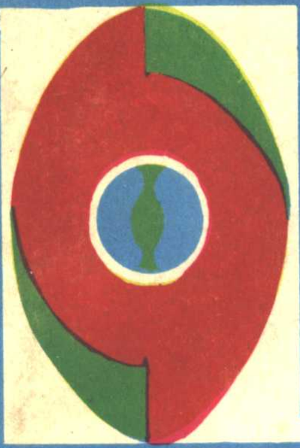

M.B.克拉夫佐夫著

粒状物料水力学

咸阳非金属矿研究所

粒状物料水力学

〔苏〕M.B.克拉夫佐夫 著

孙玉波 朱灏波 译

咸阳非金属矿研究所

译 者 的 话

本书是苏联两相流水力学的最新著作。前两章主要从理论上研究了单个颗粒和固-液悬浮体的运动规律。第三、四章论述了悬浮体的过滤、固体粒状物料的压力输送、明渠输送、液固分离技术和水电站及灌溉系统沉降池的设计等问题。书中提供了不少经验和半经验公式，可用在给排水工程及各种水利工程的计算中。全书既有理论研究，又注意了解决生产实际问题，对在给排水工程、水利工程，以及化工、冶金、煤炭、石油等各部门从事研究、设计工作的技术人员和相应专业的大专院校学生具有广泛的实用价值。

本书第一章由孙玉波教授译出，其余章节由朱瀛波译出，並做了互校。但由于我们水平有限，译文中错误或不当之处在所难免，敬请读者给予批评指正。

本书在编辑、出版过程中，承蒙《国外非金属矿》编辑部全体同志的大力协助，借此深表感谢。

一九八七年五月

前　言

有许多问题的求解同多相系统的形成和破坏有关。多项系统由连续介质和包括一种或多种组分的分散相组成。如果连续介质是水，那么分散相可以是固体颗粒、气泡，或者是不与水相溶的液滴。

解决有关粒状物料在液体介质中的运动，以及液体在多孔介质中的运动问题，对于计算悬浮体的沉降、粒状物料层的悬浮、在堆实的颗粒介质中过滤液体，以及在水力输送等过程中均有重要意义。这些过程要在各种各样的沉降池，带悬浮层（沸腾层、流态化层）的装置，过滤机和多孔介质过滤装置，水力输送装置等设备中实现。它们在化工、供水、排水和水力工程中有着广泛的应用。当然，只能在对设备、装置和构筑物中发生的颗粒层的沉降、悬浮，粒状材料的过滤及输送等过程的一般规律有所了解的基础上，才能进行可靠的运算。尽管随着广泛的物理和技术新领域中大量问题的出现，使人们对多相系统（主要是两相系统）中各组分的相互作用问题的兴趣越来越浓，但至今尚未查明有关它们的一般规律性。这些课题的解决与一个共同的问题——液体介质同分散相相互作用的水力阻力有联系。伽利略和牛顿最早研

目　　录

第 一 章

单个颗粒在静止的粘性介质中的自由沉降

1.1 固体颗粒的匀速沉降

在重力作用下，物体在粘性介质中的自由沉降运动微分方程式可以写成：

$$m\frac{dv}{dt}=G-P_A-F \tag{1.1}$$

式中 m、$\frac{dv}{dt}$ —— 物体的质量和加速度；$G=mg$ ——重力（g——重力加速度）；$P_A=m'g$——阿基米德浮力（m'——与固体同体积介质的质量）；F——介质阻力。

当$F=0$时，物体的自由沉降问题已被伽里略最先解决了。当$F\neq0$时，物体在粘性介质中的自由沉降问题至今还未最后解决，求解方程式（1.1）的困难在于未能给出阻力F的通用表达式。

马里奥特（Мариотт）早在十七世纪中叶就提出了在液体介质中阻力对物体的沉降速度产生影响这一明确、基本的概念〔1〕。但是，只是到了十七世纪末和十八世纪初，牛顿对介质阻力进行了理论研究之后，才成为以后阐述这一问题的立足点。

解决物体在介质中运动的阻力问题，是从研究球体在液体中的运动开始的，原因是球体形状的对称性可使问题简化。目前，

球体阻力F的表达式写成下面的形式：

$$F=\psi\frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{\rho v^2}{2} \tag{1.2}$$

式中 ψ——阻力系数；d和v——球体的直径和运动速度；ρ——介质密度。

在匀速沉降的情况下存在着$F=\frac{1}{6}\pi d^3\Delta\rho g$的关系，由此得：

$$v=\sqrt{\frac{4d\Delta\rho g}{3\psi\rho}} \tag{1.3}$$

式中 $\Delta=\frac{\rho_T-\rho}{\rho}$——相对密度差；$\rho_T$——固体密度（译者注）。

从牛顿时期到现在，寻找阻力系数ψ的表达式是流体力学中最重要的课题之一。目前，在理论和实验研究的基础上已经确切得出：

$$\psi=f(\mathrm{Re}) \tag{1.4}$$

式中 $\mathrm{Re}=vd\rho/\mu$——雷诺数（μ——介质动力粘滞系数）。牛顿认为[2]：在液体介质中，球体运动受到的阻力一部分由液体的粘着产生，一部分由摩擦产生，一部分由液体的密度产生。液体的粘着所产生的阻力是恒定的，它的作用与时间的增加成正比；由摩擦产生的阻力与速度的一次方成正比；由液体的密度产生的阻力与速度的二次方成正比。由液体质点摩擦产生的阻力，牛顿给出了如下公式：

$$F=\pm\mu S\frac{dU}{dn} \tag{1.5}$$

式中 S——摩擦面积；dU/dn——在运动方向法线上的速度梯

度。

此后，牛顿又研究了单摆在空气和液体中的摆动，所得出的结论认为：介质作用在运动物体上的阻力可用下面公式表示〔1〕：

$$F = av + bv^{1.5} + cv^2 \tag{1.6}$$

式中 a、b、c ——在一定的条件下为常数；v ——单摆的摆动速度。

公式（1.6）长期以来没有用于阻力的计算，原因之一是，按牛顿的观点，前面两项占总阻力的比率很小，可以忽略不计。应予指出，目前利用这个公式计算阻力问题时，常被称作阻力的三项式定律。

这样一来，按牛顿的观点，阻力即应取决于（1.6）式的最后一项，並由液体的密度所引起。牛顿进而认为，与液体密度有关的阻力，一部分来自液体质点间相互作用的离心力和向心力，一部分来自物体与大量介质碰撞和反弹产生的力。该阻力与速度的平方、颗粒线性长度的平方和介质的密度成正比，即：

$$F = C_{\text{д}} \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\rho v^2}{2} \tag{1.7}$$

按照牛顿的逻辑推论，$C_{\text{д}}=0.5$，而根据球体在水中自由沉降速度的测定则得到$C_{\text{д}}=0.44$。

1803年，库伦根据自己的试验提出，与惯性阻力存在的同时，还存在摩擦阻力。惯性阻力与速度的平方成正比，摩擦阻力与速度的一次方成正比。按库伦的观点，阻力可用下面公式计算：

$$F = av + cv^2 \tag{1.8}$$

在公式（1.8）中，第一项取决于摩擦力，第二项取决于惯性

力。库伦同时还认为，当速度很小时，第一项起主要作用，它的值在阻力公式中占优势；当速度很大时，第一项与第二项相比，显得微不足道。因此总的阻力可用第二项来表示。需要指出的是，公式（1.8）在形式上是“标准”的二项式。人们在不同时期曾提出过大量的二项式公式，但它们之中没有一个能得到广泛应用。原因是这些公式计算的结果与在大范围改变速度后的实验结果不相一致。

库伦的结论在液体阻力学说的发展中起了重要作用。从那时起，人们认为摩擦力是阻力的可测部分，甚至出现了所谓的“摩擦理论”，它把所有液体的阻力都归结为由摩擦引起。

由纳维（Навь）和斯托克斯（Стокс）在十九世纪中叶提出的非压缩粘滞性流体运动微分方程式，是液体阻力学说历史的最重要阶段。在这以前，由于阿基米德（Архимед）、牛顿、帕斯卡（Паскаль）和其他学者的创造性劳动，为计算液体的各种作用力奠定了基础。根据达朗贝尔（Д'Аламбер）原则，如果施于系统中每一质点上的力最终成为惯性力的话，那么，在某瞬间内可以认为该系统是处于平衡状态，並可用静态方程表示。因此，如果非压缩粘性液体方程是对单位体积而言，那么它可以用矢量式表示为：

$$\rho\frac{dv}{dt}=f-\operatorname{grad}P+\mu\Delta v \tag{1.9}$$

公式左边是惯性力，右边是作用于液体质点上的合力。其中f——体积力（如重力）；grad$P$——压力梯度；$\mu\cdot\Delta v$——粘性阻力，它可按牛顿的剪切应力分布特性学说计算。

在每一瞬时，空间每一点上液体的运动状态都可以用四个量

的综合值来描述——液体速度 v 的三个分量和压力 P。所以，对公式（1.9）必须补充以连续性方程，它表征液体的不可压缩性和流动的连续性。

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{1.10}$$

方程式（1.9）和(1.10)被称做非压缩粘性液体的纳维－斯托克斯方程。在稳定流动条件下，纳维－斯托克斯方程在直角坐标系中，具有下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
& v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \\
& = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x \\
& v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = \\
& = Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y \\
& v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\
& = Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z \\
& \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

[1]

[1]译者注：按纳维－斯托克斯方程式原形，(1.11)式上三式的左侧，尚应含时变加速度，即分别加上 $\frac{\partial v_x}{\partial t}$、$\frac{\partial v_y}{\partial t}$、$\frac{\partial v_z}{\partial t}$。

方程（1.11）是非线性微分方程。因此，现时还得不到通解。只有忽略个别项，並将方程式线性化时，才能得到部分近似解。

斯托克斯在研究半径为r_0的球体在粘性液体中以等速 v 作直线运动引起的流体流动变化问题时认为，它与粘性液体从无穷远处、以大小和方向都不变的速度 v_∞、绕流半径为 r_0 球体的问题是等同的。斯托克斯进一步设想，如果在一定的液体中，球体的运动速度非常小或球体的半径很小，那么在不计外力的情况下，还可将基本运动方程式（1.11）中的惯性项忽略不计，也就是忽略前三个方程左侧所有的项，这时即得到下列方程组：

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial p}{\partial x}=\mu\Delta v_x \quad \dfrac{\partial p}{\partial y}=\mu\Delta v_y \quad \dfrac{\partial p}{\partial z}=\mu\Delta v_z \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=0\end{array}\right\} \tag{1.12}$$

在确定边界条件时，可以认为液体完全附着在球体表面上。对于静止不动的球体，当球的中心位于坐标原点时，粘性介质绕流球体将有下列的边界条件，即在$r=r_0$时：

$$v_x=v_y=v_z=0 \tag{1.13}$$

式中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

此外，还可认为，在无穷远处，液流的运动方向与OX轴的正方向平行。此时在无穷远处的边界条件可写成：当$r\to\infty$时，

$$v_x\to v_\infty,\ v_y\to 0,\ v_z\to 0 \tag{1.14}$$

有了边界条件（1.13）和（1.14），就可以解方程组（1.12）。这时，阻力系数ψ 的计算公式具有如下形式：

$$\psi=24/Re \tag{1.15}$$

把公式（1.15）代入到（1.2）和（1.3）式中，得到计算球体匀速沉降的阻力和速度公式：

$$F = 3\pi\mu d v \tag{1.16}$$

$$v = \frac{d^2\Delta\rho g}{18\mu} \tag{1.17}$$

一般认为，推导斯托克斯公式（1.15）所作的假设是正确的，公式（1.16）和（1.17）在小雷诺数时也是适用的。这里应该指出：有人认为，在有些场合下，斯托克斯公式在$Re\leqslant 1$时适用；还有人认为，在另一些场合下$Re\leqslant 0.1$时适用。不过依我们看来，这些说法并不全面。

现在回过头来看推导斯托克斯公式时所作的假设。十分清楚，无论雷诺数怎样小，方程组（1.11）左边的各惯性力项都不会等于零，它们只在雷诺数趋于零时接近于零。所以，更确切地说，当雷诺数趋于零时，阻力的大小才接近于按斯托克斯公式计算的值。但是，从某种小雷诺数开始我们便已无法测量出惯性力所引起的阻力分数值。即便求得某一雷诺数，在该值下阻力的测量值与按斯托克斯公式计算值之间的差别不明显，也还会与测量的精度有关。看来还不如把测量得到的球体在液体中的沉降阻力与按斯托克斯公式（1.16）计算得到的数值加以比较，从而确定出斯托克斯公式的使用范围。在很多情况下人们正是这样做的。

最早开始对斯托克斯公式进行检验是在1910年〔5〕。这些检验的精确度不高，其结果也相互矛盾。类似的检验现在还在进行。有关对斯托克斯公式进行试验检验结果的评述已在著作〔6〕中给出。从中可以看出，根据试验结果（图1，2）要对斯托克斯公式的准确性作出结论是困难的。依我们看来，它的原因首先是没有对

试验测定的精确度进行分析；其次是以液体质点完全附着在球体表面上的假设作根据，一般来说也是不行的。

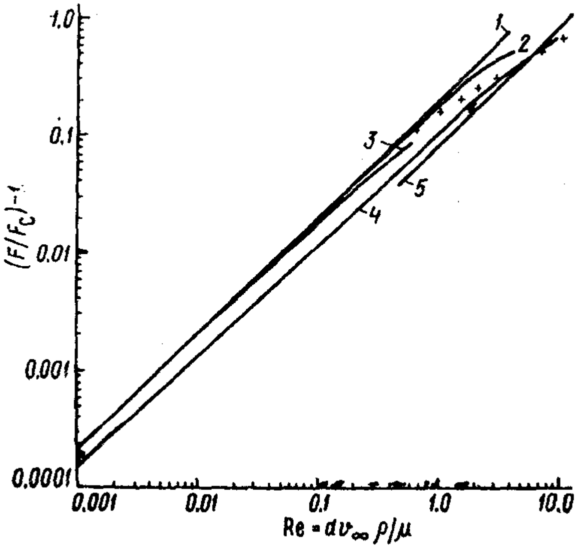

图 1　阻力的实验值和计算值比较〔6〕

1—奥辛；2—查姆；3—戴维斯；4—克拉齐科；5—卡里耶尔

问题在于，为了用斯托克斯公式（1.16）计算阻力，必须知道粘滞系数的绝对值，而粘滞系数值又只有在假定液体质点完全附着在限定液流的固体表面上时，利用斯托克斯公式求解才能测定。亦即首先用斯托克斯公式计算液体的动力粘滞系数值，然后再检验公式本身的正确性。如果试验时的雷诺数正好就是测定液体粘滞系数时的雷诺数，则计算值和试验值应当是吻合的。总而言之，大量的试验研究结果表明，斯托克斯理论公式的应用范围是很有限的。

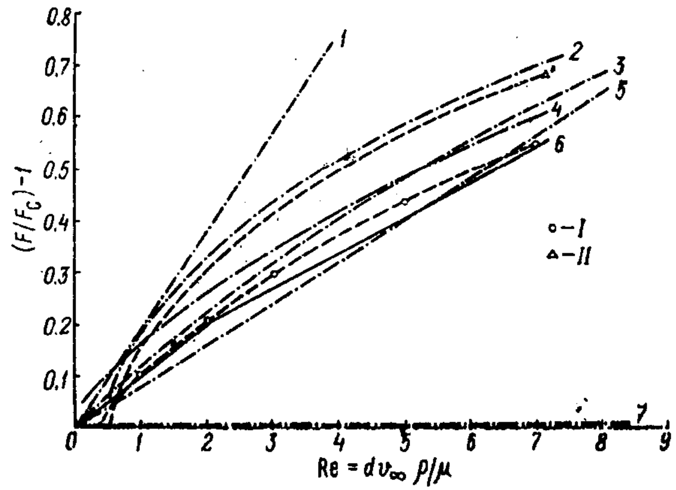

图2　阻力的实验值和计算值比较〔6〕

I—别里；II—加淡列曼；1—奥辛；2—查姆；3—戴维斯；4—克拉齐科；5—卡里耶尔；6—普鲁巴克尔；7—斯托克斯

奥辛（Осеен，1913年）在着手解决球体在粘性介质中的运动问题时，其做法与斯托克斯稍有不同〔4，7〕。他提出，仅把惯性项中最重要的部分保留在运动方程式中，而将其余各项舍去。如果认为绕流于固定球体的液体在无穷远处流速为v_∞，流动的方向平行于OX轴，那么，在距球体稍远的地方，斯托克斯公式的解就不会令人满意。

在距球体稍远的点具有下列条件：

$$v_x = v_\infty + v'_x \quad v_y = v'_y \quad v_z = v'_z \tag{1.18}$$

式中　v'_x、v'_y、v'_z是一些很小的、可以忽略的量。

如果把v'_x、v'_y、v'_z和惯性项看作是一级微分项，那么方程

式(1.9)和(1.11)左侧的各惯性项与 $v_\infty\frac{\partial v_x}{\partial x}$、$v_\infty\frac{\partial v_y}{\partial x}$ 和 $v_\infty\frac{\partial v_z}{\partial x}$ 的不同之处就在于，在(1.9)和(1.11)中存在着二级微分项。因此，如果用下面的方程式来代替方程组(1.11)，则在离开球体稍远处的液体流动（或者说，球体以相当的雷诺数在液体中运动时），可以得到好得多的近似解。

$$\left.\begin{aligned} v_\infty\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta v \\ \operatorname{div}v &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

(1.13)、(1.14)式同样应是满足方程组(1.19)解的边界条件。方程组(1.19)由此可以求解〔7〕。並给出计算阻力系数的公式如下：

$$\psi=\frac{24}{Re}+C_д\,(C_д=4.5) \tag{1.20}$$

方程(1.20)也被称为奥辛定律，也是在对纳维－斯托克斯方程求近似解中得出的〔7〕。

应当指出，对于直接靠近球体的局部液体，用 $v_\infty\frac{\partial v_x}{\partial x}$、$v_\infty\frac{\partial v_y}{\partial x}$ 和 $v_\infty\frac{\partial v_z}{\partial x}$ 代替公式(1.11)中的惯性项，並不比用零来代替好多少。因为在该局部区域内，液体的 v_x、v_y 和 v_z 很小（在紧贴球体的表面上，v_x、v_y、和 v_z 为零），而且与 v_∞ 相比，我们也可忽略 v'_x 这一微小值因素。归根结底，在低雷诺数范围内，不论是整个惯性项，还是在我们予以变换了的方程中的惯性项，与粘性阻力项相比都是很小的。因此，对于靠近球体的那部分液体，方程组(1.19)和斯托克斯方程组(1.12)都同样较好地近似于微分方程组(1.11)。

在(1.20)式中，第一项即是斯托克斯定律(1.15)，第二

项则是牛顿定律（1.7）中$C_д$的一般形式（牛顿定律中$C_д=0.5$，奥辛定律中$C_д=4.5$）。这里很容易看出，当雷诺数趋于很小时，公式（1.20）将变成斯托克斯公式；当雷诺数增大时，公式(1.20)又将变成牛顿公式。公式（1.20）中的常数值$C_д$增大，与奥辛推导公式时所作的假设有关。如果奥辛公式中的$C_д$值不取4.5，而象牛顿公式那样取0.5，那么，可以看出，在球体的运动速度很低时，在符合斯托克斯定律的情况下，奥辛公式给出的计算结果也会符合实际。同样，在球体运动速度很大，可用牛顿公式计算的情况下，奥辛公式也适用。与实验结果偏差较大的仅仅是在中间雷诺数范围。对此看来可以这样解释：在规定边界条件（1.18）时，应当注意到这样一个事实，即v'_x是从球体表面上的零不断增加到距球体无穷远处的v_∞，而v'_y和v'_z则是由球体表面上的零到距球体无穷远处又变成零。在这两个极端状态之间则存在着最大值。所以存在着一个中间状态，在这个中间状态，就不能忽略v'_x、v'_y和v'_z，这就是边界层的范围。在边界层中粘滞阻力和惯性阻力具有相同的数量级。

普朗特（Прандтль）的研究对进一步发展液体阻力学说有很大的意义。斯托克斯和奥辛理论的主要缺陷是，在粘性液体运动微分方程组中断然舍去了惯性项。很明显，只有查明实际情况，才能决定哪些项要舍去，这也正是普朗特在1904年所提出的研究方法〔8〕。

普朗特注意到，球体在粘性介质中运动时，它的表面上附着一个液体层，在附着层中的各个液体质点的运动速度从球体表面上的最大值减小到无穷远处的零。他还指出，在距球体表面不远处，液体质点的运动速度就接近于零。把液体质点的运动速度