上册

高等数学辅导

王 文 编

中国矿业大学出版社

高等数学辅导

（上　册）

王　文　　编

中国矿业大学出版社

责任编辑 马跃龙

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导/王文编. —徐州:中国矿业大学出版社,2001.7

ISBN 7-81070-387-0

Ⅰ.专... Ⅱ.王... Ⅲ.高等数学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.O

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 046795 号

中国矿业大学出版社出版发行

(江苏徐州 邮政编码 221008)

出版人 解京选

铜山教育印刷厂印刷 新华书店经销

开本 787×1092 1/32 印张 19.25 字数 414 千字

2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

印数 1～4200 册 总定价 22.00 元(上、下册)

前　言

高等数学是高等工程专科学校各专业的一门重要的理论基础课，相当一部分学生在学习中有一定的困难，而学生又很难找到一本适用的高等数学专科教学辅导教材，为了帮助学生理解基本概念，纠正解题错误，掌握解题方法，提高解题能力，我们特编写了这本高等数学学习辅导。希望本书能为读者学习高等数学起到排忧解难的作用，成为读者的良师益友。

本书是结合高等数学专科教材而编写的辅导材料，是供学生在学习过程中参考的。全书分上、下册，上册内容有：函数、极限、连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用。共六章。每章分内容提要，概念题解答，错解分析和例题分析四部分。第一部分说明本章的学习内容，系统地给出了基本概念的定义、定理和常用公式，便于学生复习巩固已学内容；第二部分对概念上易发生混淆的有关问题及概念的应用题作了解答，以帮助学生加强对概念的正确理解和应用；第三部分对学生在学习高等数学中经常出现的错误解法进行了剖析，分析错误原因，给出正确解答，从正、反两方面

帮助学生深入理解基本概念，提高学生判断、分析问题的能力；第四部分为本书的重点，按照高等数学专科辅导课的要求汇编了各种题型。通过对典型例题解题方法和技巧的分析、总结，便于学生在课外阅读研究，帮助学生掌握解题方法，提高解题能力。其中对许多题目还给出了多种解法，以开拓思路。此外还有少量较难题目，以便学有余力者进一步提高。本书中打 * 号的内容是相应于教材中选学内容的辅导材料。

本书主要供高等工程专科学校的师生使用，也可供电大、夜大、自学考试、职工大学各种大专院校的学生使用。

限于编者的水平，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

彭城大学　王文

1998 年 12 月 30 日

目　录

第一章　函数　极限　连续

一、内容提要

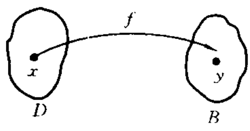
(一) 函数

1. 函数的定义

设 D 为一个非空实数集合，若存在确定的对应法则 f，使得对于数集 D 中的任意一个数 x，按照 f 都有惟一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在集合 D 上的函数，记为 $y = f(x), x \in D$。其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，所有对应的函数值所成的集合称为函数的值域，记为 B。

即 $B = \{y | y = f(x), x \in D\}$。

图示：



2. 两个函数相等

如果两个函数的定义域和对应法则都分别相同，我们称这两个函数相等(两函数相等与自变量及因变量用什么字母表示无关)。

3. 函数的性质

(1) 奇偶性

定义:设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数,如果有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数。

图形:定义域关于原点对称,图形关于 y 轴成轴对称图形称偶函数,图形关于原点成中心对称图形称奇函数。

(2) 周期性

定义:设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,若存在正数 T,使得对于一切实数 x,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为周期函数。其中最小的正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期,简称周期。

图形:以 T 为周期的周期函数 $y=f(x)$ 的图形特点是在 x 轴上间隔长度 T,重复出现这一周期内的图形。

(3) 单调性

定义:设 x_1 和 x_2 为区间 (a,b) 内的任意两个数。若当 $x_1<x_2$ 时,函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x_1)<f(x_2)$,则称该函数在区间 (a,b) 内单调增加,或称递增;若当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称该函数在区间 (a,b) 内单调减少,或称递减。

图形:当 x 在区间 (a,b) 自左向右变化时,如果函数图形向右上方延伸,则函数 $f(x)$ 在该区间递增;如果函数图形向右下方延伸,则函数 $f(x)$ 在该区间递减。

(4) 有界性

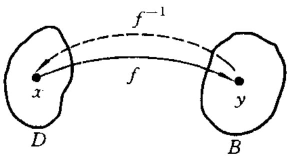
定义:设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在一个正数 M,当 $x\in I$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称 $f(x)$ 为在 I 上的有界函数;如果不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的无界函数。

图形：如果在区间 I 上，存在直线 $y=M$ 与 $y=-M$，使得 $f(x)$ 在区间 I 上的图形夹在这两条直线之间，则称 $f(x)$ 为在 I 上的有界函数；如果不存在这样的两条直线，则称函数 $f(x)$ 为在 I 上的无界函数。

4. 反函数

(1) 定义：设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数，其值域为 B，若对于数集 B 中的每个数 y，数集 D 中都有惟一的一个数 x，使 $f(x)=y$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数。这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。其定义域为 B，值域为 D。为了照顾习惯，我们将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示。

(2) 图示：

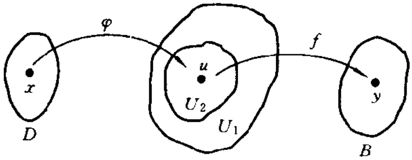


(3) 图形：函数 $y=f(x)$ 的图形和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称。

5. 复合函数

(1) 定义：若函数 $y=f(u)$，定义域为 U_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$。

(2) 图示：



6. 分段函数

(1) 定义：在定义域的不同范围具有不同表达式的函数叫做分段函数。

(2) 两个重要的分段函数：符号函数 $y = \mathrm{sgn}x(-\infty < x < +\infty)$；取整函数 $y = [x],(-\infty < x < +\infty)$。

7. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等五类函数统称为基本初等函数。

8. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合构成，并且可以用一个数学式子表示的函数，叫做初等函数。

(二) 极限

1. 数列极限

(1) 直观定义：如果当 n 无限增大时，u_n 无限趋向于惟一的常数 A，则称常数 A 为当 $n \to \infty$ 时数列 $\{u_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$ 或 $u_n \to A(n \to \infty)$。

(2) $\varepsilon-N$ 定义：设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A，若对于任意给定的正数 ε，总存在一个自然数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立，则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限，或称数列收敛于 A。

(3) 几何意义：当 $n > N$ 时，u_n 都在 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 内，即都聚集在点 A 的近旁。

(4) 定理：收敛的数列一定有界。

2. 函数极限($x \to x_0$ 时)

(1) 直观定义：如果当 x 趋向于 x_0 时，函数值 $f(x)$ 无限趋向于惟一的常数 A，则称常数 A 为当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的

极限，记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0)$。

(2) ε—δ 定义：若对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于 x_0 时的极限，或者说函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限为 A。

(3) 几何意义：当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x)$ 的图形在 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ 所形成的横条区域内。

(4) 单侧极限：若 x 小于 x_0 而趋向于 x_0（记为 $x \to x_0^-$）时 $f(x)$ 趋向于数 A，则称 A 为当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$。若 x 大于 x_0 而趋向 x_0（记为 $x \to x_0^+$）时，$f(x)$ 趋向于数 A，则称 A 为当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$。左极限和右极限统称为单侧极限。

(5) 极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限都存在并且相等，即 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$。

3. 函数极限（$x \to \infty$ 时）

(1) 直观定义：如果当 $|x|$ 无限增大时，函数值 $f(x)$ 无限趋向于惟一的常数 A，则称常数 A 为当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$。

(2) ε—X 定义：若对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 X，当 $|x| > X$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 x 趋向于无穷大时的极限。

(3) 几何意义：当 $|x| > X$ 时，$f(x)$ 的图形位于 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ 之间。

(4) 单侧极限：若 x 无限地增大或无限地减少，即表示 x 沿着 Ox 轴无限地向右移动，或无限地向左移动时，函数值 $f(x)$ 无限趋向于惟一的常数 A，这时分别记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$。

4. 重要定理

(1) 存在准则

准则 Ⅰ 单调有界数列必有极限。

准则 Ⅱ（夹逼定理）若当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 或 $|x| > M(M > 0)$ 时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$。

(2) 有界性定理：若 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时函数 $f(x)$ 的极限存在，则存在 $\delta > 0$（或 $R > 0$），使得 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内（或 $N(0,R)$ 之外）有界。

5. 极限的运算法则

(1) 四则运算：如果 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$，则

$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) + \lim g(x) = A \pm B$；

$\lim[f(x) g(x)] = \lim f(x) \lim g(x) = AB$；

$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$。

(2) $\lim cf(x) = c \lim f(x)$，c 为常数。

(3) 若 $\lim f(x) = A$，且 m 为自然数，

则 $\lim[f(x)]^m = [\lim f(x)]^m = A^m$。

(4) 设函数 $y = f[\varphi(x)]$ 由函数 $y = f(u), u = \varphi(x)$ 复合而成。若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$，且 x_0 的一个邻域内（除 x_0 外）$\varphi(x) \neq u_0$ 又有 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$。

(5) 设函数 $u(x)$,$v(x)$ 在 x_0 的某邻域(或 $|x|>M$,$M>0$ 时),满足 $u(x)\leqslant v(x)$ 或 $u(x)<v(x)$(x_0 可以除外),若 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时它们的极限都存在,则 $\lim u(x)\leqslant\lim v(x)$。

6. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$。

(三) 无穷大与无穷小

1. 无穷大定义

如果在 x 的某种趋向下,函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称 $f(x)$ 为 x 的这种趋向下的无穷大。

2. 无穷小

(1) 无穷小定义:若函数 $\alpha=\alpha(x)$ 在 x 的某种趋向下以零为极限,则称函数 $\alpha=\alpha(x)$ 为 x 的这种趋向下的无穷小。

(2) 无穷小比较

设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是在 x 的同一趋向下($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$) 的无穷小,如果

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\begin{cases}0,\text{则称 }\alpha(x)\text{ 是比 }\beta(x)\text{ 高价的无穷小,记作 }\alpha(x)=o(\beta(x))。\\ \infty,\text{则称 }\alpha(x)\text{ 是比 }\beta(x)\text{ 低价的无穷小。}\\ C\neq 0,\text{则称 }\alpha(x)\text{ 与 }\beta(x)\text{ 是同价的无穷小。}\\ 1,\text{则称 }\alpha(x)\text{ 与 }\beta(x)\text{ 是等价的无穷小,记作 }\alpha(x)\sim\beta(x)。\end{cases}$$

(3) 无穷小运算

有限个无穷小的代数和仍是无穷小。

有界函数(或常数) 与无穷小的积仍是无穷小。

有限个无穷小的积仍是无穷小。

(4) 重要定理

极限与无穷小的关系：若函数 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的极限为 A，则：$f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha=\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的无穷小。反之，若上式成立，则 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时的极限为 A。

无穷大与无穷小的关系：无穷小(除零外) 与无穷大互为倒数关系。

等价无穷小的性质：若 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，且 $\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在(或无穷大量)，则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在(或无穷大量)，并且 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$(或 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$)。

(5) 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，注意：如果当 $x\to 0$ 时，$\varphi(x)\to 0$，将以上各式中的 x 换成 $\varphi(x)$ 仍成立。

(四) 连续

1. 点连续

(1) 定义1：若① 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

(2) 定义2：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义，如果当自变量 x 在 x_0 处的增量 $\triangle x$ 趋向于零时，相应的函数值的增量 $\triangle y$ 也趋向于零，即 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\triangle y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续。

(3) 几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续的几何意义是，函数 $y=f(x)$ 的图形在点 $(x_0,f(x_0))$ 处不断开。

(4) 左连续和右连续：若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则分别称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是左连续和右连续。

(5) 结论：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$。

2. 区间连续

(1) 开区间连续：若函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的各点均连续，则称该函数在开区间 I 内连续。

(2) 闭区间连续：若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，并且在左端点 a 为右连续，在右端点 b 为左连续，则称 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续。

(3) 几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 连续的几何意义是，函数 $y=f(x)$ 的图形在 (a,b) 内连绵不断。

3. 间断点

(1) 定义：如果函数 $y=f(x)$ 有下列三种情况之一：

① 在点 x_0 的附近有定义，但在点 x_0 处没有定义；

② 虽在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

③ 虽在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$；

那么，函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处不连续，称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的间断点。

(2) 分类

① 第一类间断点：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 都存在，但 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。它包括可去间断点与跳跃间断点。

可去间断点：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$，但 $f(x)$ 在点 x_0 无定义或 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$。

跳跃间断点：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$。

② 第二类间断点：$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 至少有一个不存在。

4. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值和最小值定理：若函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则

① 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ_1，使得对于任何 $x \in [a, b]$，恒有 $f(\xi_1) \geqslant f(x)$。

② 在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ_2，使得对于任何 $x \in [a, b]$，恒有 $f(\xi_2) \leqslant f(x)$。

(2) 介值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 内能取得介于其最小值和最大值之间的任何数。

(3) 零点定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则至少存在一个 $c \in (a,b)$，使得 $f(c) = 0$。

5. 初等函数的连续性

(1) 结论：一切初等函数在其定义区间内是连续的。

(2) 应用：如果 $f(x)$ 是初等函数，且在 x_0 处有定义，那末，求极限值 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 就等于求函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$。