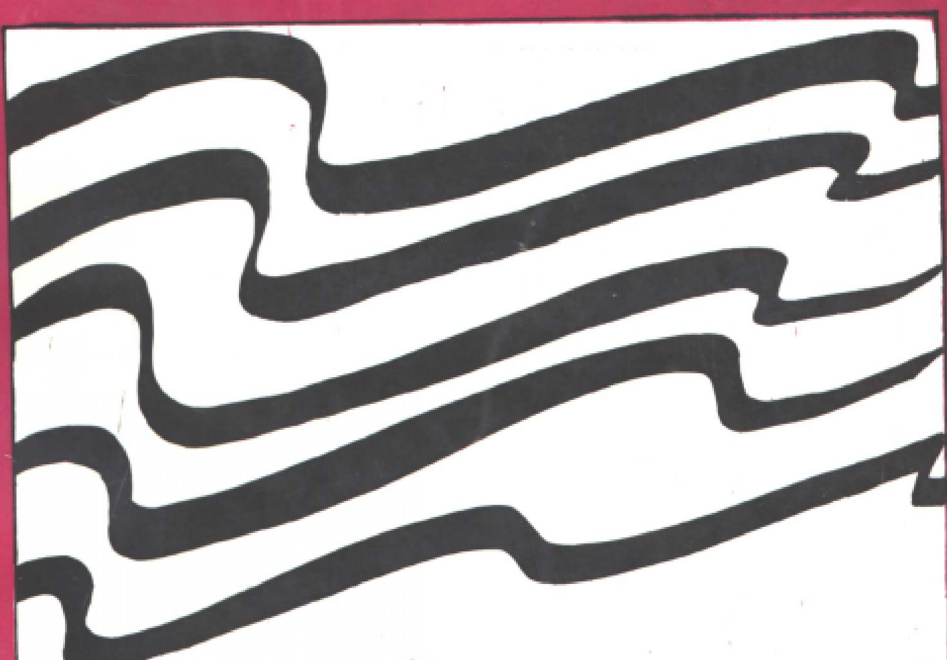
非线性有限元及程序设计

徐　兴　郭乙木　沈永兴　编著

浙江大学出版社



浙江大学
1897
ZHEJIANG UNIVERSITY

封面设计：俞亚彤

ISBN 7-308-01029-5/TP · 073　定价：9.95 元

非线性有限元及程序设计

徐　兴　郭乙木　沈永兴　编著

浙江大学出版社

(浙)新登字 10 号

内 容 简 介

本书通过介绍一个典型的非线性程序，阐明非线性有限元程序的基本结构、算法的程序实现等问题，为读者在非线性有限元理论和实际应用之间架起一座桥梁。内容主要包括：非线性有限元基础知识、软件工程基本思想、非线性有限元程序 ZD-FEAP 和几个简单算例，ZD-FEAP 的使用手册等。

本书除阐述非线性有限元基本理论外，通过具体力学模型，着重介绍非线性有限元程序的设计。

本书可作为力学、土木、机械等研究生和高年级本科生的教材，也可供工程技术人员学习非线性有限元算法和程序时参考。

非线性有限元及程序设计
徐 兴 郭乙木 沈永兴 编著
责任编辑 贾吉柱
* * *
浙江大学出版社出版
浙江大学出版社计算机中心电脑排版
浙江煤田地质局制图印刷厂印刷
浙江省新华书店发行
* * *
787×1092 16 开 21 印张 537 千字
1993 年 8 月第 1 版 1993 年 8 月第 1 次印刷
印数 0001－1500
ISBN 7-308-01029-5/TP・073 定价：9.95 元

前　言

线性有限元法已被广大工程技术人员掌握，然而非线性有限元，由于其所要求的基础理论知识更深、更广，其程序实施也比较困难，更由于实际问题的复杂性，因此，它要求使用者熟练地掌握有限元技术，能够发展算法，扩充程序性能，以便更有效更经济地解决工程中的非线性问题。

作者从1983年开始，为浙江大学力学系和土木系硕士生讲授有限元程序设计课程，并随着有限元技术的不断发展，更新授课内容。1988年以来，试着以非线性有限元程序为主要内容进行讲授。虽然开始时学生会感到有一些困难，但学完以后，都觉得收获很大，所学内容对其后的学位论文和研究工作帮助颇大。讲稿几经修改，逐步形成本教材。

本教材通过介绍一个典型的非线性程序，阐明非线性有限元程序的基本结构、算法和程序实现等问题，为读者在非线性有限元理论和实际应用之间架起一座桥梁。

第二章介绍非线性有限元基础知识。有关非线性有限元的书籍已有很多，这一章对已经学过非线性有限元的读者来讲，是复习和整理；对未学者来讲是一个入门，为阅读后面的程序作必要的理论准备。

第三章软件工程基本思想，其内容比较独立，似乎可以舍去。但是根据作者多年从事有限元程序开发的经验，掌握软件工程的基本思想，遵循其基本要求和规范，可以少走弯路，会收到意想不到的效果。软件工程是经历了软件危机，前人化费了巨大代价才得出的经验总结，值得一学。

第四章到第六章，介绍非线性有限元程序ZD-FEAP和几个简单算例。FEAP是美国加利福尼亚大学*R. L. Taylor*教授领导开发的非线性有限元程序，适合于教学和研究。1986年*R. L. Taylor*教授和*J. C. Simo*教授受联合国教科文组织派遣，来浙江大学讲学。这两位教授赠送了一套FEAP程序。我们在这套程序的基础上开发、发展了ZD-FEAP程序。由于程序规模比较大，附录中只能列出主要程序模块，略去了前后处理和大部分单元子程序。但它仍是一个可以运行的程序，读者可以在此基础上开发自己的程序。

第七章为读者使用ZD-FEAP提供了一个实际的使用手册。使用手册是重要的软件文档之一，放在教材中也有利于读者阅读程序。按软件工程的要求，程序中已加上大量注释。再通过本教材对程序的解释和相应算法的介绍，读者不难掌握这一程序。读者如果耐心地读通这本教材和这份程序，我们相信其有限元水平和有限元程序设计能力均会上一个新的台阶。

这一课程现分上、下两学期进行，第一学期每周4学时，分两条线同时进行，用每周2学时介绍非线性有限元基本理论，用每周2学时介绍ZD-FEAP程序及其设计思想。第二学期每周2学时，为计算力学硕士生和有兴趣的同学介绍软件工程基本思想和平面应变/轴对称非线性单元子程序，同时进行计算实践和编程、修改、调试实践。

本书可供力学、土木、机械等研究生和高年级本科生使用，也可以供工程技术人员学习非

线性有限元算法和程序时参考。

本书第一、第五章由徐　兴教授编写，第二、第三章由郭乙木副教授编写，第四、第六、第七章由沈永兴讲师编写。全书由徐兴教授统稿。首先，我们对FEAP程序的赠送者*R. L. Taylor*教授和*J. C. Simo*教授表示衷心的感谢。同时，在开发ZD-FEAP程序过程中，许多教师和研究生做了不少工作，我们也谨向他们表示谢意。

由于编者水平有限，定有不妥和错误之处，恳请专家和读者予以批评指正。

作者

1992年3月

目 录

第一章

绪　论

——有限元发展历史、现状及应用前景

“有限元法”的名称是Clough[1]在1960年的一篇平面弹性问题的论文中提出的，其实有限元法最初是在50年代作为处理固体力学问题的一种方法出现的，它是结构分析矩阵方法的一个分支。据文献记载Courant[2]于1943年就应用了“单元”，将杆横截面剖分为三角形“单元”集合，假设翘曲函数在三角形单元中呈线性分布，从而求得St-Venant扭转问题的近似解。在Courant之后十多年，才再次应用这种离散化的方法。初期的有限元法是建立在虚功原理或最小势能原理基础上的，它们可看作Rayleigh-Ritz法的推广，其试函数是单元上的分片插值函数，在整个域上仅满足连续的条件。我国学者对有限元法的创建和发展也有不少贡献，著名学者冯康在1965年的文章中称之谓基于变分原理的差分格式[3]。卞学璜[4]于1971年指出，对某些边值问题有限元法和有限差分法得出的方程组是一致的。但有限元法比一般的Rayleigh-Ritz法更灵活，在不规则区域和非均质问题中比差分法更方便，所以在1960年以后，有限元法在工程界获得了广泛的应用，已成为杰出的工程分析工具。

在1960～1970这十年中，发展了以各种不同变分原理为基础的有限元法。60～70年代，世界各国在许多方面对有限元法进行了研究：

1）有限元法与加权残数法的关系[5-8]；

2）发展了弯曲元、曲元和等参元[9-11]；

3）作为偏微分方程的数值解法，广泛应用于结构的非线性问题和动力问题，固体力学问题，流体力学问题，热力学问题以及其他方法难以处理的工程问题[12]；

4）建立在函数分析概念上的数学基础[13,14]。

1967年以来，许多有限元专著出现了[12,15-18]，并发行了不少有限元的杂志[19-24]。

目前有限元法已广泛应用于航空、航天、船舶建造、核能电站、地下建筑等结构工程，在潮汐运动、热传导、化学反应中物质的传递和扩散以及流体和结构相互作用等领域，也有广泛的研究和应用。

有限元法的专用和通用计算机软件也大量出现，比较著名的通用软件有NASTRAN，ASKA，SAP，MARC，ANSYS，TITUS，ADINA等。

有限元法已经相当成熟，不可能期望再有什么戏剧性的突破了。但是在进一步扩大应用范围、提高和完善有限元法的使用技巧等方面还有许多工作要做。例如断裂、损伤等材料破坏问题，各种非线性问题、流体问题和大规模复杂问题的求解效率的提高，误差界限和收敛速度的估计，网格剖分的自动化，自适应有限元，以及有限元和优化相结合的计算机辅助设计等等。

参考文献

1. R. W. Clough, The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., September 8 and 9, 1960.
2. R. Courant, Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations, Bull. Am. Math. Soc, Vol. 49, 1943.
3. 冯康，基于变分原理的差分格式，应用数学与计算数学，2：4(1965)，238 — 262.
4. T. H. H. Pian, Variational Formulations of Numerical Methods in Solid Continua, Computer-Aided Engineering, G. M. L. Gladwell, ed, University of Waterloo Press, Waterloo. Canada, 1971.
5. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, Stress Analysis, Wiley, New York, 1965.
6. R. E. Greene, R. E. Jones, R. W. Mclay and D. R. Strome, Generalized Variational Principles in the Finite-Element Method, AIAA J., 7, 7, 1254-1260, July, 1969.
7. B. A. Finlayson, Weighted Residual Methods and their Relation to Finite Element. Methods in Flow Problems, Finite Element in Fluids, Vol. 2, PP. 1 — 31, Wiley, 1975.
8. E. R. de Arantes e Oliverra, Theoretical Foundations of the Finite Element Method, International Journal of Solids and Structures, 4, 929, 1968.
9. C. A. Felippa, Refined Finite Element Analysis of linear and Non-linear Two-dimensional Structures, Report UC SESM 66-22, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, October 1966.
10. J. G. Ergatoudis, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, Three-dimensional Analysis of Arch Dams and their Foundations, Symposium on Arch Dams, Institute of Civil Engineering, London, March 1968.
11. B. M. Irons and O. C. Zenkiewicz, The Isoparametric Finite Element System-A New Concept in Finite Element Analysis, Proceedings, Conference on Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aeronautical Society, London, 1968.
12. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method (third edition), McGraw-Hill, New York, 1977.
13. A. K. Aziz(ed.), The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Apptications to Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1972.
14. J. R. Whiteman(ed.), The Mathematics of Finite Elements and Applications, Academic Press, London, 1973.
15. J. T. Oden, Finite Elements of Non-linear Continua, McGraw-Hill, New York, 1972.
16. R. D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Wiley, 1974.
17. K. J. Bathe and E. L. Wilson, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, New York Jersey, 1976.
18. K. H. Huebner, The Finite Element Method for Engineers, Wiley, 1975.
19. International Journal for Numerical Methods in Engineering (eds. O. C. Zienkiewicz and R. H. Gallagher), Wiley.
20. International Journal of Computers and Structures (ed. H. Liebowitz), Pergamon Press.
21. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (ed. J. H. Argyris), North Holland.
22. International Journal of Computers and Fluids(ed. C. Taylor), Pergamon Press.
23. International Journal of Numerical Methods in Geotechnics (ed. C. S. Desai), Wily.
24. Finite Element News, Robinson and Associates, Dorset, England.

第二章

非线性有限元基础知识

弹性力学的有限单元法最后归结为一个线性代数方程组的求解。对于线性问题的基础知识，在我国已为广大科技工作者所掌握，且弹性力学有限元在工程技术界已得到广泛应用，有些行业，已成为设计规范的一个组成部分。事实上，工程中所有的问题都是非线性的，为简化工程问题的需要，在解决许多具体实际问题时，往往将它们近似地作为线性问题来处理，这也是合理的。但是我们不能因此认为一切问题均可以简化为线性问题。事实上有许多问题，应用线性理论是完全不合适的，必须应用非线性理论才能得到符合实际的结果。非线性有限元是目前进行非线性问题数值计算最有效的方法之一。本章对非线性有限元基础知识作简要的阐述，我们主要叙述固体力学非线性问题的分类，非线性问题的一般数值解法，以及各类非线性有限元方法。

§ 2-1　非线性问题的分类

固体力学非线性问题一般可以分成两大类：一类是几何非线性问题；另一类是材料非线性问题。

几何非线性是由结构变形的大位移所造成的。以前我们在讨论线性弹性力学问题时，均隐含一个假设，结构在外载荷作用下产生的位移及应变都是很小的，其应变与变形之间存在线性关系。因此，有限元法计算中，假定结构加载过程中单元的几何形状基本不变。也就是说，我们在建立弹性力学的平衡方程时，用变形前的位置代替了变形后的位置，这实质上是一种线性应变的近似处理。但是，必须注意到，很多结构存在着这样一种可能，即使应变很小，其应力也远未达到材料的弹性极限，而其位移却是很大的，导致结构的几何形状在变形前后产生很大的变化。例如图 2-1*a* 所示的结构。在 B 点作用着载荷 P，它的平衡方程就必须由变形后的几何位置给出(如图 2-1*b*)，而不可能以变形前的位置来替代。又例如压杆失稳后的变形研究，平板大挠度问题等等。对于在结构加载过程中不能忽略结构几何形状变化的弹性力学问题，我们称为小变形几何非线性问题。

还有一种几何非线性问题是指大应变情况。如橡胶等材料，即使在弹性状态下，也可能产生大变形、大位移。解决这类问题的主要难度是大变形条件下的应力和应变以及它们的速率的度量准则和方法。大变形是这类几何非线性问题的困难所在。

经常讨论的几何非线性包括结构的大位移和结构的不稳定性。这在板壳结构，板梁结构中显得尤为重要。

这类问题，由于结构在加载过程中已变形的几何位置是未知的，因此给问题的方程建立和求解带来了复杂性。我们以后将试图用统一的方法来加以处理，这就是通过研究基本的非线性

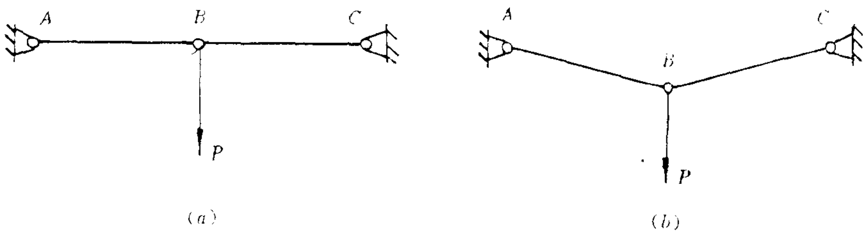


图 2-1　非线性桁架结构

平衡方程组的建立及其求解方法来实现。这将在本章的后面几节中加以叙述。

材料非线性是指材料的本构关系是非线性的。它一般可分为以下三种情况：

1. 固体力学中与时间无关的材料非线性问题

对于橡胶、塑料、土壤、岩石等材料的非线性弹性问题，或是金属等材料超过弹性极限以后呈现的非线性物理性质问题(即弹塑性问题)，如果按加载过程考察，这两类材料的非线性性质是相同的，只要能给出它们的非线性本构关系，其计算方法是完全一样的。但是考察卸载过程就会出现不同的现象。非线性弹性问题是可逆的，即卸载过程的载荷 — 应变曲线与加载过程的曲线完全吻合，卸载后结构应变会恢复到加载前的水平。而弹塑性问题却是部分不可逆的(即出现不可逆应变)，从而导致应力 — 应变关系不是唯一的，且与载荷时间历程有关。

2. 固体力学中与时间有关的非线性问题 —— 蠕变问题(在土木工程中称徐变)，即粘弹性问题和粘塑性问题

以上问题在常应力条件下，变形与时间有关，但往往随着载荷作用期的延长使蠕变应变增大。这种蠕变的非线性主要由材料性态引起。例如，在常温下受常力作用的钢材，变形随时间的变化可以忽略不计，应用一般弹塑性理论已足够精确。但是，如果考察电站汽轮机的叶片，它在高温环境下长期工作，这时叶片的变形随时间的变化是不能忽视的。又例如，常力作用下钢筋混凝土的变形随时间的变化，在一般建筑结构中都是忽略不计的，但在考察水库大坝的安全性时，蠕变影响又是一个不可忽视的因素。

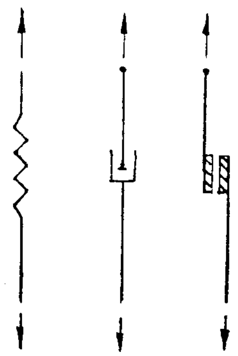
上述材料的应变随时间变化的特性称为粘性，粘性的量值与应变大小有关。考察蠕变问题就是在材料本构关系中加入粘性的影响。具有粘性的材料通常可以用一些简单的力学模型来直观说明，诸如粘性元件、弹性元件、塑性元件等，如图 2-2 所示。

将弹性元件和粘性元件组合，便得到粘弹性材料模型。如果它们并联，习惯上称之为开尔文(Kelvin) 粘弹性模型；若是串联，则称之为麦克斯韦尔(Maxwell) 模型(图 2-3)。

将塑性元件与粘性元件组合可以得到所谓粘塑性材料模型。如果将粘性元件与塑性元件并联，便得到宾汉(Binghan) 模型。如果将其串联，则得到类似于粘性流体的模型(图 2-4)。

将弹性、塑性和粘性三类元件以不同形式组合，可以获得更为复杂的材料模型。

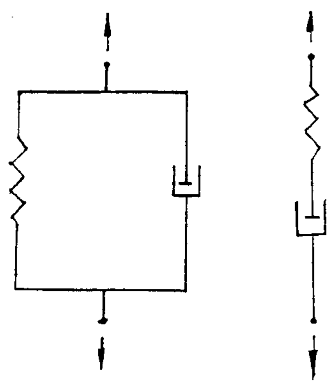
各类材料模型的本构关系式将在 §2-1 节介绍。



(a)　(b)　(c)

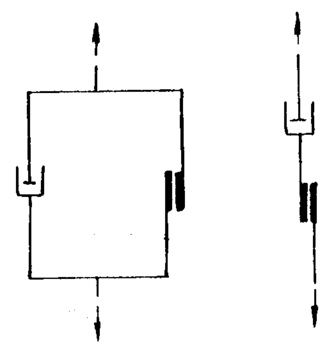
(a) 弹性元件　(b) 粘性元件　(c) 塑性元件

图 2-2　力学模型元件



(a)　(b)

图 2-3　粘弹性材料模型



(a)　(b)

图 2-4　粘塑性材料模型

3. 非线性场问题

还有一类场非线性问题，如热传导、电势、磁势、流体流动等稳态场的非线性问题。对这类问题，我们感兴趣的是场变量及其对时间的变化。

在非线性问题求解中，不管是属于哪一类问题，它们有几个共同的特点需在这里指出。对于一般非线性方程或方程组，到目前为止，尚未找到一种理论上精确求解的方法，现在均采用数值解法，该法具有如下特性：

1）非线性问题的解不一定是唯一的；

2）解的收敛性事前也不一定能得到保证，还可能出现不稳定状态和振荡现象；

3）非线性问题的求解比线性问题更为复杂。

综上所述，非线性问题求解的难度很大，这就要求从事非线性问题研究和应用的科技工作

者掌握更多的基础知识和经验，以期顺利地求解各种类型的非线性问题。

§2-2　非线性问题的一般解法

我们知道，线性问题的有限元法，最后归结为一个线性代数方程组

$$KX - F = 0$$

式中 K 为 $N \times N$ 的常数矩阵，X 为 N 阶节点位移向量，F 是已知的 N 阶等效节点力向量。

线性代数方程组的求解可以毫无困难地运用各种直接方法。例如高斯消去法，三角分解法等等。这些方法在有关数值方法的教本中都有详细介绍，这里不再赘述。

非线性问题，无论是几何非线性还是材料非线性，应用有限元法最后可归结为一个非线性方程组

$$K(X) \cdot X - F = 0$$

这里 $K(X)$ 是 $N \times N$ 的矩阵，矩阵元素 K_{ij} 是向量 X 的函数，而 F 也是一个已知的等效节点力向量。

对于这样的非线性方程组的求解，一般来说是不可能求得它们的精确解的。通常我们以一系列线性代数方程组的解去逼近所考察的非线性方程组的解。这种近似方法，显然需要求解一系列的线性方程组，比线性问题当然要复杂得多。由于近似线性方程组建立的方法各不相同，因而形成了非线性方程组的各种各样的解法。还必须注意到，非线性问题是一种物理现象，数学模型的抽象会形态各异，表现在非线性方程形式上也各不相同。对各种近似算法不同类型的非线性方程组在收敛性、稳定性等问题上结果也各不相同，甚至可能出现计算失败。这一切就要求读者在掌握非线性问题各种近似解法的基础上，结合对所考察问题的认识，应用计算实践的经验，仔细地、合理地选择模型，选用算法，以求高质量、高效率地完成求解任务。

下面我们讨论几种常见的非线性方程组的求解方法。

一、直接迭代法

这是一种求解非线性方程组的最简单方法。

设非线性方程组

$$\psi(X) = K(X) \cdot X - F = 0 \tag{2-1}$$

取某个初始近似解为

$$X = X^0$$

那么，一个近似的矩阵 K^0 就可以得到

$$K^0 = K(X^0)$$

将 K^0 代入(2-1)式，可以得到一个改进的一次近似解

$$X^1 = (K^0)^{-1} \cdot F$$

重复上述过程，以第 n 次近似解求第 $n+1$ 次近似解的递推公式为：

$$\left.\begin{aligned} K^n &= K(X^n) \\ X^{n+1} &= (K^n)^{-1} \cdot F \end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

若给定一个充分小的正数 ε，当

$$\| \Delta X^n \| = \| X^{n+1} - X^n \| \leqslant \varepsilon$$

时，迭代终止。这样就得到方程(2-1)的收敛解。

实际应用中，经常采用以下两种收敛准则。

1）为了度量“偏差”的大小和解的收敛性，用向量范数表示收敛准则：

$$\| \Delta X^n \| \leqslant \alpha \| X^n \| \tag{2-3}$$

2）由于直接迭代法中的每一步迭代方程给出的近似解不可能满足(2-1)式，即

$$\psi(X^n) = K(X^n) \cdot X^n - F \neq 0$$

则可以取

$$\| \psi(X^n) \| \leqslant \beta \| F \| \tag{2-4}$$

为收敛准则，其中 α、β 是给定的小正数。

这里必须指出，直接迭代法虽然简单易行，计算方便，但从方程(2-1)发现，未知位移向量事实上是通过矩阵**K**的元素而互相耦合的。然而应用直接迭代法明显地忽略了这种耦合关系，不能真实地反映问题的非线性。这样，不仅收敛速度慢，而且可能出现迭代过程的不稳定，因此在实际应用中很少采用这种方法。

直接迭代法的几何意义，可以用一维非线性问题为例加以说明。在一维问题中，矢量 X 和矩阵 K 退化为一个标量和它的标量函数。图(2-5)中给出 $P = K(X) \cdot X$ 与 X 之间关系的曲线 Γ。$K(X)$ 就是曲线 Γ 上点 (X,P) 与原点之间连线(割线)的斜率。其迭代过程为：从 X^0 出发，由曲线 Γ 直接给出 X^0 对应的 K 值 K^0，然后求得 X^1。如此循环，直到 X^{n+1} 与 X^n 充分接近为止(图 2-5 所示)。

对于单变量单调函数的非线性问题，这种方法必定收敛。

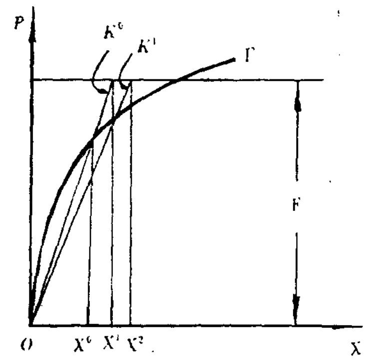


图 2-5　直接迭代法(割线法)

二、牛顿法

求解非线性方程组(2-1)的数值方法中，最著名的是牛顿-拉斐逊(Newton-Raphson)方法，简称牛顿法。

任何具有一阶导数的连续函数 $\psi(X)$，在 X^n 点作一阶泰勒(Taylor)展开，它在 X^n 点的线性近似公式是

$$\psi(X) = \psi(X^n) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X}\right)^n (X - X^n)^{①}$$

令 $R = K(X) \cdot X$，则上式为

$$\psi(X) = \psi(X^n) + \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n (X - X^n)$$

因此，非线性方程 $\psi(X) = 0$ 在 X^n 点附近的近似方程改写成线性方程

① 注：这里 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n$ 的上标 n 表示 $\left.\frac{\partial R}{\partial X}\right|_{X=X^n}$，而不是 n 次幂，以下同。

$$\psi(X) + \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n (X - X^n) = 0 \tag{2-5}$$

由于一般情况下，$\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n \neq 0$，它的解为

$$\left.\begin{aligned} \Delta X^{n+1} &= -\left[\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n\right]^{-1} \cdot \psi(X^n) \\ X^{n+1} &= X^n + \Delta X^{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

这就是牛顿法的迭代公式。

牛顿法的迭代过程，也可以用一维非线性问题以图形的形式显示。如图 2-6 所示。从图中发现，它与直接迭代法比较，直接迭代法的 K 是原点与曲线 Γ 上某点连线（割线）的斜率，而牛顿法是曲线 Γ 在某点的切线的斜率。因此它要求在每次迭代中均需计算 $\psi'(X) = \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)$，其计算工作量是很大的。

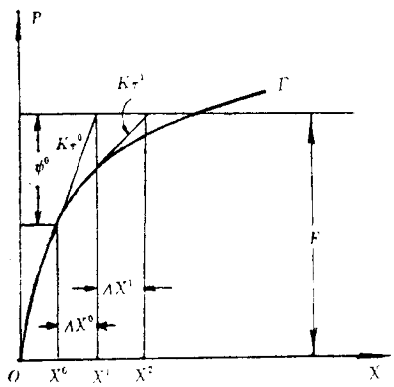


图 2-6　牛顿法

关于牛顿法的收敛准则，它与直接迭代法完全相同，可以采用公式（2-3）或（2-4）。

一般情况下，牛顿法的收敛性是好的，但在某些非线性问题中（诸如理想塑性或软化塑性问题）使用牛顿法，在迭代过程中，$\frac{\partial R}{\partial X}$ 矩阵可能是奇异的或病态的，这对矩阵求逆会出现困难。为此，我们可以引进一个阻尼因子 μ^n，将上述 $\frac{\partial R}{\partial X}$ 矩阵改写为

$$\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n + \mu^n I$$

其中 I 为单位阵，只要 μ^n 足够大，就会使 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n + \mu^n I$ 矩阵变为非奇异阵或使其病态性减弱。这时牛顿法中的迭代公式改写为

$$\left.\begin{aligned} \Delta X^{n+1} &= -\left[\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n + \mu^n I\right]^{-1} \cdot \psi(X^n) \\ X^{n+1} &= X^n + \Delta X^{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

其中 μ^n 的作用是改变矩阵 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n$ 的主对角元素，显然，当 $\mu^n \to 0$ 时，方程（2-7）的解将收敛到原问题的解。

应用直接迭代法和牛顿法求解非线性方程组时，在迭代过程中的每一步都必须计算 K^n 或 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n$ 矩阵，并求它们的逆阵。即每一次迭代都需要完全形成一个线性代数方程组并求解，这样的计算工作量是很大的。如果在牛顿法中，将每一次迭代中的 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n$ 均采用 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^0$ 替代，即将（2-6）式改写为

$$\left.\begin{aligned} \Delta X^{n+1} &= -\left[\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^0\right]^{-1} \cdot \psi(X^n) \\ X^{n+1} &= X^n + \Delta X^{n+1} \end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

这种算法叫做修正牛顿法，它不必每一次迭代都形成 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^n$，只需计算一次 $\left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^0$ 并进行三角

分解，每次迭代只需对 $\psi(X^n)$ 进行回代。

修正牛顿法，可用类似于图 2-5 和图 2-6 的图形表示，即如图 2-7 所示。

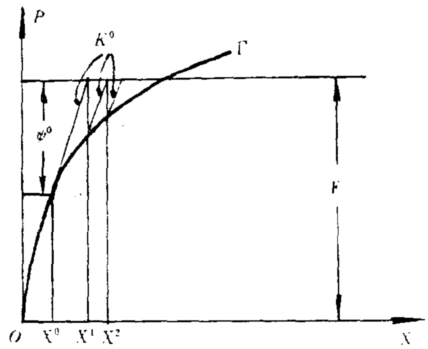


图 2-7　修正牛顿法

运用修正牛顿法解非线性问题，显然每一次迭代的计算量将大大地减少，但收敛速度也随之降低。为提高修正牛顿法的收敛速度，可以采用以下两种办法。

1) 过量修正技术，即按(2-8)式的第一式求得 ΔX^{n-1} 后，将新的近似解表示为

$$X^{n+1} = X^n + \lambda^n \Delta X^{n+1} \qquad (2\text{-}9)$$

其中 λ^n 可以是一个大于 1 的标量，也可以是一个分量大于 1 的对角阵，称之为过量修正因子。这样，问题就归结为如何选择过量修正因子。它可以凭借经验直接选取，也可以运用最优化方法中的一维搜索方法，求得最优的值 $\bar{\lambda}^n$，即计算

$$\psi(\bar{\lambda}^n) = \min\psi(\lambda^n) = \min[K(X^n + \lambda^n \Delta X^{n-1}) \cdot (X^n + \lambda^n \Delta X^{n-1}) + F]$$

2) 在迭代过程中，按某种间隔更换 $(\frac{\partial R}{\partial X})^n$ 以提高收敛速度。一般在开始迭代时选用 $(\frac{\partial R}{\partial X})^0$，经过若干次(如 j 次)迭代后，重新计算 $(\frac{\partial R}{\partial X})^j$，并以此替代 $(\frac{\partial R}{\partial X})^0$。这样，收敛速度会有较大的提高。

三、拟牛顿法

为了尽可能保持牛顿法收敛快的特点，又减少计算工作量，人们提出一种拟牛顿法。

拟牛顿法的主要思想是在每次迭代后，不重新计算 $(\frac{\partial R}{\partial X})^n$，而仅用一种简单的方式对 $(\frac{\partial R}{\partial X})^{n-1}$ 矩阵加以修正。这样做显然比牛顿法计算量要小。同时也不像修正牛顿法那样应用不变矩阵 $(\frac{\partial R}{\partial X})^0$。拟牛顿法的关键是如何选择一个简单的矩阵修正方法。

拟牛顿法中对 $(\frac{\partial R}{\partial X})$ 的修正首先要满足拟牛顿方程。

在单变量情况下，可以用差商近似地替代导数，即

$$\frac{\psi(X^{n+1}) - \psi(X^n)}{X^{n+1} - X^n} = \frac{d\psi(X^{n+1})}{dX} = (\frac{dR}{dX})^{n+1}$$

这种性质，我们可以称为牛顿性质。

对于一般的 N 个自由度情况下，可以用

$$(\frac{\partial R}{\partial X})^{n+1}(X^{n+1} - X^n) = \psi(X^{n+1}) - \psi(X^n) \qquad (2\text{-}10)$$

表示，它具有相似于差商的性质(或称拟牛顿性质)，并称方程(2-10)为拟牛顿方程。为了以后推导公式的书写方便，令