

///

线性代数

高等学校理工及经管类专业基础课教材

XIAN XING DAI SHU

线性代数

吴天毅 王玉杰 邱玉文 编著

南开大学出版社

线 性 代 数

吴天毅 王玉杰 邱玉文 编著

南开大学出版社
天 津

内 容 提 要

本书是根据高等院校线性代数课程教学的基本要求撰写而成.全书共分七章,主要讲述了线性代数的基本内容,包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换等.

本书深入浅出,重点突出,难点分散,通俗易懂,适于普通高等学校本科各专业学生作为教材使用,也可供科技工作者阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 吴天毅, 王玉杰, 邱玉文编著. — 天津:
南开大学出版社, 2003. 2
ISBN 7-310-01845-1

I. 线... II. ①吴... ②王... ③邱... III. 线性代
数—高等学校—教材 IV. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 092358 号

出版发行 南开大学出版社

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮编:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542

邮购部电话:(022)23502200

出版人 肖占鹏

承 印 河北昌黎人民胶印厂印刷

经 销 全国各地新华书店

版 次 2003 年 2 月第 1 版

印 次 2003 年 2 月第 1 次印刷

开 本 880mm×1230mm 1/32

印 张 7.625

字 数 214 千字

印 数 1—8000

定 价 18.00 元

前 言

线性代数是普通高等院校理工类和经管类相关专业的一门重要基础课。本书是依据高等院校线性代数课程教学的基本要求撰写而成，可作为普通高校理工类和经管类相关专业线性代数课程的教学用书。

本书的撰写突出了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，特别遵循由浅入深，由具体到抽象，由特殊到一般的原则，突出重点，分散难点。配以较多的例题，使读者能较好地理解和掌握线性代数的基本内容、基本理论和基本方法，学会用线性代数的理论和方法解决实际问题。

作者吴天毅、王玉杰、邱玉文长期从事线性代数课程的教学工作，并对新形势下线性代数课程的发展、知识结构的优化、教学内容的改革都有过深入的研究，本书是他们经验的积累和研究的成果。全书由吴天毅教授主编并负责统筹定稿，其中第一章由吴天毅执笔，第二、三、四章由邱玉文执笔，第五、六、七章由王玉杰执笔。另外，在本书的完成过程中也得到了天津科技大学基础科学系领导的大力支持和数学教研室各位老师的热情帮助，许多同仁对本书的撰写也提出了一些宝贵的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢。

编者

2002 年 11 月

目 录

第一章 行列式	(1)
§ 1.1 行列式的定义	(1)
一、二阶和三阶行列式	(1)
二、逆序数与对换	(4)
三、 n 阶行列式的定义	(5)
§ 1.2 行列式的性质	(7)
§ 1.3 行列式的展开	(13)
§ 1.4 克莱姆法则	(19)
习题一	(23)
第二章 矩阵	(26)
§ 2.1 矩阵的概念	(26)
一、矩阵的定义	(26)
二、一些特殊的矩阵	(27)
三、矩阵应用实例	(28)
§ 2.2 矩阵的运算	(30)
一、矩阵的线性运算	(30)
二、矩阵的乘法运算	(31)
三、矩阵的转置	(34)
四、对称矩阵和反对称矩阵	(35)
§ 2.3 方阵的行列式与逆矩阵	(36)
一、方阵的行列式	(36)
二、逆矩阵	(37)
§ 2.4 矩阵分块法	(43)
一、分块矩阵的概念	(43)
二、分块矩阵的运算	(44)

习题二	(49)
第三章 矩阵的初等变换与线性方程组	(54)
§ 3.1 初等变换	(54)
§ 3.2 初等矩阵	(57)
§ 3.3 矩阵的秩	(63)
§ 3.4 n 维向量	(67)
一、向量	(67)
二、向量的线性运算	(68)
§ 3.5 线性方程组的解法	(69)
一、线性方程组的一般概念	(69)
二、线性方程组有解的充分必要条件	(71)
三、线性方程组的解法	(73)
四、齐次线性方程组	(78)
习题三	(82)
第四章 向量组的线性相关性	(86)
§ 4.1 向量的线性表示与等价	(86)
一、向量的线性表示	(86)
二、向量组的等价	(89)
§ 4.2 向量组的线性相关性	(91)
§ 4.3 向量组的秩	(95)
§ 4.4 向量空间	(100)
一、向量空间定义	(100)
二、基和维数	(101)
§ 4.5 线性方程组解的结构	(102)
一、齐次线性方程组解的结构	(103)
二、非齐次线性方程组解的结构	(107)
§ 4.6 向量的内积与正交化方法	(109)
一、向量的内积	(109)
二、向量的正交化方法	(110)
三、正交矩阵	(113)

习题四	(115)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(121)
§ 5.1 矩阵的特征值与特征向量	(121)
§ 5.2 相似矩阵	(128)
一、相似矩阵	(128)
二、矩阵的对角化	(131)
§ 5.3 实对称矩阵的对角化	(136)
一、实对称矩阵的特征值与特征向量	(137)
二、实对称矩阵的对角化	(140)
习题五	(145)
第六章 二次型	(149)
§ 6.1 二次型及其矩阵表示	(149)
§ 6.2 二次型的标准形与惯性定律	(151)
一、线性变换	(151)
二、矩阵的合同	(152)
三、二次型的标准形与惯性定律	(153)
§ 6.3 化二次型为标准形的几种方法	(157)
一、正交变换法	(157)
二、拉格朗日配方法	(161)
三、初等变换法	(163)
§ 6.4 二次型的分类	(168)
一、二次型的分类	(168)
二、二次型和实对称矩阵的正定性	(168)
习题六	(177)
* 第七章 线性空间与线性变换	(180)
§ 7.1 线性空间的定义及其性质	(180)
§ 7.2 基、维数与坐标	(184)
§ 7.3 基变换与坐标变换	(192)
§ 7.4 线性子空间	(196)
§ 7.5 线性空间的同构	(198)

§ 7.6 线性变换的定义及其性质	(202)
§ 7.7 线性变换的矩阵	(206)
习题七.....	(213)
附录 习题参考答案.....	(219)

第一章 行列式

行列式在线性代数中是一个基本工具,研究许多问题都需用到它.本章在二阶、三阶行列式定义的基础上,介绍了 n 阶行列式的定义、性质及行列式按行(列)展开;并介绍了利用行列式求解线性方程组的克莱姆法则.

§ 1.1 行列式的定义

一、二阶和三阶行列式

行列式是由解线性方程组的公式解引出来的,因此先讨论二元和三元线性方程组的公式解,并由此给出二阶和三阶行列式的定义.

设二元线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

利用加减消元法容易求出方程组(1)的解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得.为了便于记忆,引入二阶行列式的概念.

将四个数排成两行两列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3)$$

称式(3)左边为二阶行列式,右边的式子为二阶行列式的展开式. 数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素,其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示该元素位于第 i 行,第二个下标 j 表示该元素位于第 j 列.

由式(3)可知,二阶行列式的计算满足对角线法则,即:主对角线(自左上至右下)上元素之积减去副对角线(自右上至左下)上元素之积. 二阶行列式的计算结果是一个数.

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组(1)的解可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad (4)$$

注 D 是用方程组(1)的系数所确定的二阶行列式,一般称 D 为方程组的系数行列式. D_1 是用方程组(1)的常数项 b_1, b_2 代替 D 中第1列元素所得的二阶行列式, D_2 是用方程组(1)的常数项 b_1, b_2 代替 D 中第2列元素所得的二阶行列式.

类似地,对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (5)$$

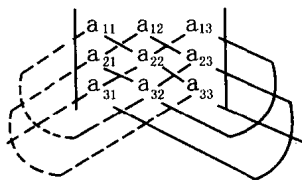
利用加减消元法也可得到它的求解公式,但要记住这个求解公式是很困难的. 为了便于记忆,引入三阶行列式的概念.

将九个数排成三行三列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (6)$$

称式(6)左边为三阶行列式,右边的式子为三阶行列式的展开式.

由式(6)右边的式子可知,三阶行列式的展开式中共有 6 项,这 6 项的确定可按下面图示的对角线法则进行,即:三阶行列式的展开式为下面图中实线上三个元素的乘积(3 项)减去虚线上三个元素的乘积(3 项).



例 1 计算三阶行列式
$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \times 0 \times 5 + 4 \times 1 \times 7 + 2 \times 9 \times 6 - 7 \times 0 \times 2 - 9 \times 1 \times (-1) - 5 \times 4 \times 6$$

$$= 25$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则三元一次方程组(5)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (D \neq 0 \text{ 时})$$

注 类似地,也可引入四阶及四阶以上的行列式,但这些行列式的

展开不适用于对角线规则,需从其他方面给出其定义.

二、逆序数与对换

定义 1 将 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 按某种次序排成一排,称其为这 n 个数的一个全排列,简称为排列. 如果这 n 个数按自然数次序由小到大进行排列,则称其为标准排列.

定义 2 在 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 的一个全排列中,若两个数的前后次序和标准排列不一致,则称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总的个数称为这个排列的逆序数,记为 t .

例 2 求排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中

3 在首位,逆序数为 0;

2 的前面只有一个 3 比 2 大,故逆序数为 1;

5 的前面的数都小于 5,故逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个,故逆序数为 3;

4 的前面比 4 大的数有一个,故逆序数为 1.

于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$$

定义 3 如果一个排列的逆序数是奇(偶)数,那么称这个排列为奇(偶)排列.

定义 4 在一个排列中,任意对调两个元素,其余元素不动,这一过程称为对换. 相邻两个元素的对换称为相邻对换.

定理 1 一个排列进行奇数次对换,排列改变奇偶性;进行偶数次对换,排列奇偶性不变.

证 设 a, b 是一个排列中的两个数

(1)若 a 与 b 是相邻的两个数,对换 a 与 b 后,只有 a 与 b 之间的逆序发生了变化,因此对换 a 与 b 后的排列的逆序数与原排列的逆序数相差 1,从而改变了排列的奇偶性. 由此可推知:一个排列进行奇数次相邻对换,排列改变奇偶性;进行偶数次相邻对换,排列不改变奇偶性.

(2)若 a 在 b 之前 i 位,只要将 a 向后进行 i 次相邻对换,再将 b 向前进行 $i-1$ 次相邻对换,就达到了将 a 与 b 对换. 此过程共进行了 $2i-1$ 次相邻对换,由(1)可知该排列对换 a 与 b 后改变了奇偶性.

由(1)(2)可知对换一次排列改变奇偶性,由此即可推知定理结论的正确性.

如果定义标准排列为偶排列,则可由定理 1 得到下面推论.

推论 奇(偶)排列经过奇(偶)数次对换可成为标准排列.

三、 n 阶行列式的定义

利用逆序数的概念,二阶和三阶行列式的定义还可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \quad (7)$$

其中 $p_1 p_2$ 是 $1, 2$ 的排列, t 是该排列的逆序数, $\sum$ 表示对 $1, 2$ 的所有排列(共 $2!$ 个)求和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \quad (8)$$

其中 $p_1 p_2 p_3$ 是 $1, 2, 3$ 的排列, t 是该排列的逆序数, $\sum$ 表示对 $1, 2, 3$ 所有排列(共 $3!$ 个)求和.

类似二阶和三阶行列式的定义,可定义出 n 阶行列式.

定义 5 将 n^2 个数排成 n 行 n 列,记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (9)$$

其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列, t 是该排列的逆序数, $\sum$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 所有排列(共 $n!$ 个)求和. 称式(9)左边为 n 阶行列式, 式(9)右边为 n 阶行列式的展开式, 称 a_{ij} ($i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n$) 为 n 阶行列式的元素.

注 n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项, 其中每一项都是位于不同

行不同列的 n 个元素的乘积. n 阶行列式可简记为 $|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$.

注 不要将一阶行列式 $|a|=a$ 与绝对值符号相混淆.

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} \quad (10)$$

其中 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列, τ 是该排列的逆序数, $\sum$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 所有排列 (共 $n!$ 个) 求和.

证 在式 (9) 中, 将排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 对换成标准排列, 此时 $a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 就对换成 $a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$. 由定理的推论可知排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 具有相同的奇偶性, 从而有

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

其中 t 是排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数, τ 是排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数. 又由于排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 一一对应, 所以得到

$$\sum (-1)^{\tau} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (11)$$

式 (11) 即说明式 (10) 成立.

注 定义 5 中式 (9) 与定理 2 中式 (10) 的区别是: 前者是以行为标准次序来确定每项中的 n 个元素, 后者是以列为标准次序来确定每项中的 n 个元素.

按照定义 5 的式 (9) 及定理 2 的式 (10) 容易计算出下面几个特殊行列式.

1. 对角行列式 (未写出的元素均为零)

$$(1) \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (12)$$

$$(2) \begin{vmatrix} & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ \lambda_n & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \quad (13)$$

2. 三角行列式(未写出的元素均为零)

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (14)$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \quad (15)$$

$$(3) \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \\ a_{11} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2\ n-1} \cdots a_{n1} \quad (16)$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\ n-1} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2\ n-1} \cdots a_{n1} \quad (17)$$

注 除一些特殊行列式外,一般行列式按其定义计算是非常繁杂困难的,因此实际计算行列式并不常用其定义提供的方法.

§ 1.2 行列式的性质

为进一步讨论 n 阶行列式,简化 n 阶行列式的计算,下面介绍 n 阶行列式的一些基本性质.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^T 是将行列式 D 的行、列互换后得到的行列式. 行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D^T$

证 记 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 按定义 5 有

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} \\ = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

又由定理 2 知

$$D = \sum (-1)^\tau a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$$

故

$$D^T = D$$

注 性质 1 表明, 行列式中的行与列具有同等的地位, 从而可知: 行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立, 反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

证 互换行列式 D 的第 i 行和第 j 行, 所得行列式记为 D_1 , 即

$$D = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

由行列式定义

$$D = \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n}$$

其中 t 是排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数, 如果将该排列的第 i 个元素和第 j 个元素对换, 则排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数 $\tau = t \pm 1$, 故

$(-1)^i = -(-1)^r$. 从而有

$$D = - \sum (-1)^r a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = -D_1$$

性质 3 行列式某一行(列)的公因子可以提出来. 即

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \quad (18)$$

证 由行列式的定义

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} &= \sum (-1)^i a_{1p_1} \cdots (ka_{ip_i}) \cdots a_{np_n} \\ &= k \sum (-1)^i a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} = k \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

注 此性质也可叙述为:用数 k 乘以行列式等于用数 k 乘以行列式某一行(列)的所有元素.

性质 4 行列式中有两行(列)元素对应相等时,该行列式等于零.

证 将行列式中相同的两行(列)进行交换,则行列式还是原先的行列式. 可由性质 2 知, $D = -D$, 故 $D = 0$.

由性质 3 和性质 4 可得到下面推论:

推论 行列式中有两行(列)元素对应成比例时,该行列式等于零.

性质 5 行列式具有分行(列)相加性. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$