东北师范大学数学函授参考資料

解析几何学

上 册

孙福元 編
楊蔭藩 校

吉林人民出版社

东北师范大学数学函授参考資料

解 析 几 何 学

上 册

孙 福 元 編
楊 蔭 藩 校

吉 林 人 民 出 版 社

1957·長 春

解析几何学 上册

孙穪元 編
楊蔭藩 校

吉林人民出版社出版 （長春市斯大林大街）吉林省书刊出版业營业許可証出字第1号
長春新生企业公司印刷 新华書店吉林省分店发行
开本：850×1168 1/32 印張：6½ 字数：180,000 印数：7,500 册
1957年 8 月第 1 版 1957年 8 月第 1 版第 1 次印刷

統一书号：13091·11 定价（8）：0.76元

緒　　言

《几何》是数学的一个主要分科，在数学的分科里，除了研究图形性質的几何以外，还有研究数量关系的代数和分析兩个主要分科。

在几何学里，对于同一研究对象，研究方法可以是不同的，可以采用所謂綜合方法，也可以采用解析方法。綜合方法一般是就几何图形直接来研究它的性質的一种方法；而解析方法則与綜合方法不同，它是通过所謂座标法間接来研究几何图形性質的。座标法的基本观念，在于用数表示点，特别用变数表示动点，把几何图形看作点的集合或軌迹。这样就有可能用函数或方程式来表示几何图形，然后再从函数关系的几何意义推出关于图形的几何結論。

綜合方法与解析方法都有它自己的特点。譬如，綜合方法可以就图形的巧妙变化，非常直观地，簡捷地推出几何結論，或者进一步发見其它新的几何性質。但是綜合方法只能局限于研究比較簡單的几何图形，如直綫、圓以及它們組成的图形等。对于稍复杂的曲綫，則力所不及，特别是在使用綜合方法解决問題时，往往很难发見問題的推理过程。解析方法与此相反，由于它可以借助于代数或分析的运算从表示图形的函数关系推出几何概念，所以它可以解决关于复杂的曲綫的問題，特别是便于研究关于多維空間的几何概念，此外，用解析方法研究問題时，根据运算关系比較容易找到解决問題的推理步驟。但是，有时繁瑣的运算过程是解析方法的一个难点。

如果根据研究方法的不同，来区分各种几何，那么，基于綜合方法的几何，可以叫做綜合几何，基于解析方法的几何，則可以叫做解析几何。初等几何屬于前一种，將要学习的解析几何屬于后一种，而且因为它只应用到代数，所以是最簡單的。屬于后一种的还有应用分析的微分几何等等。

解析几何是与十七世紀法国偉大数学家、哲学家笛卡儿（R.Descartes）的名字分不开的。因为作为解析方法基础的座标法是笛卡儿首先发見的。从座标法发現以后，解析方法不但成为研究几何的有力工具，而且，打破了十七世紀以前形与数彼此孤立，发展迟緩的数学特点，使研究图形性質的数学——几何——与研究数量关系的数学——代数——之間建立了密切的連系，特别是由于笛卡儿在数学里引进变量，因而促进了微积分的发現以至于整个数学的发展。造成近世数学——几何、代数、分析等——密切关联相互为用的特点。

解析几何广泛地应用于其它有关科学領域，例如，近代的解析几何一般是以从物理概念与几何图形的共同特点所抽象出来的向量概念作为工具。因此，它很便于应用在物理，理論力学，应用力学以及其它各种几何学的研究上。

在初等几何里，有些比較难解的問題，例如，軌迹問題、共点綫与共綫点問題、作图問題以及关于作图不能問題的理論等，采用解析几何的方法，都可以得到解决。这些問題随着讀者对解析几何的学习与进一步的研究，是都会碰到的，因此，解析几何这一学科很有助于数学教师对初等几何問題从較高观点来理解与解决。因而对初等几何的教学將会起很大的輔助作用。

关于解析几何內容的編排顺序和叙述方法，可以有各种不同。但是本書主要依据部定教学大綱的要求，采用直角座标系，并且应用了簡單的向量概念。这样作，不但可以使解析几何的叙述簡單，而且也可以使它便于应用到其它有关科学領域里。

編者的話

这本《解析几何》曾用作东北师范大学数学系本科的解析几何教材和数学函授班的解析几何参考教材。

本書在編排上，基本上是根据教育部頒师范学院数学系解析几何教学大綱（*除外），并且以叶菲莫夫教授所著的《解析几何簡明教程》一書为參考。

在編写过程中，考虑到教学的特点，企图力求問題的目的明确，系統严整，叙述平易与詳尽；而且为了使解析几何更好地应用到其它几何以及有关科学領域，着重使用了向量的概念，此外为使讀者，易于掌握解析几何的內容与方法，而配备了一定数量的例題与习題。

本書原稿在几次使用过程中，我系几何教研室所有同志，特别是蔡昌令、王家彥，王銘文、郭卫中各位都根据講授經驗提出了很多宝貴意見，函授有关同志也提供了不少經驗，仅向这些同志表示感謝；此外又蒙吉林师專数学科主任楊蔭潘同志作了詳細校对，特别向他致以深切謝意。

这次出版，虽又作了不少修改，但是限于作者的教育理論与学术水平，难免还有缺点，甚至錯誤的地方，請讀者多加批評与指正。

孙福元　于东北师范大学

1957·3·15

目　　录

緒　言 ………………………………………… 1

第一編　平面解析几何学 …………………………… 1

第一章　直綫上与平面上点的座标 …………………… 1

§ 1.　有向綫段……………………………………… 1
§ 2.　直綫上点的座标……………………………… 4
§ 3.　平面上点的笛卡儿直角座标………………… 5
§ 4.　平面上点的极座标…………………………… 8
§ 5.　直角座标与极座标的变換…………………… 9

第二章　向量的座标与基本問題 …………………… 12

§ 6.　向量…………………………………………… 12
§ 7.　向量在軸上的射影值………………………… 13
§ 8.　直綫上向量的座标…………………………… 15
§ 9.　平面上向量的座标…………………………… 16
§10.　向量的幅角…………………………………… 18
§11.　兩点間的距离………………………………… 20
§12.　分綫段为已知比……………………………… 21
§13.　兩个向量間的角……………………………… 25
§14.　兩个向量共綫与垂直的条件………………… 28
§15.　三角形的面积………………………………… 30
§16.　向量在軸上射影值的座标表示……………… 31

第三章　曲綫方程式 ……34

§17.　方程式确定的曲綫……34
§18.　曲綫的方程式……37
§19.　曲綫的极座标方程式……39
§20.　曲綫的参数方程式……42

第四章　座标变换 ……46

§21.　軸的平移……46
§22.　軸的旋轉……47
§23.　直角座标的一般变换……49
§24.　曲綫的分类……51
§25.　兩个曲綫的交点……53
§26.　代数曲綫的次数的几何意义……55

第五章　一次曲綫 ……58

§27.　直綫的一般方程式……58
§28.　直綫的一般方程式的特殊情形……60
§29.　直綫的截距式方程式……62
§30.　直綫的标准方程式……64
§31.　直綫的兩点式方程式与参数方程式……66
§32.　直綫的斜率式方程式……68
§33.　兩条直綫的夾角……70
§34.　兩条直綫的相互位置……73
§35.　直綫束的方程式……76
§36.　直綫的法綫式方程式……79
§37.　点与直綫間的距离……81
§38.　直綫的极座标方程式……83

第六章　二次曲綫……………………………………………………87

§39. 橢圓和它的标准方程式……………………………………87
§40. 橢圓的形狀……………………………………………………91
§41. 橢圓的焦点半徑、离心率和准綫…………………………94
§42. 双曲綫和它的标准方程式………………………………100
§43. 双曲綫的形狀……………………………………………104
§44. 等边双曲綫关于漸近綫的方程式………………………109
§45. 双曲綫的焦点半徑、离心率和准綫……………………111
§46. 抛物綫和它的标准方程式………………………………117
§47. 抛物綫的形狀……………………………………………120
§48. 二次三項式………………………………………………123
§49. 橢圓、双曲綫和抛物綫的參数方程式与作图…………126
§50. 橢圓、双曲綫和抛物綫的共同極座标方程式…………129
§51. 橢圓、双曲綫和抛物綫的共同笛卡儿座标方程式……133
§52. 橢圓、双曲綫和抛物綫是圓錐截綫……………………135

第七章　圓錐截綫的直徑和切綫……………………………140

§53. 橢圓和双曲綫的直徑……………………………………140
§54. 橢圓和双曲綫的共軛直徑………………………………144
§55. 抛物綫的直徑……………………………………………146
§56. 橢圓和双曲綫的切綫和法綫……………………………148
§57. 抛物綫的切綫和法綫……………………………………150
§58. 圓錐截綫的光学性質……………………………………151

第八章　二次曲綫一般方程式的研究………………………157

§59. 圓的一般方程式…………………………………………157
§60. 二次曲綫的中心…………………………………………159

§61. 有心二次曲綫方程式的最簡式………………………… 162
§62. 有心二次曲綫的标准方程式………………………… 165
§63. 无心二次曲綫方程式的最簡式………………………… 169
§64. 无心二次曲綫的标准方程式………………………… 172
§65. 二次曲綫方程式的基本不变量* ………………………… 178
§66. 二次曲綫最簡式利用不变量的确定法* ………………… 181
§67. 二次曲綫标准方程式利用不变量的确定法* ………… 183

第九章 移動与相似变換………………………… 189

§68. 移动………………………… 189
§69. 移动的特殊情形………………………… 192
§70. 相似变换………………………… 194
§71. 相似变换的特殊情形………………………… 196
§72. 相似圓錐截綫………………………… 197

第一編　平面解析几何学

第一章　直綫上与平面上点的座标

§1. 有向綫段

1. 在初等几何里，我們已經知道，任意一条直綫上兩个点間的部分，叫做以这兩个点为界的綫段，这兩个点叫做綫段的端点。

綫段的長度，是几何学里重要概念之一。我們已知所謂綫段的長度，是任意选取一个确定的綫段作为測量長度的單位，用它来測量已知綫段所得到的倍数。因此，綫段的長度是一个正数，但它可能是整数或分数，也可能是无理数。

根据几何学里綫段測量的理論，当选定一个測量長度的單位綫段以后，这时直綫上每个綫段可以对应一个确定的正数，也就是它的長度。反之，如果已知一个正数，則在直綫上可以測得一个綫段使它的長度等于已知的正数。

2. 但是在解析几何里，經常用到的不是普通的直綫与普通的綫段，而是所謂有向直綫与有向綫段。

任意一条直綫，都可以看作它有兩个相反的方向，我們可以指定其中一个作为直綫的正向（因而另一个就叫做它的負向），指定了正向的直綫叫做有向直綫，有向直綫也叫做軸。在图里，有向直綫的正向用箭头表示，图1里的直綫 u 就是一条有向直綫。

如果把軸上綫段的一个端点看作是綫段的始点，另一个端点看作是它的終点，那么这个綫段就叫做有向綫段。由始点到終点的方向，叫做有向綫段的方向。显然，軸上有向綫段的方向，可能与軸的正向相同；也可能与軸的正向相反。

有向綫段的端点，常用大楷拉丁字母例如 A，B 表示。一个有向綫段常用表示它端点的兩个字母并且上面画一横綫来表示，这时表示始点的字母写在前面，因此 $\overline{AB}$ 表示以 A 为始点 B 为終点的有向綫段，而 $\overline{BA}$ 則表示以 B 为始点 A 为終点的有向綫段。这兩个有向綫段是不同的，因为它們的方向不同。

图 1

始点与終点重合的綫段，叫做零綫段。零綫段的方向不定，但是为了普遍起見，我們可以約定把这样的綫段也叫做有向綫段。

3. 設 $\overline{AB}$ 是軸 u 上的任意一个有向綫段，以 A，B 为端点的普通綫段的長度也叫作有向綫段 $\overline{AB}$ 的長度。因此有向綫段的長度是一个正数。

对于軸 u 上的有向綫段 $\overline{AB}$，当 $\overline{AB}$ 的方向与軸 u 的正向相同时，將它的長度附以 «+» 号；当 $\overline{AB}$ 的方向与軸 u 的正向相反时，將它的長度附以 «−» 号，这时所得到的数叫做有向綫段 $\overline{AB}$ 的代数值。我們規定有向綫段 $\overline{AB}$ 的代数值用記号 AB 表示（不帶横綫）。

有向綫段的代数值和它的長度是有区别的，有向綫段的代数值是有符号的数（是正数或負数，零綫段的代数值等于零），而它的長度显然是代数值的絕对值（也叫做模）。因此类似代数学中表示絕对值的方法，我們用記号 $|AB|$ 表示有向綫段 $\overline{AB}$ 的長度。很明显，有向綫段 $\overline{AB}$ 的長度 $|AB|$ 与有向綫段 $\overline{BA}$ 的長度 $|BA|$ 是同一个数，但是它們的代数值 AB 和 BA 却只是符号不同的数，由此得到下面的結論：

对于一个軸上的任意兩点 A 和 B，有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BA}$ 的代数值之間有下列关系：

$$AB=-BA. \qquad (1)$$

图 1 表示一个軸 u 和它上面的三个点 A，B，C，綫段 EF 是测量長度的單位。設点 A 和 B 間的距离等于 4，点 B 和 C 間的距离等于 3，从 A 到 B 的方向与軸 u 的正向相同，从 B 到 C 的方

向与軸 u 的正向相反，在这种情形下：

$$|AB|=4,\quad |BC|=3,$$
$$AB=4,\quad BC=-3,$$
$$BA=-4,\quad CB=3,$$

4. 現在研究一个軸上的三个点，可以証明下面的事实。

定理 1. 对于一个軸上任意排列的三个点 A，B，C，在有向綫段 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$ 与 $\overline{AC}$ 的代数值間，有下列关系：

$$AC=AB+BC. \qquad (2)$$

証明. 对于軸上的三个点 A，B，C，只有六种排列方法，其中有向綫段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的方向，不是相同，就是相反（图 2）。

在有向綫段 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 方向相同的情形下，有向綫段 $\overline{AC}$ 的長度等于 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的長度的和，并且方向也与它們相同，这时三个代数值 AB，BC 与 AC 的符号相同，根据代数的加法法则，则代数值 AC 等于 AB 与 BC 的和。也就是等式（2）成立。

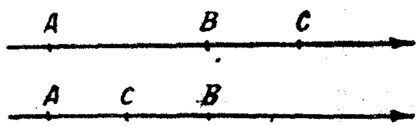

图 2

在有向綫段 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 方向相反的情形下，有向綫段 $\overline{AC}$ 的長度等于 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的長度的差，并且方向与其中較大的一个相同，这时代数值 AB 与 BC 的符号相異，而代数值 AC 的絕对值等于 AB 的絕对值与 BC 的絕对值的差，并且符号与其中絕对值較大的一个相同。因此，根据正負数的加法法則，則代数值 AC 等于 AB 与 BC 的和，也就是等式（2）成立。因此，定理得到証明。

如果將定理 1，应用到图 1 里的具体情形，則：

$$AC=AB+BC=4+(-3)=1.$$

等式（2）叫做沙尔（Chasles）公式①，它是解析几何的公式中最重要的一个。

① 一般的沙尔公式是：$A_1A_n=A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n$.

§ 2. 直綫上点的座标

5. 在解析几何里是用数决定点的位置，这一节我們研究一种比較簡單而且常用的，用数决定直綫上点的位置的方法。

設已知任意一条直綫 u，指定它的正向，这时就成为一个軸。然后在軸 u 上任意指定一个点，用 O 表示它。此外再选取一个綫段作为測量長度的單位。

如果已知直綫 u 上的一个点 M，則有向綫段 $\overline{OM}$ 的代数值

$$x = OM \tag{1}$$

完全确定。因此，点 M 按等式（1）对应唯一实数 x。数 x 的絕对值是有向綫段 $\overline{OM}$ 的長度，而符号由有向綫段 $\overline{OM}$ 的方向确定，如果有向綫段 $\overline{OM}$ 的方向与軸的正向相同，則是正的；如果有向綫段 $\overline{OM}$ 的方向与軸的正向相反，則是負的；如果点 M 与 O 点重合，則数 x 等于零。

反之，如果已知一个实数 x，則按上面等式数 x 对应直綫 u 上的唯一点 M。有向綫段 $\overline{OM}$ 的長度等于数 x 的絕对值，它的方向由数 x 的符号确定。如果 x 是正数，則方向与軸 u 的正向相同；如果 x 是負数，則方向与軸 u 的正向相反；如果 x 等于零，則点 M 与点 O 重合。

因此，直綫 u 上的所有点与实数全体間成一一对应。

作成点与数間的这种对应，叫做在直綫上导入座标系。直綫 u 上点 M 所对应的数 x，叫做点 M 的座标。直綫 u 叫做座标軸。点 O 叫做座标原点。这样，軸上的座标系就由座标原点与測度單位完全确定。

設直綫 u 在水平位置，并且它的正向指向右方，这时在直綫 u 上导入座标系，則它上面的点的位置与点的座标符号間的关系可以叙述如下：

有正数座标的点，在座标原点的右方；有負数座标的点，在座标原点的左方。

任意点 M 的座标，常用 x 表示，并且写成这样：$M(x)$。

6. 如果在軸上导入座标系，則这个軸上的每个点 M，有一个完全确定的座标；反之，对于每个实数 x，則在軸上可以求得一个确定

的点 M，它的座标是 x. 这时，軸上的几何概念就可以用算术关系式表示；反之，对算术关系式也可以給予某种几何意义。例如，軸上的点 $M_1(x_1)$ 在 $M_2(x_2)$ 左方，这时就可以用关系式：$x_1<x_2$ 表示；反之，不等式：$1<x<4$ 的所有解，可以看作是軸上兩个点 N_1（1）和 N_2（4）之間的所有点（图3）。

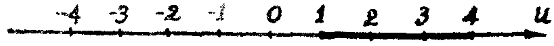

图 3

类似以上所述，用算术关系式表示几何概念，就是解析几何的基本方法，并且在其他有关科学里也是要經常用到的。

§ 3. 平面上点的笛卡兒直角座标

7. 在前一节里，我們已經知道用数可以确定直綫上点的位置。同样，用数也可以确定平面上点的位置。用数确定平面上的点的方法是很多的。在这一节里，我們研究比較簡單而且常用的一种方法，这就是所謂笛卡儿座标法。

首先在平面上取任意兩个互相垂直的軸，用 O 表示它們的交点，用 Ox 表示第一个軸，Oy 表示第二个軸。在图里，將 x，y 写在对应軸的近傍，并且在从点 O 起的正向上（图4）。

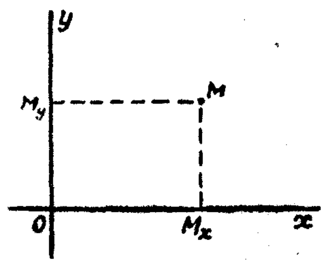

图 4

其次取一个綫段作为測量長度的單位，以 O 为共同座标原点，在軸 Ox 和軸 Oy 上导入座标系。

設M是平面上任意一点，过点 M 作直綫 Ox 与 Oy 的平行綫，用 M_x 和 M_y 分别表示点M在直綫 Ox 和 Oy 上的射影，設 x 是点 M_x 在直綫 Ox 上的座标系里的座标；y 是点 M_y 在直綫 Oy 上的座标系里的座标，根据直綫上点的座标定义，則：

$$x=OM_x,\quad y=OM_y \qquad (1)$$

这里 OM_x 是直綫 Ox 上有向綫段 $\overline{OM}_x$ 的代数值；OM_y 是直綫 Oy

上有向綫段 $\overline{OM_y}$ 的代数值。由此可知，对于平面上一个确定点 M，直綫 Ox 上的点 M_x 与直綫 Oy 上的点 M_y 完全确定，因而数 x 和 y 也完全确定。

反之，如果已知一对实数 x，y，則直綫 Ox 上以 x 为座标的点 M_x 与直綫 Oy 上以 y 为座标的点 M_y 完全确定，过点 M_x 引直綫 Oy 的平行綫，过点 M_y 引直綫 Ox 的平行綫，則这兩条直綫相交确定唯一交点 M。由此可知，一对实数 x，y 在平面上确定唯一点 M。

因此，平面上的所有点与全体实数对間成一一对应。

作成点与数对間的这种对应，叫做在平面上导入座标系（笛卡儿直角座标系①）.平面上点 M 所对应的数对 x,y 叫做点 M 的座标（笛卡儿直角座标），数 x 叫做点 M 的横座标；数 y 叫做点 M 的縱座标。軸 Ox 与 Oy 叫做座标軸，軸 Ox 叫做横軸；Oy 叫做縱軸。点 O 叫做座标原点。这样，平面上的笛卡儿直角座标系，就由有順序的兩个座标軸与一个測度單位完全确定。

任意点M的座标，常用 x，y 表示，并且写成这样：$M(x,y)$。

8. 兩个座标軸同时將平面分为四部分，这四部分叫做四个象限。在軸 Ox 正向和軸 Oy 正向的一部分，叫做第一象限；在軸 Ox 負向和軸 Oy 正向的一部分，叫做第二象限；在軸 Ox 負向和軸Oy 負向的一部分，叫做第三象限；在軸 Ox 正向和軸 Oy 負向的一部分，叫做第四象限（图 5）。

設点 M 在第一、四象限，这时，有向綫段 $\overline{OM_x}$ 的方向与軸 Ox 的正向相同，所以点 M 的横座标 x 是正数。如果点 M 在第二、三象限，則有向綫段 $\overline{OM_x}$ 的方向与軸 Ox 的正向相反，所以点 M 的横座标 x 是負数。当点 M 在軸 Oy 上时，点 M_x 与座标原点 O 重合，則点 M 的横座标 x 是零。

因此，在第一、四象限每个点的横座标都是正数，在第二、三象限每个点的横座标都是負数，軸 Oy 上每个点的横座标都是零。

同样，可以断定，在第一、二象限每个点的縱座标都是正数，在

① 如果所取的兩个軸不互相垂直，則叫做笛卡儿斜座标系。

第三、四象限每个点的縱座标都是負数，軸 Ox 上每个点的縱座标都是零。

最后，因为座标原点是兩个座标軸的交点，所以它的兩个座标都是零。

根据以上所述，則点M所在的象限与它的座标 x，y 的符号間有下列关系：

座标＼象限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
横座标 x	+	−	−	+
縱座标 y	+	+	−	−

应該注意，我們常使用的座标系，是假定当横軸正半軸从較近的一方与縱軸正半軸重合时，必須按反时針方向旋轉，这样的座标系叫做右旋座标系（图 5）；然而有的座标系，当横軸正半軸从較近的一方与縱軸正半軸重合时，必須按順时針方向旋轉，这样的座标系叫做左旋座标系（图 6）。

在本書中，主要使用右旋座标系。

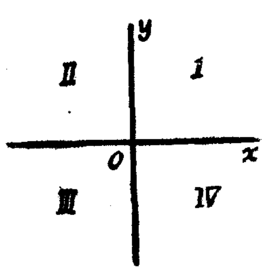

图 5

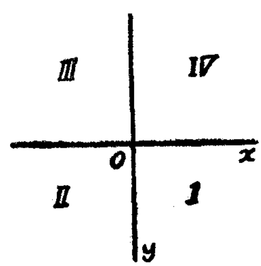

图 6

9. 在平面上导入座标系以后，我們就可以用数来表示几何概念，例如，根据座标的定义，則容易断定下面的事实：如果点 $M(x,y)$是平面上的某个点，則点 $N(x,-y)$是点 M 关于軸 Ox 的对称点；点 $P(-x,y)$是点 M 关于軸 Oy 的对称点；点 $Q(-x,-y)$是点 M 关于座标原点的对称点。