1980——1986

历届高考入学试题分析

数学分册

北京科学技术出版社

1980—1986

历届高考入学试题分析

（数学分册）

李渤梁　俞绍康　周去难　刘保麟　编

北 京 科 学 技 术 出 版 社

编 者 的 话

近年来，随着教育改革的深入发展，高考入学考试也有很大变化。主要表现在：考试的目的更加明确，是为了选拔富有创造性的，全面发展的“智能型”人才；试题更具有科学性，灵活性和综合性。这种变化不仅有力地推动了各科教学的发展，也极大地调动了学生学习的积极性。然而，也有一些教师和学生，面对这种改革感到茫然和不能适应。为此，我们编写了这套丛书。目的在于帮助读者，尤其是应届毕业生，了解这种变化，认识这种变化，并在这一基础上对学生学习加以指导。

这套丛书包括高考入学考试各科试题分类分析八种。编写体例均按各科知识结构，对一九八〇年以来历届高考试题加以分类汇编，同时选择典型试题进行分析，并有针对性地对各科每一部知识应该怎样学习提出指导意见。为此，各册每一部分都只有〔历届题选〕〔试题分析〕〔学习指导〕三个栏目。

这套丛书在内容上努力突出如下两个特点：一、根据各科教学大纲规定的基础知识和基本技能要求，明确提出各科每一部分内容应该重视的学习范围及其重点。二、通过各种类型（包括基本概念题，技能对应题，灵活题，综合题）试题的解析和拟定的练习题，总结命题规律，以求有效地提高学生分析问题和解决问题的能力。显而易见，我们编写这套丛书是力求帮助考生在对所学知识融会贯通的基础上，开阔思路，深入思考。

教育在改革，试考也在改革。今后的考试将更加科学化，标准化，更加符合教学的客观规律。总之，教学改革有力地推动考试的革新，反过来，考试命题的革新又有力地促进教学的改革。从这个意义上说，本丛书不仅适合考生学习之用，对各科教学也有一定的借签作用。

本丛书由崔孟明、李勃梁、宋志唐等担任主编，约清北京市部分有经验的教师合力编写。编写过程中几经讨论、几经修改、并广泛地征求了意见，力求深刻精炼和有新意。但由于水平有限，仍会有许多不当之处，敬请广大师生批评指正。

编 者

1987年1月于北京

目　录

代　数

三　角

立体几何

解析几何

第一部分 代　　数

【历届高考试题选】

1．（81年）设A表示有理数的集合，B表示无理数的集合，即设A＝{有理数}，B＝{无理数}，试写出：

（1）$A\cap B$，（2）$A\cup B$。

2．选择填空（84年）数集$X=\{(2n+1)\pi$，n是整数$\}$与数集$Y=\{(4k\pm1)\pi$，k是整数$\}$之间的关系是（　　）

（A）$X\subset Y$．　　　（B）$X\supset Y$．

（C）$X=Y$．　　　（D）$X\neq Y$．

3．选择填空（84年）如果n是正整数，那么$1/8[1-(-1)^n](n^2-1)$的值（　　）

（A）一定是零。　　　（B）一定是偶数。

（C）是整数但不一定是偶数。　　　（D）不一定是整数。

4．选择填空（85年）设集合$X=\{0,1,2,4,5,7\}$，$Y=\{1,3,6,8,9\}$，$Z=\{3,7,8\}$，那么集合$(X\cap Y)\cup Z$是（　　）。

（A）$\{0,1,2,6,8\}$。　　　（B）$\{3,7,8\}$。

（C）$\{1,3,7,8\}$．　　　（D）$\{1,3,6,7,8\}$．

5．选择填空（86年）已知全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合$\{2,7,8\}$是（　　）

（A）$A\cap B$。　　　（B）$A\cup B$。

（C）$\overline{A}\cap\overline{B}$．　　　（D）$\overline{A}\cup\overline{B}$。

6．（82年）填表：

	函　　数	使函数有意义的x的实数范围
（1）	$y=\sqrt{-x^2}$	
（2）	$y=\sqrt{(-x)^2}$	
（3）	$y=10^{\lg x}$	
（4）	$y=\lg10^x$	

7．选择填空（83年）在直角坐标系内，函数$y=|x|$的图象（　　）

（A）关于坐标轴、原点都不对称。　　　（B）关于原点对称。

（C）关于x轴对称。　　　（D）关于y轴对称。

8．（85年）设函数$f(x)$的定义域是$[0,1]$，求函数$f(x^2)$定义域。

9．（85年）求函数 $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域。

10．选择填空（83年）0.3^2，$\log_2 0.3$，$2^{0.3}$ 这三个数之间的大小顺序是（　　）

（A）$0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$.　　（B）$0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$.

（C）$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$.　　（D）$\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$.

11．（84年）已知函数 $\log_{0.5}(2x-3)>0$，求x的取值范围。

12．（84年）函数 $\log_{0.5}(x^2+4x+4)$ 在什么区间上是增函数？

13．（选择填空）（84年）函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象（　　）

（A）关于y轴对称。　　（B）关于原点对称。

（C）关于直线 $x+y=0$ 对称。　　（D）关于直线 $x-y=0$ 对称。

14．选择填空（85年）在下面给出的函数中，哪一个函数既是区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的增函数，又是以 π 为周期的偶函数？（　　）

（A）$y=x^2(x\in R)$.　　（B）$y=|\sin x|(x\in R)$.

（C）$y=\cos 2x(x\in R)$.　　（D）$y=e^{\sin 2x}(x\in R)$.

15．选择填空（86年）函数 $y=(0.2)^{-x}+1$ 的反函数是（　　）

（A）$y=\log_5 x+1$.　　（B）$y=\log_x 5+1$.

（C）$y=\log_5(x-1)$.　　（D）$y=\log_5 x-1$.

16．选择填空（86年）函数 $y=5^x+1$ 的反函数是（　　）

（A）$y=\log_5(x+1)$.　　（B）$y=\log_x 5+1$.

（C）$y=\log_5(x-1)$.　　（D）$y=\log_{(x-5)}5$.

17．选择填空（86年）已知 $C<0$，在下列不等式中成立的一个是（　　）

（A）$C>2^C$.　　（B）$C>\left(\frac{1}{2}\right)^C$.

（C）$2^C<\left(\frac{1}{2}\right)^C$.　　（D）$2^C>\left(\frac{1}{2}\right)^C$.

18．选择填空（86年）在下列各图中，$y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b(ab\neq 0)$ 的图象只可能是（　　）

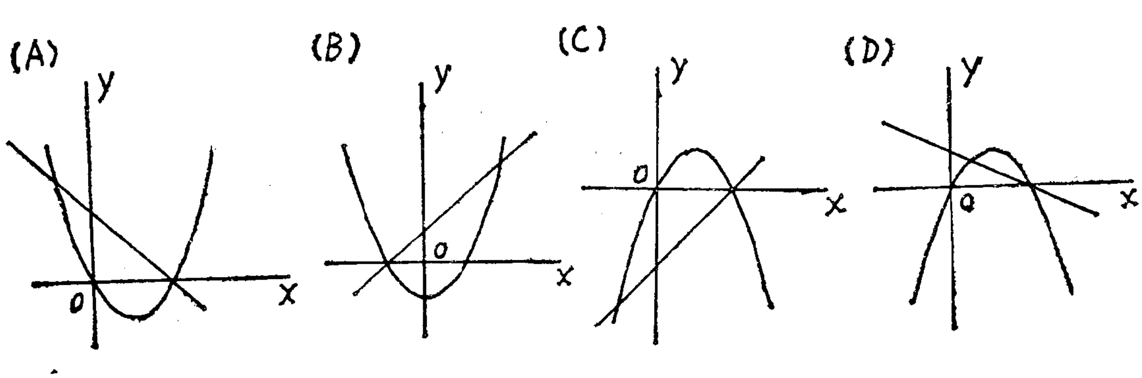

图 1-1

19．（85年）求函数 $y=-x^2+4x-2$ 在区间[0,3]上的最大值和最小值。

20．(80年)证明对数换底公式：$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$(a，b，N都是正数，$a\neq 1$，$b\neq 1$)。

21．(81年)设1980年底我国人口以10亿计算：

(1) 如果我国人口每年比上年平均递增2％，那么到2000年底将达到多少？

(2) 要使2000年底我国人口不超过12亿，那么每年比上年平均递增率最高是多少？

22．(82年)设 $0<x<1$，$a>0$，$a\neq 1$，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小(要写出比较过程)。

23．(82年)以墙为一边，用篱笆围成长方形的场地，并用平行于一边的篱笆隔开(如图1—2)。已知篱笆的总长为定值L，这块场地的长和宽各为多少时场地的面积最大？最大面积是多少？

24．(83年)求函数 $y=\sqrt{x+5}\,\log_2(36-x^2)$ 的定义域。

25．(83年)在圆心为O，半径为常数R的半圆板内画内接矩形(如图1—3)。当矩形的长和宽各取多少时，矩形的面积最大？求出这个最大的面积。

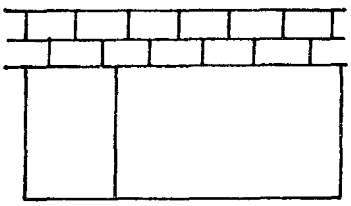

图 1-2

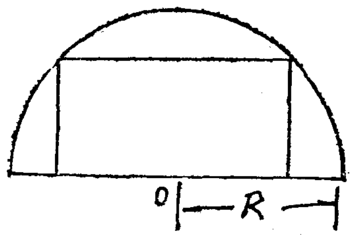

图 1-3

26．(84年)设c，d，x为实数，$c\neq 0$，x为未知数。讨论方程 $\log_{\left(cx+\frac{d}{x}\right)} x=-1$ 在什么情形下有解。有解时求出它的解。

27．(85年)解方程

$\lg(3-x)-\lg(3+x)=\lg(1-x)-\lg(2x+1)$。

28．(85年)解方程

$\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)-\log_{0.25}(2x+1)$。

29．(86年)求方程 $\sqrt{25^{(x^2+x-0.5)}}=\sqrt[4]{5}$ 的解。

30．(81年)解不等式(x为未知数)

$$\begin{vmatrix} x-a & b & -c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix}>0$$

31．(85年)解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$

32．(86年)当 $\sin 2x>0$ 时，求不等式 $\log_{0.5}(x^2-2x-15)>\log_{0.5}(x+13)$ 的解集。

33．(80年)已知 $0<\alpha<\pi$，证明 $2\sin 2\alpha\leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ 并讨论α为何值时等号成立。

34．(80年)CD为直角三角形ABC中斜边AB上的高。已知△ACD，△CBD，△ABC的面积成等比数列，求∠B(用反三角函数表示)。

35.（81年）用数学归纳法证明等式

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

36.（81年）已知以AB为直径的半圆内有一个内接正方形CDEF，其边长为1（如图1—4）。设AC＝a，BC＝b，作数列

$u_1=a-b$,

$u_2=a^2-ab+b^2$,

$u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3$,

…………

求证$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}(n\geqslant3)$。

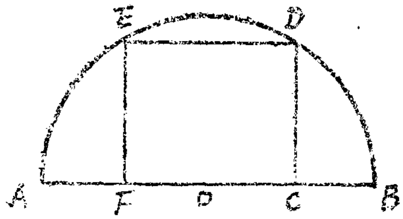

图 1-4

37.（82年）已知数列a_1，a_2，……a_n，……和数列b_1，b_2，……b_n，……，其中$a_1=p$，$b_1=q$，$a_n=pa_{n-1}$，$b_n=qa_{n-1}+rb_{n-1}(n\geqslant2)$，（p，q，r是已知常数，且$q\neq0$，$p>r>0$）。

（1）用p，q，r，n表示b_n，并用数学归纳法加以证明；

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$

38.（82年）如图1—5，已知△AOB中，OA＝b，OB＝a，∠AOB＝Q（$a\geqslant b$，Q是锐角），作$AB_1\perp OB$，$B_1A_1//BA$，再作$A_1B_2\perp OB$，$B_2A_2//BA$，如此无限继续作下去，设△ABB_1，△$A_1B_1B_2$，……的面积为S_1，S_2，……，求无穷数列S_1，S_2，……的和。

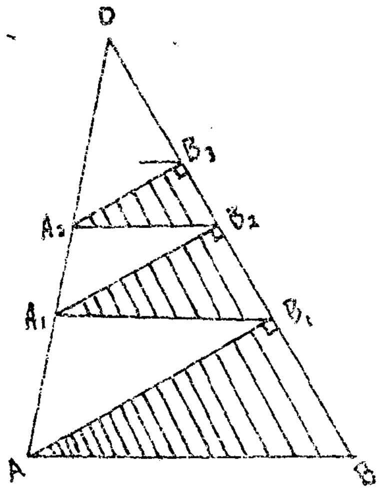

图 1-5

39.（83年）一个等比数列有三项。如果把第二项加上4，那么所得的三项就成为等差数列；如果再把这等差数列的第三项加上32，那么所得的三项又成为等比数列。求原来的等比数列。

40.（83年）已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=b(b\neq0)$它的前n项的和$Sn=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n(n\geqslant1)$并且$S_1$，$S_2$，……$S_n$，……是一个等比数列，其公比为p（$p\neq0$，且$|p|<1$），

（1）证明a_2，a_3，……a_n，……（即$\{a_n\}$从第二项起）是一个等比数列。

（2）设$W_n=a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+\cdots\cdots+a_ns_n(n\geqslant1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}W_n$（用b，p表示）。

41.（84年）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^n}{3^n+1}$的值，

42.（84年）已知等差数列a，b，c中的三个数都是正数，且公差不为零。求证它们的倒数所组成的数列$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$不可能成等差数列。

43.（84年）某工厂1983年生产某种产品2万件，计划从1984年开始，每年的产量比上一年增长20%。问从哪一年开始，这家工厂生产这种产品的年产量超过12万件（已知lg2＝

0.3010，$\lg 3=0.4771$)？

44.（84年）设$\alpha>2$，给定数列$\{x_n\}$其中

$$x_1=\alpha, x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}(n=1, 2, \cdots\cdots)。$$求证：

（1）$x_n>2$，且$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1, 2, \cdots\cdots)$。求证：

（2）如果$\alpha\leqslant 3$，那么$x_n\leqslant 2+\frac{1}{2^{n-1}}(n=1, 2, \cdots\cdots)$；

（3）$\alpha>3$，那么当$n\geqslant\frac{\lg\frac{\alpha}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$时，必有$x_{n+1}<3$.

45.（85年）设$S_1=1^2$，$S_2=1^2+2^2+1^2$，$S_3=1^2+2^2+3^2+2^2+1^2$，……，$S_n=1^2+2^2+3^2+n^2+\cdots\cdots+3^3+2^2+1^2$，……。

用数学归纳法证明：公式$S_n=\frac{n(2n^2+1)}{3}$对所有的正整数n都成立。

46.（85年）设首项为1，公比为q（$q>0$）的等比数列的前n项之和为S_n。又设$T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}$，$n=1, 2, \cdots\cdots$。求$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$。

47.（85年）设$a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$

（1）证明不等式

$$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$$

对所有的正整数n都成立。

（2）设$b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}(n=1、2, \cdots\cdots)$，用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}$。

48.（86年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+7}{5n^2+4}$.

49.（86年）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.

50.（86年）有以下20个数

87, 91, 94, 88, 93, 91, 89, 87, 92, 86,

90. 92, 88, 90, 91, 86, 89, 92, 95, 88;

它们的和是（　　）

（A）1789　（B）1799　（C）1879　（D）1899

51.（86年）已知数列$\{a_n\}$，其中$a_1=\frac{4}{3}$，$a_2=\frac{13}{9}$，且当$n\geqslant 3$时，$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{3}(a_{n-1}-a_{n-2})$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式　（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

52.（86年）已知$x_1>0$，$x_1\neq 1$，且$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$，$(n=1,2,\cdots)$。试证：数列$\{x_n\}$或者对任意自然数n都满足$x_n<x_{n+1}$，或者对任意自然数n都满足$x_n>x_{n+1}$。

53．(80年)将多项式x^5y-9xy^5分别在下列范围内分解因式：

(1)有理数范围，(2)实数范围，(3)复数范围。

54．(80年)化简$\frac{1-3i}{3-2i}$。

55．(83年)已知复数$z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，求证$z^3+\frac{1}{z^3}=2\cos3\alpha$

56．(83年)

(1)证明：对于任意实数t，复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$的模$r=|z|$适合$r\leqslant\sqrt[4]{2}$

(2)当实数t取什么值时，复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$的辐角主值$\theta$适合$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$

57．选择填空(84年)复数$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$的三角形式是(　　)

(A)$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.　　(B)$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

(C)$\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.　　(D)$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{6}$.

58．(85年)设i是虚数单位，求$(1+i)^6$的值。

59．(85年)如图1—6设O为复平面的原点，Z_1和Z_2为复平面内的两个动点，并且满足：

(1)Z_1和Z_2所对应的复数的辐角分别定值θ和$-\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,

(2)ΔOZ_1Z_2的面积为定值S。

求ΔOZ_1Z_2的重心Z所对应的复数的模的最小值。

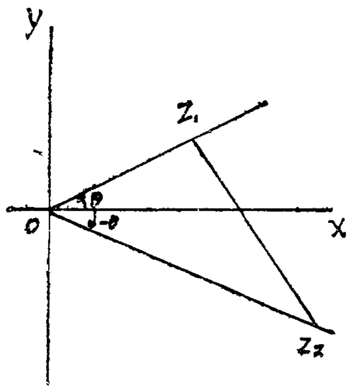

图 1-6

60．(86年)在下列各数中，已表示成三角形式的复数是(　　)

(A)$2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.　　(B)$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

(C)$2\left(\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}\right)$.　　(D)$-2\left(\sin\frac{\pi}{4}-i\cos\frac{\pi}{4}\right)$.

61．(86年)求满足方程$|Z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$的辐角主值最小的复数Z。

62．(86年)已知$\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，求$\omega^2+\omega+1$的值。

63．(81年)在A、B、C、D四位候选人中

(1)如果选择正、副班长各一人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果。

(2)如果选举班委三人，共有几种选法？写出所有可能的选举结果。

64．(82年)求$(-1+i)^{20}$展开式中第15项的数值。

65．(83年)一个小组共有10名同学，其中4名女同学，6名是男同学。要从小组内选出3名代表，其中至少有1名女同学，求一共有多少种选法。

66. (84年)求$(|x|+\frac{1}{|x|}-2)^3$的展开式中的常数项。

67. (84年)要排一张有6个歌唱节目和4个舞蹈节目的演出节目单，任何两个舞蹈节目不得相邻，问有多少种不同的排法(只要求写出式子，不必计算)。

68. (84年)求$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$的展开式中x的一次幂的系数。

69. 选择填空(85年)用1,2,3,4,5这五个数字，可以组成比20000大，并且百位数不是数字3的没有重复数字的五位数，共有(　　)

(A)96个。(B)78个。(C)72个。(D)64个。

70. (85年)设$(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，求$a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$的值。

71. (86年)求$\left(2x^3-\frac{1}{x^2}\right)^5$展开式中的常数项。

72. (86年)甲、乙、丙、丁四个公司承包8项工程，甲公司承包3项，乙公司承包1项，丙、丁两公司各承包2项，问共有多少种承包方式？

73. (86年)已知集合A和集合B各含有12个元素，$A\cap B$含有4个元素，试求同时满足下面两个条件的集合C的个数：

(i) $C\subset A\cup B$，且C中含有3个元素，

(ii) $C\cap A\neq\phi$(ϕ表示空集)。

【高考试题分析】

例1：选择填空。(86年)已知全集$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，那么集合$\{2,7,8\}$是(　　)

(A)$A\cup B$。(B)$A\cap B$。(C)$\overline{A}\cup\overline{B}$。(D)$\overline{A}\cap\overline{B}$。

思路：$\because$　$\overline{A}=\{1,2,6,7,8\}$，$\overline{B}=\{2,4,5,7,8\}$，

$\therefore$　$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,7,8\}$，因此(D)正确。

说明：求交集、并集与补集，关键是弄清概念，并正确使用符号：$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$，$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$，$\overline{A}=\{x|x\in I且x\notin A\}$。

例2：选择填空。(83年)0.3^2，$\log_2 0.3$，$2^{0.3}$这三个数的大小顺序是(　　)

(A)$0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$.　(B)$0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$.

(C)$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$.　(D)$\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$.

思路：$\because$　$\log_2 0.3<0$，$0<0.3^2<1$，$2^{0.3}>1$，

$\therefore$　$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$，即(C)正确。

说明：本题要求灵活运用幂函数、指数函数与对数函数的性质。如$2^{0.3}>1$，就是根据指数函数的性质：$y=a^x$中，如果$a>1$，那么当$x>0$时，$y>1$。

例3：选择填空　(86年)函数$y=(0.2)^{-x}+1$的反函数是(　　)

(A)$y=\log_5 x+1$。(B)$y=\log_x 5+1$。

(C)$y=\log_5(x-1)$。(D)$y=\log_5 x-1$。

思路：由已知函数得$y=5^x+1$，即$5^x=y-1$。解出x得到$x=\log_5(y-1)$。所以反函是$y=\log_5(x-1)$。结论(C)正确。

说明：求反函数的步骤是：先由$y=f(x)$解出x得$x=f^{-1}(y)$，再根据习惯把x，y对调得

$y=f^{-1}(x)$。

例4：(84年)函数$y=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在什么区间上是增函数?

解：这个函数是复合函数，可以看作$y=\log_{0.5}u$，$u=x^2+4x+4$。它的定义域是$x\neq 2$。因为$0<0.5<1$，所以在区间$(-\infty,-2)$上，函数x^2+4x+4是减函数，而函数$y=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$是增函数。

说明：讨论对数函数$y=\log_a x$，要注意底数a的情况：当$a>1$时，函数$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$上是增函数。当$0<a<1$时，函数$y=\log_a x$在$(0,+\infty)$上是减函数。

例5：(83年)在圆心为0，半径为常数R的半圆板内画内接矩形(如图1—7)，当矩形的长和宽各取多少时，矩形的面积最大?求出这个最大的面积。

解法一：设矩形的底边长为2x，则高为$\sqrt{R^2-x^2}$。矩形的面积为S

$$S=2x\sqrt{R^2-x^2}=2\sqrt{\frac{R^4}{4}-\left(x^2-\frac{R^2}{2}\right)^2}$$

当$x^2=\frac{R^2}{2}$，即$x=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$，$\sqrt{R^2-x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$时，矩形面积最大，即矩形的长为$\sqrt{2}R$，宽为$\frac{\sqrt{2}}{2}R$时，面积最大。最大面积是

$$\sqrt{2}R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}R=R^2$$

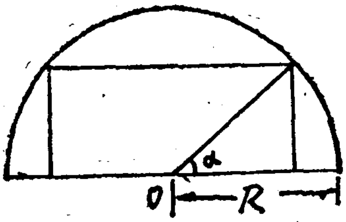

图 1-7

解法二：设α角如图所示，则矩形在半圆板直径上的一边的长为$2R\cos\alpha$，另一边的长为$R\sin\alpha$，矩形面积S为

$$S=2R^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha。S=R^2\sin 2\alpha。$$

当$\alpha=\frac{\pi}{4}$，即长为$2R\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}R$，宽为$R\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$时，矩形面积最大。最大面积是$R^2$。

说明：解函数的最大(最小)值的应用题的一般步骤是：(1)设自变量；(2)写出函数表达式；(3)整理化简；(4)求最大(最小)值。

例6：(82年)设$0<x<1$，$a>1$，$a\neq 1$，比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小(要写出比较过程)

解：当$a>1$时，$|\log_a(1-x)|=-\log_a(1-x)$，

$|\log_a(1+x)|=\log_a(1+x)$。

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$$
$$=-(\log_a(1-x)+\log_a(1+x))=-\log_a(1-x^2)。$$

$\because\ a>1$，$0<1-x^2<1$，$\therefore\ -\log_a(1-x^2)>0$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

当$0<a<1$时，$|\log_a(1-x)|=\log_a(1-x)$，$|\log_a(1+x)|=-\log_a(1+x)$。

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)$$
$$=\log_a(1-x^2)。$$

$\because\ 0<a<1,\ 0<1-x^2<1,\ \therefore\ \log_a(1-x^2)>0$

$\therefore\ |\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

因此，当$0<x<1$，$a>0$，$a\neq1$时总有$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

说明：本题要求熟练掌握绝对值的概念及对数函数的性质。两个实数比较大小的一般方法是$a-b>0\Longrightarrow a>b$。对数函数$\log_a x$的性质由底数a的取值不同($0<a<1$或$a>1$)来定，因此解题时要分$a>1$，$0<a<1$两种情况。比较两个正实数的大小还常用$\frac{a}{b}\geqslant1\Longrightarrow a\geqslant b$。此题也可由

$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{1+x}(1-x)|>1$求得结果。

其中$|\log_{1+x}(1-x)|>1$应根据$1-x$，$1-x$的取值范围加以证明。

例7：(85年)解不等式$\sqrt{2x+5}>x+1$

解：若不等式有意义，则应$2x+5\geqslant0$，即$x\geqslant-\frac{5}{2}$。

那么，原不等式成立的条件是

$$(1)\begin{cases}2x+5\geqslant0\\ x+1<0\end{cases}\quad 或\quad (2)\begin{cases}2x+5>0\\ x+1\geqslant0\\ (\sqrt{2x+5})^2>(x+1)^2\end{cases}$$

解不等式组(1)得$-\frac{5}{2}\leqslant x<-1$；解不等式组(2)得$-1\leqslant x<2$。

因此，原不等式组的解集是$\{x\mid-\frac{5}{2}\leqslant x<2\}$。

说明：解无理不等式时必须先考虑定义域，然后根据具体题目，确定原不等式组成立的条件。解题时要考虑周全，防止疏忽，如未限定正数就去平方，或把两个不等式组漏掉一个等。

例8：(80年)已知$0<\alpha<\pi$，证明$2\sin2\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$并讨论$\alpha$为何值时等号成立。

证：$$2\sin2\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=4\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha\cos\alpha-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{-4(\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)\cos\alpha-(\cos\alpha+1)}{\sin\alpha}=\frac{-(\cos\alpha+1)(2\cos\alpha-1)^2}{\sin\alpha}$$

$\because 0<\alpha<\pi$，$\therefore\cos\alpha+1>0$，$(2\cos\alpha-1)^2\geqslant0$，

因此 $$2\sin2\alpha-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-(\cos\alpha+1)(2\cos\alpha-1)^2}{\sin\alpha}\leqslant0。$$

即 $2\sin2\alpha\leqslant\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$。而当$\alpha=\frac{\pi}{3}$时，$(2\cos\alpha-1)^2=0$，此时等号成立。

说明：本题有两个要点。一是选择证明不等式的方法，本题用综合法、分析法、比较法及其它方法都可以；二是运用恒等变形的技巧完成证明，在本题中，运用倍角公式与半角公式，把2α与$\frac{\alpha}{2}$的三角函数一律化成角α的三角函数，再分解因式得出完全平方，从而确定符号完成比较法的证明。

例9 (84年)已知等差数列a，b，c中的三数都是正数，且公差不为零。求证它们的倒

数所组成的数列不可能成等差数列。

证明：假设$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$成等差数列，那么$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$，即$\frac{a-b}{ba}=\frac{b-c}{cb}$

两边都乘以b，得$\frac{a-b}{a}=\frac{b-c}{c}$。

又因为a，b，c成等差数列，且公差不为零，所以$a-b=b-c\neq 0$。

由以上两式，可知$\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$。

两边都乘以ac，得$a=c$。但数列a，b，c的公差不为零，故$a\neq c$；得出矛盾。

从而$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$不可能成等差数列。

说明：从知识上看，本题考查等差数列与等比数列的基本概念；从方法上看，完成此题要使用反证法。

例 （85年）

设 $S_1=1^2$，$S_2=1^2+2^2+1^2$，$S_3=1^2+2^2+3^2+2^2+1^2$，……，

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+\cdots\cdots+3^2+2^2+1^2,\ \cdots\cdots。$$

用数学归纳法证明：公式 $S_n=\frac{n(2n^2+1)}{3}$。对所有的正整数n都成立。

证明：①当 $n=1$时，左边$=1$，右边$=\frac{1\times 3}{3}=1$，因此结论正确。

②假设当$n=k$时，结论正确，即$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+\cdots\cdots+2^2+1^2=\frac{k(2k^2+1)}{3}$

那么，当$n=k+1$时，两边都加$(k+1)^2+k^2$，得

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2+K^2\cdots\cdots+2^2+1^2$$

$$=\frac{k(2k^2+1)}{3}+(k+1)^2+k^2=\frac{2k^3+k+3(k+1)^2+3k^2}{3}$$

$$=\frac{k(2k+1)(k+1)+3(k+1)^2}{3}=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3)}{3}$$

$$=\frac{(k+1)[2(k+1)^2+1]}{3}。$$

因此，当$n=k+1$时，结论也正确。

∴ 对于所有的正整数n，公式$S_n=\frac{n(2n^2+1)}{3}$都成立。

说明：学习数学归纳法，必须正确掌握证题的格式与步骤，如本题所示。

例11 （80年）如图1—8，CD为直角三角形ABC中斜边AB上的高。已知△ACD，△CBD，△ABC 的面积成等比数列，求∠B(用反三角函数表示)

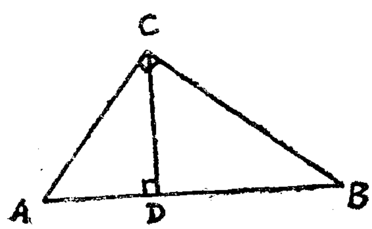

图 1-8

解：根据题设$(S_{\triangle BCD})^2=S_{\triangle ACD}\cdot S_{\triangle ABC}$，

即 $\left(\frac{1}{2}CD\cdot BD\right)^2=\left(\frac{1}{2}AD\cdot CD\right)\cdot\left(\frac{1}{2}AC\cdot BC\right)$，

$CD^2\cdot BD^2=AD\cdot CD\cdot AC\cdot BC$。

由上式，得$\frac{CD}{AD}\cdot\frac{CD}{AC}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{BD}{BC}=1$，

即 $tgA\cdot\sin A\cdot ctgB\cdot\cos B=1$ 因此 $ctg^2B\cos^2B=1$。

$\because\angle B$是锐角，$\therefore ctgB\cos B=1$，即 $\frac{\cos^2B}{\sin B}=1$。

根据同角关系，得$\sin^2B+\sin B-1=0$。

解得 $\sin B=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（舍去了负根）$\therefore\angle B=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

说明：有些综合题，在已知条件中就用上了等差（等比）中项的概念。我们不妨先从这里开始，运用概念：若a，b，c成等差数列$\Longrightarrow 2b=a+c$；a，b，c成等比数列$\Longrightarrow b^2=ac$，从而进入解题过程。

例12 （82年）如图1—9，已知ΔAoB中，$oA=b$，$oB=a$，$\angle AoB=\theta$（$a\geqslant b$，θ是锐角），作$AB_1\perp oB$，$B_1A_1/\!/BA$；再作$A_1B_2\perp oB$，$B_2A_2/\!/BA$；如此无限继续下去。设ΔABB_1，$\Delta A_1B_1B_2$，……的面积为S_1，S_2，……，求无穷数列S_1，S_2，……的和。

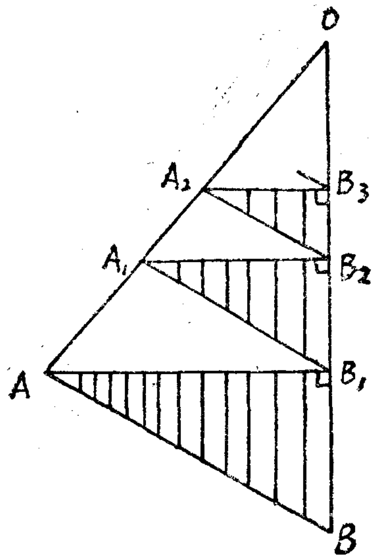

图 1-9

解：$AB_1=b\sin\theta$，$BB_1=a-b\cos\theta$。

$$S_1=\frac{1}{2}AB_1\times BB_1=\frac{1}{2}b\sin\theta(a-b\cos\theta)。$$

$\because$ $\Delta oAB\backsim\Delta oA_1B_1\backsim\Delta oA_2B_2\backsim\cdots\cdots$，

$$\therefore\ \frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}}=\frac{oB_n}{oB_{n-1}}=\frac{oA_{n-1}\cos\theta}{oB_{n-1}}$$

$$=\frac{oA}{oB}\cos\theta=\frac{b}{a}\cos\theta。$$

（对一切$n\geqslant1$成立，A_0B_0即为AB）

$\because$ $\Delta ABB_1\backsim\Delta A_1B_1B_2\backsim\Delta A_2B_2B_3\backsim\cdots\cdots$，

$$\therefore\ \frac{S_{n+1}}{S_n}=\left(\frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}}\right)^2=\left(\frac{b}{a}\cos\theta\right)^2,$$

即公式 $q=\left(\frac{b}{a}\cos\theta\right)^2$

$\because$ θ是锐角，$a\geqslant b$，$\therefore 0<\left(\frac{b}{a}\cos\theta\right)^2<1$，

$\therefore$ 数列S_1，S_2，S_3……是无穷递缩等比数列，

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(S_1+S_2\cdots\cdots+S_n)=\frac{S_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}b\sin\theta(a-b\cos\alpha)}{1-\left(\frac{b}{a}\cos\theta\right)^2}$$

$$=\frac{a^2b\sin\theta}{3(a+b\cos\theta)}$$

说明：本题考查无穷等比数列的概念，在解题时必须说明为什么$|q|<1$。因为只有$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$才存在。

例13（85年）：

设$a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}\ (n=1,2,\cdots\cdots)$。

证明不等式 $\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$

对所有的正整数n都成立。

设 $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}\ (n=1,2,\cdots\cdots)$，用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{2}$。

证：（1）〔证法一〕用数学归纳法

当 $n=1$时，由于$a_1=\sqrt{1\cdot2}=\sqrt{2}$，$\dfrac{1\cdot2}{2}=1<\sqrt{2}$以及

$\dfrac{(1+1)^2}{2}=2>\sqrt{2}$可知不等式成立。

假设当 $n=k(k\geqslant1)$对不等式成立，即$\dfrac{k(k+1)}{2}<a_k<\dfrac{(k+1)^2}{2}$。

当$n=k+1$时，可得 $a_{k+1}=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}$。

$\therefore a_{k+1}>a_k+(k+1)>\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$。

又$a_{k+1}=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}<a_k+\dfrac{(k+1)+(k+2)}{2}$

$$<\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{2k+3}{2}=\frac{(k+2)^2}{2}=\frac{[(k+1)+1]^2}{2}。$$

即 $\dfrac{(k+1)\ [(k+1)+1]}{2}<a_{k+1}<\dfrac{[(k+1)+1]^2}{2}$也成立。

∴ 对一切正整数n不等式都成立。

〔证法二〕 直接证明

∵ $\sqrt{k(k+1)}>k$,

∴ $a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}>1+2\cdots\cdots+n$

$$=\frac{n(n+1)}{2}。$$

又∵ $\sqrt{k(k+1)}<\dfrac{k+(k+1)}{2}=\dfrac{2k+1}{2}$。

∴ $a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{2n+1}{2}$

$$<\frac{1}{2}[1+3+5+\cdots\cdots+(2n+1)]=\frac{(n+1)^2}{2}。$$

∴ $\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$

（2）证明：∵ $\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$，且$b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$，

∴ $\dfrac{1}{2}<b_n<\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$因而$\left|b_n-\dfrac{1}{2}\right|=b_n-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2n}$。

对任意给定的正数ε，要使$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只须$\frac{1}{2n}<\varepsilon$，即$n>\frac{1}{2\varepsilon}$。

设N是$\frac{1}{2\varepsilon}$的整数部分，则数列b_n的第N项以后的所有项都满足$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$。

根据极限定义，证得$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}$，

说明：要想顺利完成证明，首先要仔细审题，明确有关概念，如结合数列的通项公式，正确理解$a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$的意义，即$a_n$是数列$\sqrt{1\cdot2}$，$\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}$，$\cdots\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$，…的代表项，如果误认为$a_1=\sqrt{1\cdot2}$，$a_2=\sqrt{2\cdot3}$则以下证明必然全错。

弄清题意后，再选择适当的方法，探索证明的途径，如证明（1）中的不等式，由于其中的n是自然数，就应当首先想到数学归纳法，当然也可以从不等式的基本性质出发，用直接方法去证明。而在证明（2）时，应认真回忆极限的定义，然后准确地按定义的要求一步一步作下去。

在具体证明的过程中要用到数列求和、平均值定理等一系列公式或定理。要正确运用这些基础知识，越过一道道障碍。

在证题过程中，必须机智、灵活，根据具体情况运用种种技巧。如（1）中的〔证法二〕，使用平均值定理证出了$a_n<\frac{1}{2}[3+5+\cdots\cdots+(2n+1)]$，但这还不是欲证的结论，这时就可以随机应变、使用放大的技巧，这样，问题便迎刃而解了。

$$a_n<\frac{1}{2}[3+5+\cdots\cdots+(2n+1)]<\frac{1}{2}[1+3+5+\cdots\cdots(2n+1)]=\frac{(n+1)^2}{2},$$

例14．（86年）在下列各数中，已表示成三角形式的复数是

（A）$2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，　（B）$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$。

（C）$2\left(\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}\right)$。　（D）$-2\left(\sin\frac{\pi}{4}-i\cos\frac{\pi}{4}\right)$。

思路：上述（A），（C），（D）都不符合$r(\cos\theta+i\sin\theta)$的形式，只有（B）符合。

例15．（86年）已知$\omega=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$，求$\omega^2+\omega+1$的值。

〔**解1**〕 $$\omega^2+\omega+1=\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2+\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}+1=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}+1=0。$$

〔**解2**〕 $\omega=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4\pi}{3}$，

$$\therefore\ \omega^2+\omega+1=\left(\cos\frac{8}{3}\pi+i\sin\frac{8}{3}\pi\right)+\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)+1$$

$$=-2\cos\frac{\pi}{3}+1=0.$$