新世纪高等学校教材名师导学与辅导丛书

高等数学名师指点

★ 解题方法与过关实战 ★

高等数学教学与命题研究组　编
北京大学数学科学学院　庄大蔚　主审

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学名师指点:解题方法与过关实战/高等数学教学与命题研究组编. - 北京:中国林业出版社,2002.9

ISBN 7-5038-3189-8

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064230 号

高等数学教学与命题研究组

主编:余 龙

编写:余 龙 刘丽英 罗爱兵 阳碧云

主审:庄大蔚

出版 中国林业出版社(北京市西城区刘海胡同 7 号 100009)

E-mail:cfphz@public.bta.net.cn 电话:66184477

发行 中国林业出版社

印刷 北京地质印刷厂

版次 2002 年 9 月第 1 版

印次 2002 年 9 月第 1 次

开本 850mm×1168mm 1/32

印张 14.25

字数 520 千字

印数 1~5 000 册

定价 16.00 元

前　言

高等数学是我国高等院校中的一门重要的理论基础课程，它不仅是学习理工科后续课程及在科学领域中进行理论研究和实践工作的必要基础，而且对学生其他能力的培养也起着重要的作用．如何更好地指导学生学好这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，以及如何帮助学生有效地备考，成为各院校共同关注的问题．

为了配合各高等院校高等数学的教学与学生的复习、备考，我们依托北京大学强大的师资力量，并根据高等学校数学教学大纲以及同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第五版）的严谨结构组织编写了本书．全稿由北京大学数学科学学院庄大蔚教授主审．

本书具有如下几个特点：

（1）本书专门针对学习者在高等数学这门课程中遇到的最大难点——解题与应试而编写，可作为高等院校本科、专科、专升本及其他各类在校学生课后的同步辅导和提高用书，更可作为参加自学考试、考研前的复习指南．

（2）在编写上本书以章为单位，充分突出其指导学习者综合运用知识解决问题并提高对所学知识的掌握程度的特点，同时紧跟教材和教学大纲，使读者能对高等数学这门课程进行系统掌握．

（3）本书以考点和知识点为主线，对高等数学考试中的常见题型和解题方法进行了系统而全面的总结和归纳，为读者指出了各类题型的解题方法和思路，能帮助学生举一反三地掌握这门课程，从而轻松应试．

（4）“内容提要”栏为教材中每章的重点内容和知识点的简单归纳，可使学习者对该章的知识进行集中、系统的掌握，即使没有教材也能全面复习和提高．

（5）“常见题型与解题技巧”栏为本书的重点．该栏以考点和知识

点为主线，串起高等数学考试中出现的各类题型，并对每一种题型的解题思路、方法和技巧进行了详细的分析、总结和归纳，同时精心编选例题，重点讲解，从而切实提高学习者的解题能力．

(6)根据教学经验，在“过关实战”栏中我们为学习者编选了大量典型习题和综合性较强的考研真题(含最新真题)，以使学习者通过多练、在做题的过程中消化和掌握知识，积累实战经验，为轻松过关做好充分准备．

(7)参加本书编写的编者均为一线教师，具有丰富的教学经验，因此在编写技巧指导和例题讲解等方面均由浅入深、循序渐进且在难度上层次分明，切合不同学习者的实际需要．

(8)同济大学主编的《高等数学》第五版相对第四版修订幅度较大，主要涉及函数、极限及向量代数等，并在内容和知识点上作了适当精简和合并．本书在紧靠第五版内容的同时，保留了第四版中的部分选修内容，以适应有更高要求的学习者的需要．

在本书的编写过程中，尽管我们精益求精，但由于水平有限，书中难免仍存在不妥或需商榷之处，恳请读者指教．

高等数学教学与命题研究组

2002 年 8 月

目　录

第一章 函数与极限

内容提要

一 基本概念

1.映射

设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作 $f:X \to Y$，其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$，而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即 $R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

(1) 映射的三要素：集合 X，集合 Y，对应法则 f.

(2) 对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是惟一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是惟一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$.

2.函数

设数集 $D \subset R$，则称映射 $f:D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y = f(x)$，$x \in D$. x 叫自变量，y 叫因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$.

函数的两个要素是定义域和对应法则．

两个函数相等当且仅当其定义域和对应法则完全相同．

3.函数的几种特性

(1) 有界性：$f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$，如果存在正数 M，使得对一切 $x \in X$，都有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 X 上有界．

$f(x)$ 在 X 上有界当且仅当它在 X 上既有上界又有下界．

(2) 单调性：$f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于 I 上任意两点 x_1 和

x_2,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加;当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

(3) 奇偶性:若 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$,则必有 $-x \in D$).如果对于任一 $x \in D$,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数,其图形关于 y 轴对称;如果对于任一 $x \in D$,恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数,其图形关于原点对称,并有 $f(0) = 0$.

函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数无奇偶性可言.

(4) 周期性:设 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 T,使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm T) \in D$,且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的周期.

通常所说的周期是指最小正周期,但应注意并不是任何周期函数都有最小正周期.

4. 函数的相关定义

(1) 函数的图形:平面上的点集 $\{P(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x), x \in D$ 的图形.

(2) 复合函数:设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义,且 $g(D) \subset D_1$,则由下式确定的函数 $y = f[g(x)], x \in D$ 称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量.通常记为 $f \circ g$,即 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.

注:复合(运算)的结合律成立,即:$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,但交换律一般不成立,即:$f \circ g \neq g \circ f$.

(3) 反函数:设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$,称此映称 f^{-1} 为函数 f 的反函数.一般地,$y = f(x), x \in D$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x), x \in f(D)$.

5. 函数的运算

和(差)$f \pm g$:$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$;

积 $f \cdot g$:$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$;

商 $\dfrac{f}{g}$:$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$.

6. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

7. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构

成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数．

分段函数往往不是初等函数，但不能说分段函数都不是初等函数．

8. 极限

(1) 数列极限：数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 或极限存在 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 整数 $N > 0$, 当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$

(2) 函数极限：

① $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当 $|x| > X$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

由该定义可知，当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关．

③ 左、右极限

左极限：$f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

右极限：$f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

注：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$

9. 渐近线

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则称 $y = A$ 是 $f(x)$ 的一条水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则称 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - ax] = b$，则称 $y = ax + b$ 是 $f(x)$ 的一条斜渐近线．

10. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小：

如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小．特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n \to \infty$ 时的无穷小．

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有 $|f(x)|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$|f(x)|<\varepsilon$

无穷小量不是绝对值很小很小的定数.零是可以作为无穷小量的惟一的常数函数.

(2) 无穷小的阶:

设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小,且 $\alpha(x)\neq 0$,$\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限,则:

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0 & \text{称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 高阶的无穷小,记作 }\beta=o(\alpha)\\ \infty & \text{称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 低阶的无穷小}\\ c\neq 0 & \text{称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是同阶无穷小}\\ 1 & \text{称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 是等价无穷小,记作 }\alpha\sim\beta\end{cases}$$

显然等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0\quad(k>0)$,则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(3) 无穷大:

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数 δ(或正数 X),只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$),对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式 $|f(x)|>M$,则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.

无穷大主要有以下几种形式:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists$ 正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n|>M$;

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有

$|f(x)|>M$;

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$|f(x)|>M$.

注:① 无穷大量实质上是变量极限不存在的一种形式;② 无穷大量一定是无界函数,但是无界函数不一定是无穷大量.

(4) 无穷小与无穷大的关系:

在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

11. 函数的连续性

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续有以下两个等价定义:

定义1: $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续,此定义包含三个内容:① $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义;② $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$;③ $f(x_0) = A$.

定义2:设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,且 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$,则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(2) 函数在开区间 (a,b) 内连续:

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

(3) 函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续:

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,在左端点 a 右连续,在右端点 b 左连续,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

基本初等函数在其定义域内都是连续的.

初等函数在其定义区间内都是连续的.

12. 函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义.在此前提下,如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

(1) 在 $x = x_0$ 没有定义;(2) 虽在 $x = x_0$ 有定义,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;(3) 虽在 $x = x_0$ 有定义,且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续,而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

函数的间断点分两类:

(1) 第一类间断点: $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 都存在的间断点称为第一类间断点.进一步再区分:左右极限相等者称作可去间断点,不相等者称作跳跃间断点.

(2) 第二类间断点: $f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 不都存在的间断点称作第二类间断点.常见的有无穷间断点和振荡间断点.

二 基本定理、性质、推论

1. 数列极限的性质

(1)(惟一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限惟一.

(2)(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则数列 $\{x_n\}$ 有界.

注: 逆命题不一定成立,即有界数列不一定收敛.

(3)(保号性)如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$,且$a > 0$(或$a < 0$),那么存在正整数$N > 0$,当$n > N$时,都有$x_n > 0$(或$x_n < 0$).

推论:如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n \geqslant 0$(或$x_n \leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$,那么$a \geqslant 0$(或$a \leqslant 0$).

(4) 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任一子数列也收敛于a.

2.函数极限的性质

(1) 惟一性:若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则极限值惟一.

(2) 局部有界性:如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$,那么存在常数$M > 0$和$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时,有$|f(x)| \leqslant M$.

(3) 局部保号性:如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A$,且$A > 0$(或$A < 0$),则存在着点$x_0$的某一空心邻域$\mathring{U}(x_0)$,当$x \in \mathring{U}(x_0)$时有$f(x) > 0$[或$f(x) < 0$].

(4) 函数极限与数列极限的关系:如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列,且满足:$x_n \neq x_0 \quad (n \in N^+)$,那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

(5) 四则运算性质:若$\lim f(x) = A$,$\lim g(x) = B$,且A、B都有限,则

① $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$, ② $\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

③ 若$B \neq 0$,则$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

3.极限存在的判别准则

(1) 数列的两边夹法则(夹逼定理):若存在正整数N,当$n > N$时,恒有$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n = \lim\limits_{n\to\infty}z_n = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

(2) 单调有界定理:单调有界数列必有极限,即单调上升数列有上界,则必有极限;单调下降数列有下界,则必有极限.

(3) 函数的两边夹法则:当$x_0 \in \mathring{U}(x_0, r)$(或$|x| > M$)时,有$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x) = a$,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x) = a$ (a有限或为$\pm\infty$)

(4) 柯西极限存在准则:数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是:对于任意给定的正数ε,存在着这样的正整数N,使得当$m > N, n > N$时,就有$|x_n - x_m| < \varepsilon$.

4.无穷小的运算性质

(1) 有限个无穷小的和、积仍为无穷小.

(2) 无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小.

几个常用的有界函数:当$x \in (-\infty, +\infty)$时,

$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1,\ |\arctan x|\leqslant \pi/2,\ |\text{arccot}\,x|\leqslant \pi$

(3) 无穷小(不取零值)的倒数为无穷大,无穷大的倒数为无穷小.

(4)β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件是 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

(5) 若 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 都是无穷小,且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$,即在极限的运算过程中,乘除因子可用其等价的无穷小来代替.

5.常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时,常用的等价无穷小有:

$$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$\ln(1+x)\sim x,e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{x}{n},(1-ax)^{\frac{1}{n}}-1\sim-\frac{a}{n}x$$

6.连续函数的运算

(1) 连续函数和、差、积、商的连续性

若 $f(x)$、$g(x)$ 都在点 x_0 连续,则 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\frac{f(x)}{g(x)}$ 等都在点 x_0 连续[其中$\frac{f(x)}{g(x)}$中,要求 $g(x_0)\neq 0$].

(2) 复合函数

$y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续,$u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,且 $u_0=g(x_0)$,则函数 $y=f[g(x)]$ 在 x_0 连续.

(3) 函数 $y=f(x)$ 在 I_x 上单调连续,则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调连续.

(4) 初等函数

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的;一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

7.闭区间上连续函数的性质

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则

(1) 有界性与最大值最小值定理:在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

(2) 介值定理:$f(x)$ 在$[a,b]$上必取得介于最大值与最小值之间的任何值

(3) 零点定理:若 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.

(4) 一致连续性定理:如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则它在该区间上一致连续.

常见题型与解题技巧

一 函数的定义及性质

1.函数的定义域

△【例 1】 设 $y=f(x)$ 的定义域为[0,1],求下列复合函数的定义域:

(1) $y=f(x^2)$

(2) $y=f(\mathrm{sgn}x)$,其中 $\mathrm{sgn}x$ 为符号函数,即 $\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

(3) $y=f(\sin x)$

解 (1) 使 $u=x^2$ 的值域为[0,1]时相应的定义域为[-1,1],故 $y=f(x^2)$ 的定义域为[-1,1].

(2) 易知当 $x\geqslant 0$ 时,$u=\mathrm{sgn}x$ 的值域包含于[0,1],故 $y=f(\mathrm{sgn}x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

(3) 要使 $u=\sin x$ 的值域属于[0,1],则相应的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $(k\in Z)$,故 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$.

技巧 一般地,如果已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域,即求 $u=\varphi(x)$ 的定义域中最大部分使得相应的值域等于或包含于 D.

2.求复合函数

△【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x^2} & |x|>1\end{cases}$,$g(x)=\ln x$,求复合函数的解析式:$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 先研究 $g(x)=\ln x$ 的值域与定义域的关系:

当 $x>\mathrm{e}$ 时,$\ln x>1$;当 $0<x<\mathrm{e}^{-1}$ 时,$\ln x<-1$;当 $\mathrm{e}^{-1}\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$ 时,$-1\leqslant \ln x\leqslant 1$

于是 $f[g(x)]=f(\ln x)=\begin{cases}\ln^2 x & |\ln x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{\ln^2 x} & |\ln x|>1\end{cases}$

即 $$f[g(x)]=\begin{cases}\ln^2 x & e^{-1}\leqslant x\leqslant e\\ \dfrac{1}{\ln^2 x} & x>e \text{ 或 } 0<x<e^{-1}\end{cases}$$

同理可得 $$g[f(x)]=\ln f(x)=\begin{cases}\ln x^2 & 0<|x|\leqslant 1\\ -\ln x^2 & |x|>1\end{cases}$$

3.函数相等的判断

△**【例 3】** 判断下列函数是否相等,如不等,为什么?

(1)$f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$,$g(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$

(2)$f(x)=x$,$g(x)=\sqrt{x^2}$

解 (1) 由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都为:$(-1,1)$,且对应法则相同,故 $f(x)=g(x)$.

(2) 由于 $g(x)=|x|$,即当 $x<0$ 时,$g(x)=-x$,而 $x<0$ 时,$f(x)=x$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同,因此 $f(x)\neq g(x)$.

技巧 两个函数当且仅当其对应法则和定义域完全相同时,它们才相等,否则它们表示不同的函数.

4.函数的奇偶性与周期性

△**【例 4】** 若 $G(x)$ 为偶函数,判断函数 $y=G(x)(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2})$ $(a>0,a\neq 1)$ 的奇偶性.

解 令 $f(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,显然其定义域为$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$,关于原点对称.

而 $$f(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=-(\frac{a^x-1+1}{a^x-1}-\frac{1}{2})$$
$$=-(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2})$$

故 $f(x)=-f(-x)$,即 $f(x)$ 为奇函数.

因 $G(x)$ 为偶函数,故 $y=G(x)f(x)=G(x)(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2})$ 为奇函数.

技巧 一般地,判断一个函数的奇偶性应先看它的定义域是否关于原点对称,然后再比较 $f(-x)$ 与 $f(x)$,即若 $f(-x)=-f(x)$ 则为奇函数,若 $f(-x)=f(x)$ 则为偶函数.

△【例 5】 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数,证明 $f(ax)\quad(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

证明 令 $F(x)=f(ax)$,则

$$F(x+\frac{T}{a})=f[a(x+\frac{T}{a})]=f(ax+T)=f(ax)=F(x)$$

故 $f(ax)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

二 极限的概念

利用函数极限的定义证明极限的基本步骤如下:

(1) 由不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,解得 $|x|>h(\varepsilon)$ 或 $|x-x_0|<h(\varepsilon)$;

(2) 确定常数 X 或 δ;

(3) 由极限定义得证.

△【例 6】 用极限的定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x-1}=1$

证明 (1) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{1+x^2}{2x^2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$,即要使 $\dfrac{1}{2x^2}<\varepsilon$,也即要使 $|x|>\sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$

故只需取 $X=\sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$,则当 $|x|>X$ 时,有 $\left|\dfrac{1+x^2}{2x^2}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 恒成立,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\forall\varepsilon>0$,要使 $\left|\dfrac{1}{2x-1}-1\right|<\varepsilon$,即要使 $\left|\dfrac{2(x-1)}{2x-1}\right|<\varepsilon$

不妨设 $0<|x-1|<\dfrac{1}{4}$,则 $\quad\dfrac{1}{2}<2x-1<\dfrac{3}{2}$

故只需使 $\quad\left|\dfrac{2(x-1)}{\frac{1}{2}}\right|<\varepsilon$,即 $\quad|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$

因此取 $\delta=\min(\dfrac{1}{4},\dfrac{\varepsilon}{4})$,则当 $0<|x-1|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{2x-1}-1\right|=\left|\frac{2(x-1)}{2x-1}\right|<4|x-1|<\varepsilon$$

恒成立,所以 $\quad\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x-1}=1$

技巧　(2) 中，为了放大不等式，也可先限制 $0<|x-x_0|<\delta_1$，以便于进行不等式的放大，将 $|f(x)-A|$ 放大为 $\varphi(x)$，再由 $\varphi(x)$ 得 $|x-x_0|<\delta_2$，最后取 $Z=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ 即可．值得注意的是，这种限制必须按自变量 x 的变化过程来确定，不能随意限制．

三　极限的性质与计算

1. 利用极限的四则运算法则求极限

△**【例 7】**　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(x+t)^3-x^3}{t}$　　(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^2+x-2}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3}\right)$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}$

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{[(x+t)-x][(x+t)^2+(x+t)x+x^2]}{t}$

$$=\lim_{t\to0}[(x+t)^2+(x+t)x+x^2]=3x^2$$

技巧　以上求极限的第一步中，我们将分子分母同时约去了 t，这是合理的．因为当 $t\to0$ 时，t 是无限趋近于 0 而没有达到 0，可认为 $t\neq0$，因此可以约去．

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{(x+1)(x-1)(x+2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=-\dfrac{1}{6}$

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}$

$$=\lim_{x\to-8}\frac{(1-x-9)(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)}$$

$$=-\lim_{x\to-8}\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{4+4+4}{3+3}=-2$$

技巧　对于含有根式的 $\dfrac{0}{0}$ 型无理式极限，应先将其分子、分母有理化．

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{6}$$

(5) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}\sqrt{n^2+1}-\dfrac{1}{n}\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}}}=1$