面力较大时,应考虑它对板的弯曲的影响,如果中面力是压缩力,应考虑板的稳定问题。本部分只研究薄板弯曲问题,即认为薄板只受侧向载荷。

板在侧向载荷作用下,将产生弯曲变形,一般说来,板的中面将被弯曲为一不可展曲面,因而使中面发生变形,产生附加的中面内的薄膜应力。当板的最大弯曲挠度 $w$ 远小于板的厚度 $h$ 时,板中面内的薄膜应力将远小于板的弯曲应力,可以忽略不计,这类问题称为薄板小挠度问题。而当板的挠度与板厚为同一数量级时,在推导板的微分方程时就必须考虑附加的薄膜应力,位移与变形之间的关系也不用小位移理论的线性关系,而要采用非线性关系,得到非线性方程,这是板的大挠度问题。如果板非常薄,板的挠度远大于板的厚度,由于板变形后中面弯曲成曲面,使外载主要由板的薄膜力所平衡,而板的抗弯曲能力可以忽略不计,则问题演变为弹性薄膜问题。本部分主要研究弹性薄板小挠度理论。在第五章中,将介绍适用于中厚板的考虑剪切变形的理论。在第六章中,将介绍薄板大挠度理论。

### §1.2 弹性薄板小挠度理论的基本假设

若取薄板中面为 $z=0$ 的坐标平面。一般来说,在板的中面内,可采用平面正交曲线坐标 $\alpha_1, \alpha_2$ 。坐标轴 $z$ 垂直于中面,并规定向上为正。 $\alpha_1, \alpha_2, z$ 为右手系,即如设 $\alpha_1, \alpha_2, z$ 方向各有单位矢量 $e_1, e_2, k$ ,则 $e_1 \times e_2 = k$ ,如图1.1所示。设 $\alpha_1, \alpha_2, z$ 坐标轴的拉梅(Lame')参数为 $A_1, A_2$ ,及 $A_3=1$ 。通常对于矩形板,可采用笛卡尔坐标系,即 $\alpha_1=x, \alpha_2=y, A_1=A_2=1$ 。对于圆板或扇形板,可采用圆柱坐标系,即 $\alpha_1=r, \alpha_2=\theta, A_1=1, A_2=r$ 。板沿 $\alpha_1, \alpha_2$ 及 $-z$ 方向的位移分别为 $u_1, u_2, w$ ,也就是说, $w$ 向下为正。

<sup>①</sup> 以后将证明,运用薄板理论所得计算结果误差是 $(h/l)^2$ 的数量级。



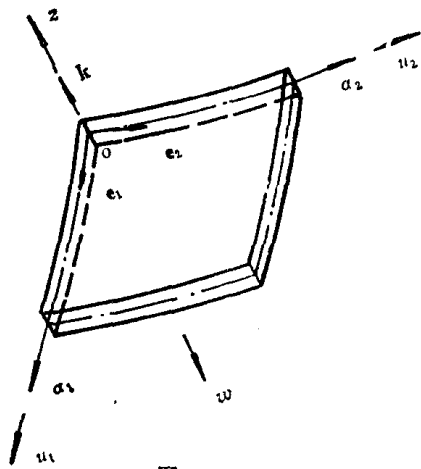


图 1.1

在介绍关于薄板的基本假设以前，我们先引进数量级(简称量级)的概念。对于一个定义在  $a \leq \xi \leq b$  区间上的函数  $f(\xi)$ ，量级是表示这个函数数值大小的总体概念。一个量级很大的函数，其数值在个别的点可以很小，甚至等于零。通常函数  $f(\xi)$  在其变化区间  $(a, b)$  中如果不是保持不变，也不是在区间局部急剧变化，则函数  $f(\xi)$  对  $\xi$  的导数  $f'(\xi)$  的量级应该是

$$f'(\xi) \sim \frac{f(\xi)}{b-a} \quad (1.2.1)$$

这里及以后，用“ $\sim$ ”表示量级相同的关系。对于量级不同的量，则用“ $\gg$ ”表示“远大于”；用“ $\ll$ ”表示“远小于”。

薄板弯曲问题，作为一个弹性力学问题，必须满足三维弹性力学的基本方程。这些方程<sup>①</sup>包括：

### 1. 平衡方程

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial(A_2 \sigma_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \tau_{12})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_1 A_2 \tau_{1z})}{\partial z} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \tau_{21} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_2 \right] = 0$$

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial(A_2 \tau_{21})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \sigma_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_1 A_2 \tau_{2z})}{\partial z} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \tau_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_1 \right] = 0$$

(1.2.2a-c)

$$\frac{1}{A_1 A_2} \left[ \frac{\partial(A_2 \tau_{z1})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 \tau_{z2})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_1 A_2 \sigma_z)}{\partial z} \right] = 0$$

### 2. 变形几何关系

$$\epsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_2$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} u_1$$

$$\epsilon_z = -\frac{\partial w}{\partial z}$$

(1.2.3a-f)

$$\gamma_{1z} = \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{u_1}{A_1} \right) + \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{u_2}{A_2} \right)$$

$$\gamma_{1z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}$$

$$\gamma_{2z} = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$$

<sup>①</sup> 这些式子的来源可参考一般的弹性力学教科书，例如：武际可、王敏中：弹性力学引论，北京大学出版社，1981。

3. 弹性关系(材料各向同性), 或称物理关系

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_z)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2)$$

$$\gamma_{12} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{12} \quad (1.2.4a-f)$$

$$\gamma_{1z} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{1z}$$

$$\gamma_{2z} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{2z}$$

式中  $E$  为杨氏模量,  $\mu$  为波桑比。

对于  $h/l \ll 1$  的薄板, 克希霍夫作了以下的假设, 通常称为克希霍夫-勒夫(Kirchhoff-Love)假设。

1. 平行于板中面的各层互不挤压, 即

$$\sigma_z = 0 \quad (1.2.5)$$

对于这个假设应该从量级的关系来理解。我们以  $\sigma$  表示平行于板中面的应力分量  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\tau_{12}$  的量级。

$$\sigma_1 \sim \sigma_2 \sim \tau_{12} \sim \sigma$$

以  $\tau$  表示横剪应力分量  $\tau_{1z}$ 、 $\tau_{2z}$  的量级。

$$\tau_{1z} \sim \tau_{2z} \sim \tau$$

而  $\sigma_z$  的量级仍记作  $\sigma_z$ , 利用(1.2.1)可得对于板中任一场函数  $f(\alpha_1, \alpha_2, z)$  的偏导数的量级估计:

$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} \sim \frac{1}{A_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \sim \frac{f}{l}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \sim \frac{f}{h} \quad (1.2.6)$$

这里  $f(\alpha_1, \alpha_2, z)$  可以是位移、应变或应力分量等。

把量级估计(1.2.6)式用于三个平衡方程(1.2.2a-c), 可以得到量级关系:

$$\frac{\sigma}{l} \sim \frac{\tau}{h}, \quad \frac{\tau}{l} \sim \frac{\sigma_z}{h}$$

因此

$$\tau \sim \sigma \frac{h}{l}$$

$$(1.2.7a, b)$$

$$\sigma_z \sim \tau \frac{h}{l} \sim \sigma \left(\frac{h}{l}\right)^2$$

克希霍夫-勒夫假设(1.2.5)式的意义应理解为(1.2.7b)式, 即  $\sigma_z \ll \sigma$ , 相对于  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ ,

可以忽略 $\sigma_z$ ，相对误差为 $(h/l)^2$ 量级。

2. 直法线假设：变形前垂直于中面的直线段，在变形后仍保持是直线，并仍垂直于变形后的中面，即

$$\gamma_{1z} = \gamma_{2z} = 0 \quad (1.2.8)$$

对这个假设也应该从量级的关系来理解。以 $\epsilon$ 表示平板平行于中面的应变分量 $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_2$ 、 $\gamma_{12}$ 的量级， $\gamma$ 表示横向剪应变 $\gamma_{1z}$ 、 $\gamma_{2z}$ 的量级。由弹性关系(1.2.4)的(a)，(b)，(d)式，有量级关系

$$\epsilon \sim \frac{1}{E} \sigma \quad (1.2.9)$$

而由弹性关系(1.2.4)的(e)，(f)式，则有量级关系①

$$\gamma \sim \frac{1}{E} \tau \quad (1.2.10)$$

设平行于平板中面的位移 $u_1$ 、 $u_2$ 的量级为 $u$ ，将量级估计(1.2.6)式用于几何关系(1.2.3)的(a)，(b)，(d)式，得到：

$$\epsilon \sim \frac{u}{l} \quad (1.2.11)$$

现在我们来分析横剪几何关系(1.2.3e, f)式，左端的量级为 $\gamma$ ；利用(1.2.7a)式与(1.2.10)式，

$$\text{左端} \sim \gamma \sim \frac{1}{E} \sigma \frac{h}{l} \quad (1.2.12)$$

而(1.2.3e, f)式右端第一项 $\partial u_1 / \partial z$ 与 $\partial u_2 / \partial z$ 的量级则为 $u/h$ 。利用(1.2.9)与(1.2.11)式，

$$\text{右端第一项} \sim \frac{u}{h} \sim \epsilon \frac{l}{h} \sim \frac{1}{E} \sigma \frac{l}{h} \quad (1.2.13)$$

比较(1.2.12)与(1.2.13)式，可见它们在量级上相差 $(l/h)^2$ 倍。因此，为了使(1.2.3e, f)式成立，右端的第二项必须与第一项属于同一量级，即

$$\text{右端第二项} \sim \frac{w}{l} \sim \frac{1}{E} \sigma \frac{l}{h} \quad (1.2.14)$$

由此可见，横剪几何关系(1.2.3e, f)式左端比右端的每一项都要小得多。因此式左端的 $\gamma_{1z}$ 与 $\gamma_{2z}$ 可以略去。略去后，横剪几何关系(1.2.3e, f)式成为

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \quad (1.2.15a, b)$$

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}$$

因此直法线假设(1.2.8)式的含义就是在横剪几何关系(1.2.3e, f)中可以略去横剪应变 $\gamma_{1z}$ 、 $\gamma_{2z}$ ，相对误差为 $(h/l)^2$ 。

① 对于各向同性材料剪切模量 $G = E/2(1+\mu)$ 与 $E$ 属同一量级，对于有的材料(例如夹层板)垂直于板中面的各面内剪切模量 $G_{1z}$ 、 $G_{2z}$ 的量级比 $E$ 小，则(1.2.10)式的估计不正确，对于此种板，不能采用克希霍夫-勒夫假设。

3. 挠度  $w(\alpha_1, \alpha_2, z)$  沿着板厚度的变化可以略去, 因而可以认为在同一厚度各点的挠度都等于中面的挠度, 记作

$$w(\alpha_1, \alpha_2, z) = w(\alpha_1, \alpha_2, 0) = w(\alpha_1, \alpha_2) \quad (1.2.16)$$

实际上可以根据  $\epsilon_z$  对  $z$  的积分来计算  $w(\alpha_1, \alpha_2, z)$ 。由 (1.2.4c) 式计算  $\epsilon_z$  代入 (1.2.3c) 式得

$$- [w(\alpha_1, \alpha_2, z) - w(\alpha_1, \alpha_2, 0)] = \int_0^z \epsilon_z dz = -\frac{\mu}{E} \int_0^z (\sigma_1 + \sigma_2) dz \quad (1.2.17)$$

利用 (1.2.14) 与 (1.2.17) 式, 可知

$$w(\alpha_1, \alpha_2, z) - w(\alpha_1, \alpha_2, 0) \sim w \left( \frac{h}{l} \right)^2 \quad (1.2.18)$$

因此, 挠度沿板厚的差, 相对于挠度自身可以略去, 相对误差为  $(h/l)^2$ , 这就是假定 (1.2.16) 式的含义所在。

4. 中面内无伸缩和剪切变形, 即

$$u_1(\alpha_1, \alpha_2, 0) = u_2(\alpha_1, \alpha_2, 0) = 0 \quad (1.2.19)$$

在中面内的点只有沿中面法线方向的挠度  $w$ 。由于挠度  $w$  使中面变成曲面, 中面的伸长应变量为

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \sim \frac{w^2}{l^2} \quad (1.2.20)$$

以后将看到 (见 (1.3.2) 式), 平板弯曲造成的应变量为

$$z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sim \dots \sim h \frac{w}{l^2} \quad (1.2.21)$$

因此板中面应变远小于板的弯曲应变的条件为

$$\frac{w^2}{l^2} \ll h \frac{w}{l^2} \quad \text{即 } w \ll h \quad (1.2.22)$$

当挠度  $w$  比板厚  $h$  小得多时, 可以采用小挠度理论, 否则, 当挠度与板厚属同一量级 ( $w \sim h$ ) 时, 必须采用大挠度理论 (见第六章)。

## §1.3 等厚薄板弯曲的基本微分方程

### 一、笛卡儿坐标系中薄板弯曲微分方程的建立

在图 1.2 所示笛卡儿坐标系中, 用“位移法”建立板的弯曲微分方程。即以中面挠度  $w(x, y)$  (沿坐标  $z$  轴的反方向为正) 作为基本未知量, 首先建立变形的几何关系, 将沿  $x, y$  方向的位移  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$  及各应变分量均以  $w(x, y)$  表示, 然后运用应力应变的物理关系将各应力分量及板的各内力素以  $w(x, y)$  表示; 最后建立以  $w(x, y)$  表示的力的平衡方程。

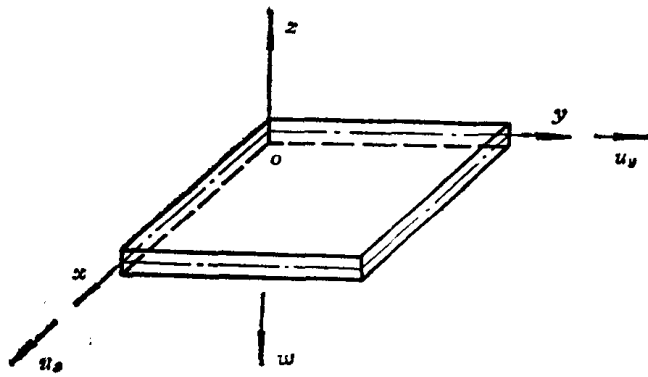


图 1.2

### 1. 变形的几何关系

由上节基本假设(1.2.8)即(1.2.15)式, 在笛卡儿坐标系中

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

考虑到基本假设(1.2.16), (1.2.19)式, 将上式积分

$$u_x = z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.3.1a, b)$$

$$u_y = z \frac{\partial w}{\partial y}$$

将上式代入几何关系(1.2.3)(a)(b)与(d)式, 并令  $A_1 = A_2 = 1$ , 得:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.3.2a-c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

上式中, 定义曲率变形分量

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.3.3a-c)$$

$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

则

$$\varepsilon_x = -z \kappa_x$$

$$\varepsilon_y = -z \kappa_y \quad (1.3.4a-c)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \kappa_{xy}$$

$\kappa_x$ 、 $\kappa_y$ 、 $\kappa_{xy}$ 可理解为“广义变形”。

### 2. 物理关系

根据第一章(1.2.4)(a), (b)与(d)式, 由(1.2.5)即(1.2.7b)式, 在计算变形时略去 $\sigma_z$ ,

则

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$$

解上述方程式并将(1.3.2), (1.3.4)式代入, 得到应力

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} (\kappa_x + \mu\kappa_y) \quad (1.3.5a-c)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} (\kappa_y + \mu\kappa_x)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{Ez}{1+\mu} \kappa_{xy}$$

上式显示出正应力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ , 剪应力  $\tau_{xy}$  均沿板厚呈线性分布, 如图 1.3 所示。研究以  $x$ 、 $x+dx$  及  $y$ 、 $y+dy$  四个坐标面所截出的板微元体, 作用在微元体侧面上的弯矩与扭矩 (简化到中面上)

$$M_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D(\kappa_x + \mu\kappa_y)$$

$$M_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D(\kappa_y + \mu\kappa_x) \quad (1.3.6a-c)$$

$$M_{xy} = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D(1-\mu)\kappa_{xy}$$

上式中

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1.3.7)$$

称为板的弯曲刚度。  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{xy}$  是作用在中面上每单位长度的弯矩与扭矩, 其量纲是 [力·长度/长度]。此外, 还有作用在  $x$ 、 $x+dx$  面的剪应力  $\tau_{xz}$  及作用在  $y$ 、 $y+dy$  面的剪应力  $\tau_{yz}$ , 它们分别构成了剪力  $Q_x$ 、 $Q_y$ :

$$Q_x = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad (1.3.8)$$

$$Q_y = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz$$

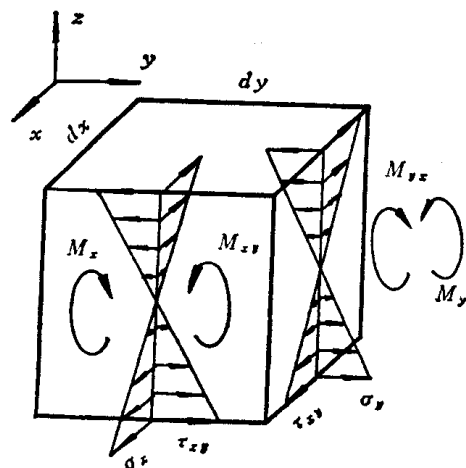


图 1.3

$Q_x$ 、 $Q_y$  是作用在单位长度板截面上的横向剪力 (简称横剪力或剪力), 其量纲是 [力/长度]。

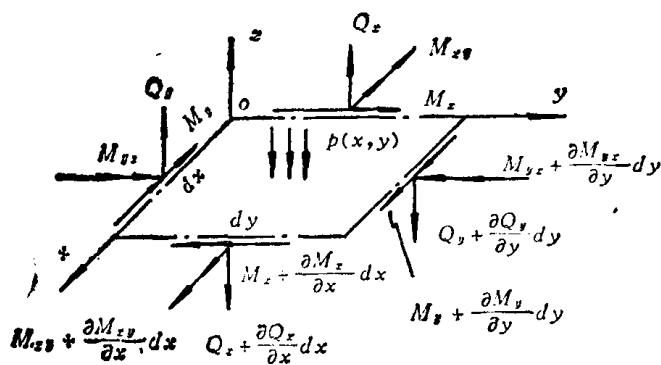


图 1.4

弯矩、扭矩、剪力的正方向规定如图 1.4 所示。图中弯矩、扭矩按右手定则用双箭头矢量表示。

### 3. 力的平衡方程

研究如图 1.3 所示微元体的平衡，微元体各侧面上的内力素及所受外载荷如图 1.4 所示。微元体的三个平衡方程  $\Sigma X=0$ ,  $\Sigma Y=0$  及  $\Sigma(M)_z=0$  恒被满足，其余三个平衡方程为

$$\Sigma Z=0 \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0 \quad (1.3.9)$$

$$\Sigma(M)_x=0 \quad Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad (1.3.10a, b)$$

$$\Sigma(M)_y=0 \quad Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0$$

(1.3.10a, b) 式可写作

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (1.3.11a, b)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

### 4. 弯曲微分方程的建立

将(1.3.11)式代入(1.3.9)式，得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad (1.3.12)$$

将(1.3.6)式代入上式，得到以中面挠度  $w(x, y)$  表示的弯曲微分方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (1.3.13)$$

或可表达为

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p(x, y)}{D} \quad (1.3.14)$$

式中  $\nabla^2$  为拉普拉斯算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.3.15)$$

将(1.3.6)式代入(1.3.11)式，可得  $Q_x$ 、 $Q_y$  通过中面挠度  $w(x, y)$  的表达式

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w) \quad (1.3.16)$$

### 5. 应力的表达式

解微分方程(1.3.13), 可以求得中面挠度  $w(x, y)$ , 再代入(1.3.6)、(1.3.16)式, 可以分别求得板的弯曲内力素  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_{xy}$ 、 $Q_x$ 、 $Q_y$ 。

利用(1.3.5)–(1.3.7)式, 板中三个主要应力成分  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{M_x}{h^3/12} z & (\sigma_x)_{z=\pm \frac{h}{2}} &= \mp \frac{6M_x}{h^2} \\ \sigma_y &= -\frac{M_y}{h^3/12} z & (\sigma_y)_{z=\pm \frac{h}{2}} &= \mp \frac{6M_y}{h^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{M_{xy}}{h^3/12} z & (\tau_{xy})_{z=\pm \frac{h}{2}} &= \mp \frac{6M_{xy}}{h^2} \end{aligned} \quad (1.3.17a-f)$$

较次要的应力成分  $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\sigma_z$  可以由平衡方程及(1.3.17)式求得。由三维弹性力学平衡方程(设体积力为零)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3.18a-c)$$

可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= -\left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

将(1.3.17)式及板的内力素平衡方程(1.3.11)式依次代入上式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{z}{h^3/12} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = \frac{z}{h^3/12} Q_x \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \frac{z}{h^3/12} \left( \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) = \frac{z}{h^3/12} Q_y \end{aligned}$$

积分上式, 并设在板的表面无剪切力作用, 利用边界条件  $(\tau_{xz})_{z=\pm \frac{h}{2}} = (\tau_{yz})_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0$  得到  $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yz}$  的表达式



$$\tau_{xz} = -\frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (1.3.19a, b)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2} \frac{Q_y}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

$\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yz}$  呈抛物线分布；在中面处绝对值最大

$$(\tau_{xz})_{z=0} = -\frac{3}{2} \frac{Q_x}{h} \quad (1.3.20a, b)$$

$$(\tau_{yz})_{z=0} = -\frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}$$

利用平衡方程(1.3.18c)及(1.3.19)式，可以求得 $\sigma_z$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{3}{2} \frac{1}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)$$

利用(1.3.9)式，上式可写作

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{3}{2} \frac{1}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) p(x, y)$$

积分上式，并假定  $p(x, y)$  作用于上表面  $z = \frac{h}{2}$ ，而下表面为自由，利用边界条件  $(\sigma_z)_{z=-\frac{h}{2}} = 0$ ，得到

$$\sigma_z = -\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{2z}{h}\right)^3\right] p(x, y) \quad (1.3.21)$$

在  $z = h/2$  处， $\sigma_z$  绝对值最大

$$(\sigma_z)_{z=\frac{h}{2}} = -p(x, y) \quad (1.3.22)$$

## 二、平面正交曲线坐标系中的薄板弯曲微分方程

平面正交曲线坐标系中(图 1.1)薄板的挠曲面微分方程，可以用与前节类似的方法得到。

### 1. 变形的几何关系

根据直法线假设(1.2.8)式，有(1.2.15)式，板平面内的位移  $u_1$ 、 $u_2$  可以用板的挠度  $w$  表示

$$A_1 u_1 = \int \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} dz$$

$$A_2 u_2 = \int \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} dz$$

又根据基本假定，板的挠度  $w$  与  $z$  无关[(1.2.16)式]且中面的面内位移为零[(1.2.19)式]，故