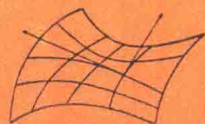


新型圆柱蜗杆传动

〔苏联〕Ф.Л. 李特文著



上海科学技术出版社

新型圓柱蝸杆傳动

〔苏联〕Ф. Л. 李特文 著

陈 永 譯
国 楷 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书阐述新型圆柱蜗杆传动的啮合原理、几何计算和制造的基本知识。新型圆柱蜗杆在轴向和法向截面内的齿廓呈凹形,这样有利于提高承载能力和传动效率。

本书可供从事机器制造的工程技术人员和大专院校有关专业师生参考。

НОВЫЕ ВИДЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

Ф. Л. Литвин

Машигиз · 1962

新型圆柱蜗杆传动

陈 永 译

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)
上海市书刊出版业营业许可証出 093 号

上海市印刷六厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印张 3 10/32 排版字数 85,000
1965 年 11 月第 1 版 1965 年 11 月第 1 次印刷
印数 1—7 500

统一书号 15119·1840 定价(科六) 0.50 元

前 言

最近一个时期, 新型圆柱蜗杆传动得到了较普遍的推广。它和以前所采用的圆柱蜗杆传动不同之处在于, 新型蜗杆传动的蜗杆在轴向和法向截面内的齿廓不是凸形, 而是凹形。新型蜗杆传动在承载能力和效率方面, 都大大超过了以前所熟知的圆柱蜗杆传动, 并且接近弧面蜗杆传动。

本书将叙述新型蜗杆传动的啮合原理和几何计算。新型蜗杆具有凹形齿廓, 并且用环面砂轮进行磨削加工。书中还叙述了制造这类蜗杆传动所必需的知識。

为了解决上面列举的各个问题, 需要读者对啮合原理有足够的了解, 所以在第一章里, 将讨论有关啮合原理的基本知識。作者认为, 第一章内的许多内容, 对于从事一般啮合原理研究的人员, 也是有兴趣的。

由于我们是来研究新型蜗杆传动的啮合特点, 因此, 作者有必要制定比以前所采用的更为有效的研究方法。为此, 在本书里, 将叙述这样一些新方法: a) 瞬时接触线[†]的求法; б) 确定蜗轮轮齿不发生根切的条件; в) 啮合区域的求法; г) 确定啮合区域上枢纽线和下枢纽线的有效方法。

书中许多结论作者以前尚未发表过。

本书 19、25 和 27 三节是根据作者和 И. П. Бернадский 的研究成果写成的。

[†] 为了避免和点啮合齿轮传动中齿面的“接触线”相混淆, 我们把本书中的“линия контакта”均译为“瞬时接触线”, 这样似乎更符合实际情况。——譯校者注

目 录

前 言

緒 論 1

第一章 嚙合原理和嚙合几何学的基本知識 3

1. 蜗杆螺旋齿面方程式的两种形式 3
2. 有关矩陣的知識 8
3. 坐标变换 12
4. 选用的坐标系 15
5. 相对运动速度向量的表达式 19
6. 嚙合方程式和瞬时接触綫方程式 22
7. 嚙合軸 24
8. 嚙合樞紐綫 27
9. 嚙合区域 30
10. 蜗輪輪齿的根切 33
11. 几何計算公式 42
12. 选择蜗杆傳动合理的几何形式 50

第二章 I 型蜗杆傳动 53

13. I 型蜗杆的磨削加工方法和砂輪表面上的瞬时接触綫 53
14. I 型蜗杆螺旋齿面的方程式 57
15. I 型蜗杆的端面齿廓 60
16. I 型蜗杆傳动的嚙合樞紐綫 60
17. I 型蜗杆傳动的瞬时接触綫 62
18. 飞刀刀片齿廓的計算和檢驗 I 型蜗杆的样板輪廓的計算 63
19. I 型蜗杆傳动的計算例题 67

第三章 II 型蜗杆傳动 72

20. II 型蜗杆的磨削加工方法和砂輪表面上的瞬时接触綫 72
21. II 型蜗杆螺旋齿面的方程式 75

22. II 型蝸杆傳動的嚙合樞紐綫	77
23. II 型蝸杆傳動的瞬時接觸綫	79
24. II 型蝸輪輪齒的根切	81
25. 關於選擇 II 型蝸杆傳動幾何參數的幾點建議	82
26. 飛刀刀片齒廓的計算和檢驗 II 型蝸杆的樣板輪廓的計算	84
27. II 型蝸杆傳動的計算例題	87
第四章 工藝知識概要	94
28. 蝸杆磨削加工的一些特點	94
29. 切制蝸輪輪齒	96
參考文獻	100

緒 論

力图提高圆柱蜗杆傳动的承载能力和傳动效率，导致了新型蜗杆傳动的出現。新型蜗杆在軸向和法向截面內的齿廓呈凹形。蜗杆螺旋齿的凹面和蜗輪齿的凸面相共軛。两共軛齿面組成的瞬时接触綫的形状，有助于改善油膜形成的条件（參看第 12、19 和 27 三节）。在承载能力和傳动效率方面，凹形齿廓蜗杆傳动大大超过以前所熟知的各种圆柱蜗杆傳动，并且接近于弧面蜗杆傳动。

大家知道，为了保証两齿面的硬度差，蜗杆先要热处理，然后再进行磨削加工。从工艺角度来看，蜗杆螺旋齿面能用形状简单的砂輪进行磨削加工，最有前途。

本书将研究蜗杆用环面砂輪磨削加工的蜗杆傳动的几何問題。砂輪表面在砂輪軸向截面內的截綫是一段圆弧。在磨蜗杆时，砂輪軸和蜗杆軸相錯，并且砂輪对蜗杆或蜗杆对砂輪的相对运动是螺旋运动。

根据用环面砂輪形成蜗杆螺旋面方法的不同，我們把蜗杆分为 I 型和 II 型。I 型蜗杆是西德采用的方案，II 型蜗杆是作者推荐的方案。当根据 I 型方案形成蜗杆螺旋齿面时^[10, 11]，砂輪和蜗杆两軸間的相錯角 γ_a 等于蜗杆分度圆柱上螺旋綫的升角，并且把砂輪在軸向截面內的齿廓的半徑 ρ ，选成和蜗杆分度圆柱的半徑相等。下面将証明，这样的砂輪表面和蜗杆齿面的瞬时接触綫是一条空間曲綫，并且蜗杆齿面将由一个相当复杂的三参数方程式和一个附加的参数关系式来决定。我們认为，I 型蜗杆有如下缺点：a) 修整砂輪将引起砂輪直徑和砂輪与蜗杆两軸間的最短距离的减小，这样就会造成磨出的蜗杆齿面发生形状的改变；b) 蜗杆傳动的瞬时接触綫的形状，不可能完全消除咬住的危險。

作者証明，如果安装砂輪的各参数值是經過特殊計算而求得

的,則可使砂輪表面和蝸杆齒面的瞬時接觸綫不再是空間曲綫,而是和砂輪的軸向齒廓重合的平面曲綫。这个特点就是构成 II 型蝸杆的理論基础^[9,12]。在这种情况下,蝸杆齒面为一形式比較简单的两参数方程式。这样可显著地使嚙合的研究簡化,并且易于寻求要設計的蝸杆傳动的最佳参数。修整砂輪,以及由此而引起的砂輪軸和蝸杆軸之間最短距离的变化,不会給磨出的蝸杆齒面带来任何影响。同时,我們能够得到形状上比較好的蝸杆齒面和蝸輪齒面的瞬時接觸綫,这就会使蝸杆傳动的承载能力和傳动效率得到提高。蝸輪輪齒发生根切是 II 型蝸杆傳动的缺陷。

有关凹形齿蝸杆傳动的嚙合原理和制造問題的文献很少。在西德,曾发表过 G. Niemann 的文章^[10]。其中叙述了凹形齿蝸杆傳动試驗研究的結果,但是这种蝸杆傳动的嚙合原理和嚙合几何学并未闡明。

在苏联,叙述凹形齿蝸杆傳动嚙合原理和嚙合几何学的著作有 И. С. Кривенко^[5]、Ф. Л. Литвин、И. К. Корышев^[7] 以及 И. П. Бернадский 等人的文章。但是,經過磨削加工的蝸杆的傳动几何学,在上述文章中沒有談到。

Л. С. Борович 对本书中所研究的蝸杆傳动进行了試驗研究,并且求出了这种蝸杆傳动的承载能力和傳动效率。

用环面砂輪进行磨削加工而得的蝸杆,其傳动几何学的主要研究成果,曾在作者的著作^[9]中叙述过。在本书里,对这类蝸杆傳动的几何問題叙述得比較詳細,并且补充了新的研究成果。

凹形齿蝸杆傳动各个参数的选择,对蝸杆齒面和蝸輪齒面瞬時接觸綫的形状,以及蝸輪輪齒的根切条件有很大的影响。为了确定这些参数的合理数值,本书作者和 И. П. Бернадский 一起进行了专门的研究,部分成果在本书 19、25 和 27 三节中作了叙述。

第一章 啮合原理和啮合几何学 的基本知識

1. 蜗杆螺旋齿面方程式的两种形式

圆柱蜗杆的螺旋齿面是等螺距的螺旋面。这样的螺旋面，可以用任意一条曲线繞蜗杆軸做螺旋运动来形成。

从微分几何学中知道，曲面方程式最好以下列参数形式給出：

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(\psi, \vartheta), \\ y_1 &= y_1(\psi, \vartheta), \\ z_1 &= z_1(\psi, \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

参数 ψ 和 ϑ 是决定曲面上一点的位置的曲线坐标。从坐标原点到曲面上一点的向量 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\psi, \vartheta)$ 是两个数量参数 ψ 和 ϑ 的向量函数。

如果取一个参数为常数，例如让 $\vartheta = \vartheta_i$ ，那么 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\psi, \vartheta_i)$ 是曲面上坐标曲线 ψ 的方程式。这意味着，当 ϑ 值固定，并且改变 ψ 之值时，向量 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\psi, \vartheta_i)$ 的端点将在曲面上沿坐标曲线 ψ 移动。同样，如果固定参数 ψ 的值，改变参数 ϑ ，则可以在曲面上得到另一条坐标曲线 ϑ (图 1)。

假定在螺旋齿的工作部分，其表面是連續的，即 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(\psi, \vartheta)$ 是自变量 ψ 和 ϑ 的連續函数，則通过齿面上的每一个点 M 应当有两条坐标曲线：а) $\psi = \text{const}$ ；б) $\vartheta = \text{const}$ 。并且这两条坐标曲线在点 M 处有两条彼此不相重合的切线。

在輪齿的工作部分，齿面在每个点应当有一个切面。在 M 点，这个切面的位置可这样来确定，即該切面应当包含通过 M 点的两条坐标曲线的切线。在坐标曲线上，例如 ψ 上的向量 $\mathbf{r}_1$ ，仅仅与参数 (ψ) 有关，因为这条坐标曲线是在 $\vartheta = \text{const}$ 的情况下画出的。

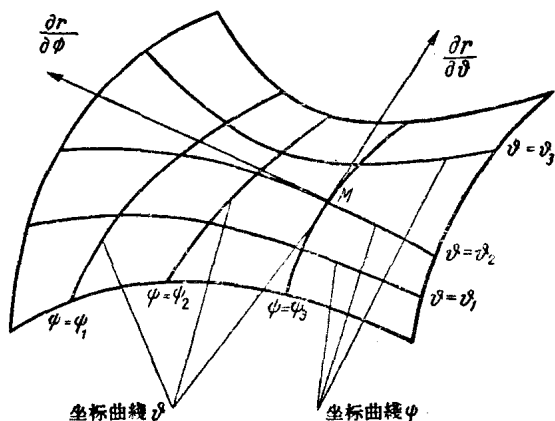


图 1 推导齿面方程式

坐标曲线的方向,可由向量 $d\mathbf{r}_1/d\psi$ 和 $d\mathbf{r}_1/d\theta$ 的方向来确定。在曲面上,给定点的法线 $\mathbf{n}_1$ 与包含向量 $d\mathbf{r}_1/d\psi$ 和 $d\mathbf{r}_1/d\theta$ 的平面垂直,因此

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \psi} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

法线向量在坐标轴上的投影:

$$\left. \begin{aligned} n_{x_1} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \psi} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z_1}{\partial \psi} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial y_1}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \theta} - \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial \psi}, \\ n_{y_1} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \psi} & \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \psi} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial z_1}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \theta} - \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \psi}, \\ n_{z_1} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \psi} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y_1}{\partial \psi} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \theta} - \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

法线单位向量的投影——法线的方向向量 $\mathbf{e}$, 由下列表达式确定:

$$\left. \begin{aligned} e_{x_1} &= kn_{x_1}, \\ e_{y_1} &= kn_{y_1}, \\ e_{z_1} &= kn_{z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

式中标准化因子

$$k = \frac{1}{\sqrt{n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2}}.$$

法綫方向向量的投影分別等于法綫和各个坐标軸夹角的余弦。

在本书里，研究用盘状砂輪进行磨削加工所形成的蝸杆螺旋齿面(参看第 13 节)。蝸杆螺旋齿面是砂輪表面的包絡面，其方程式如下：

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(\psi, \vartheta, \beta), \\ y_1 &= y_1(\psi, \vartheta, \beta), \\ z_1 &= z_1(\psi, \vartheta, \beta); \\ f(\psi, \vartheta) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

式中 ψ 和 ϑ ——砂輪表面的参数；

β ——决定蝸杆对砂輪相对运动的参数。

在方程式(1.5)中，含有三个参数，但是它們当中只有两个是独立的，因为 ψ 和 ϑ 由下式所联系：

$$f(\psi, \vartheta) = 0.$$

如果从方程式(1.5)中消去一个参数，那么可以把这些方程式改为两参数形式。但是，这不是永远可能办到的。在这样的情况下，最好利用蝸杆螺旋齿面方程式的另一种形式。

从方程式(1.5)中，容易求出蝸杆端面齿廓的方程式，即以 $z_1=0$ 的平面，截蝸杆螺旋齿面所得的齿廓曲綫方程式。这里的 z_1 代表蝸杆軸。令方程式(1.5)中的 $z_1=0$ ，可以算出端面齿廓的坐标 x_1 和 y_1 。

利用公式：

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \\ \theta &= \arctg\left(\frac{y_1}{x_1}\right), \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

可以计算出蜗杆端面齿廓的极坐标 r 和 θ 。在方程式 (1.6) 中,
 r ——蜗杆端面齿廓向径的模; θ ——决定向径 r 位置的极角。

蜗杆螺旋齿面可用蜗杆端面齿廓的螺旋运动来形成。

设在坐标系 (x_0, y_0, z_0) 中 (图 2a), 蜗杆端面齿廓的方程式为:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= r(\theta) \cos \theta, \\ y_0 &= r(\theta) \sin \theta, \\ z_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

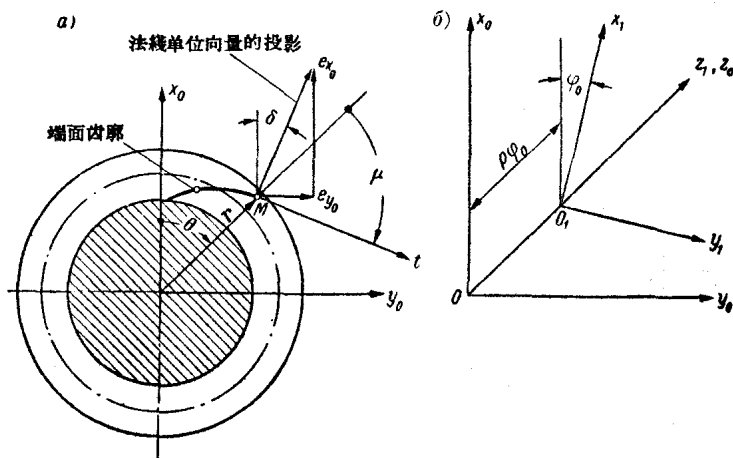


图 2 推导圆柱蜗杆螺旋齿面的方程式

让坐标系 x_0, y_0, z_0 绕 z_1 轴作螺旋运动 (图 2b)。利用两坐标系 s_1 和 s_0 之间的关系式, 我们将得到:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos \varphi_0 + y_0 \sin \varphi_0 = r \cos (\theta - \varphi_0), \\ y_1 &= -x_0 \sin \varphi_0 + y_0 \cos \varphi_0 = r \sin (\theta - \varphi_0), \\ z_1 &= -p\varphi_0^\dagger. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

† 原书刊误为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 \cos \varphi_0 - y_0 \sin \varphi_0 = r \cos (\theta + \varphi_0), \\ y_1 &= y_0 \sin \varphi_0 + x_0 \cos \varphi_0 = r \sin (\theta + \varphi_0), \\ z_1 &= p\varphi_0. \end{aligned} \right\}$$

——译校者注

在这些公式中, $r=r(\theta)$; 螺旋参数 p 是当蜗杆旋转一个弧度时, 其轴向的移动量; 对于右旋蜗杆, 参数 p 取正号, 对于左旋蜗杆, 参数 p 取负号。在图 26 中, 表示出了右旋蜗杆螺旋齿面的形成方法。

若引入 $\theta' = \theta - \varphi_0^\dagger$, 则方程式 (1.8) 可写成:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta', \\ y_1 &= r \sin \theta', \\ z_1 &= p(\theta' - \theta). \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

在下文的第 6 和第 10 两节中, 可以看出, 利用这种蜗杆螺旋齿面方程式进行研究时, 比利用方程式 (1.5) 要优越得多。

在图 2a 中, 用 μ 表示向径 r 和端面齿廓切线 Mt 的正方向之间的夹角, 切线 Mt 指向极角 θ 增加的一方。从微分几何中知道, 角 μ 可由下式求出:

$$\mu = \operatorname{arctg} \left(\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} \right). \quad (1.10)$$

最好是通过齿面法线上方向向量 (1.5) 的投影来求 μ 。根据图 2a 可写出:

$$\mu = 90^\circ - \theta + \delta = 90^\circ - \theta + \operatorname{arctg} \left(\frac{e_{y_0}}{e_{x_0}} \right). \quad (1.11)$$

下面我们还需要由方程式 (1.9) 求出的蜗杆齿面法线向量投影的表达式。

法线向量

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta'}. \quad (1.12)$$

式中 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(r, \theta')$ —— 齿面上一点的向径;

r 和 θ' —— 齿面的参数。

经过变换以后, 法线向量的投影用下式表示:

[†] 原书刊误为 $\theta' = \theta + \varphi_0$ 。——译者注

$$\left. \begin{aligned} n_{x_1} &= p \frac{\sin(\theta' + \mu)}{\cos \mu}, \\ n_{y_1} &= -p \frac{\cos(\theta' + \mu)}{\cos \mu}, \\ n_{z_1} &= r. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

法綫上方向向量的投影,由下式确定:

$$\left. \begin{aligned} e_{x_1} &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + r^2 \cos^2 \mu}} \sin(\theta' + \mu), \\ e_{y_1} &= -\frac{p}{\sqrt{p^2 + r^2 \cos^2 \mu}} \cos(\theta' + \mu), \\ e_{z_1} &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + r^2 \cos^2 \mu}} \cos \mu. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

在作者的著作^[8]中証明了,如果齿面是螺旋齿面,則法綫向量的投影和齿面的坐标之間的关系式为:

$$y_1 n_{x_1} - x_1 n_{y_1} = p n_{z_1} \quad (1.15)$$

或

$$y_1 e_{x_1} - x_1 e_{y_1} = p e_{z_1}. \quad (1.16)$$

下面将利用这一特性来簡化嚙合方程式(参看第 6 节)。

2. 有关矩陣的知識

在下文里,推导坐标变换公式时,我們將用到矩陣計算的初步知識。

矩陣是由数 a_{ij} 組成的表,这些数以一定的形式,在表中按行和列排列起来。下表可作为矩陣的例子:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

上一矩陣是方陣,因为在矩陣中行数等于列数。

如矩陣元素 a_{ij} 用双下标形式表示时,則第一下标表示行的号数;第二下标表示列的号数。行和列相交之处为元素 a_{ij} 。例如,

元素 a_{34} 的两个下标, 表示元素 a_{34} 位于第三行(第一下标是 3) 和第四列(第二下标是 4) 相交之处。

下面我们进行四阶方阵的运算, 它包含四个行和四个列。

相同阶数的两个方阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

的乘积, 是同一阶数的方阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \circ$$

上述两矩阵的乘法运算可写成下面的形式:

$$C = AB$$

矩阵 C 的元素由下式决定:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + a_{i4}b_{4j} \quad (2.1)$$

例如, 要求矩阵 C 第三行和第二列相交处的元素 c_{32} , 根据方程式(2.1), 这个元素 c_{32} 为:

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} \circ$$

不难看出, 要求的元素 c_{32} 是矩阵 A 第三行 ($i=3$) 的各个元素和矩阵 B 第二列 ($j=2$) 的相应各个元素的乘积之和。矩阵 A 、 B 和 C 中的相应元素均用方框圈出:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} & \boxed{a_{33}} & \boxed{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \boxed{b_{12}} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & \boxed{b_{22}} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & \boxed{b_{32}} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & \boxed{b_{42}} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & \boxed{c_{32}} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \circ$$

矩陣 A 和 B 的乘法規則可簡單地規定為「行乘列」法則。這個法則可以這樣來理解，為了確定矩陣 $C=AB$ 的元素 c_{ij} ，需要求包含在矩陣 A 第 i 行（要求的元素 c_{ij} 的第一下標）中的各個元素，和包含在矩陣 $B^\dagger$ 中的第 j 列（元素 c_{ij} 的第二下標）的對應元素的乘積之和。

必須預先說明，矩陣乘法不滿足交換律，即矩陣的乘積與因子的次序有關。換句話說，除了特殊情況以外，

$$AB \neq BA。$$

求兩個矩陣乘積的法則，可推廣到具有任意個因子相乘的情況。在那種情況下，它們服從結合律，即因子可以歸併為若干組，例如

$$(AB)C = A(BC)。$$

第一種情況 $[(AB)C]$ ，首先求乘積 $D=AB$ ，然後再求乘積 DC （而不是 CD ）；第二種情況，首先求 $E=BC$ ，然後再求乘積 AE （而不是 EA ）。

現在引入列矩陣的概念。列矩陣是由一個列組成的直列矩陣，例如：

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix}。$$

列矩陣可用方陣

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

來代替。

和兩個方陣相乘的情況相同，方陣和列矩陣的乘法運算也可以按「行乘列」法則來進行。

† 原書刊漏 B 。——譯校者注

两矩阵 A 和 B 的乘积, 这里

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{pmatrix},$$

可看为矩阵 A 和矩阵 B' 的乘积, 这里

$$B' = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这样, 我们将得到列矩阵

$$C = AB = AB' = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{41} \end{pmatrix}.$$

式中

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41};$$

$$c_{12} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41};$$

$$c_{13} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} + a_{34}b_{41};$$

$$c_{14} = a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} + a_{44}b_{41}.$$

例题 1 求两个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

的乘积。

$$\text{答案 } C = AB = \begin{pmatrix} 8 & 19 & 10 & 8 \\ 13 & 12 & 5 & -8 \\ 24 & 40 & 22 & 13 \\ 20 & 35 & 36 & 37 \end{pmatrix}.$$