结构分析的有限条法

〔英〕 Y.K.CHEUNG 著

谢秀松　王贻荪　李兰芬　方佩芝　译

王　磊　校

人民交通出版社

结构分析的有限条法

[英] Y.K.CHEUNG 著

谢秀松 王贻荪 李兰芬 方佩芝 译

内 容 简 介

本书在结构分析的有限元法基础上，针对工程中常见的许多具有规则几何形状和边界条件的结构，介绍一种解决这类问题更简明的有限条法理论，并提出了板和壳问题的多种不同的有限条。用此理论可使三维问题降低到二维，二维问题降低到一维，从而大大节省计算机内存需要量，缩短计算时间，在工程中有较大的实用价值。全书内容新颖，叙述简明，理论上有独到之处，并附有各种计算实例易于实际应用，是一本有价值的读物。

本书可供科技人员及高等院校师生参考。

结构分析的有限条法

[英] Y.K.CHEUNG 著

谢秀松 王贻荪 李兰芬 方佩芝 译

王 磊 校

人民交通出版社出版

（北京市安定门外和平里）

北京市书刊出版业营业许可证出字第006号

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张：8.75插页：2 字数：198 千

1980年9月 第1版

1980年9月 第1版 第1次印刷

印数：0001—4,700 册 定价：0.97元

译者序言

《结构分析的有限条法》一书所述内容，理论新颖，在有限元领域里是一新的分支。可以解决土建结构设计中的大量问题。本书涉及平面应力、弯曲板与板梁结构、析板结构与箱形梁桥、板与壳的稳定与振动、有限层法与有限棱柱法。有限条选择了振动梁函数及代数多项式两种位移函数保证了计算收敛性。它形成的总刚度矩阵呈带状，与有限单元法比较，它的未知量大大减少，精度也高。有限条法在我国推广应用很有实用价值。

本书作者张佑启（Y.K.CHEUNG）博士、土木工程教授，1978年应我国邀请来华，曾在北京、杭州、洛阳、广州做学术报告。内容除了有限条外，还有高层建筑，有限层法计算地基应力、箱形桥梁与弧形桥梁等。由于他的有限条法的独创性，并曾在加拿大、罗马尼亚、澳大利亚等地讲学。

有限单元法是六十年代发展起来的，它把工程对象变为离散体，割裂成许多很小单元，称为离散化。用结点位移为未知量通过能量原理建立起大型方程组，通过电子计算机解决各种复杂工程结构设计问题。随着电子计算机迅速发展，有限单元法在计算技术及力学领域内成为一门新的学科。国外，理工科大学都选为必修课程。

但是，用有限单元法解决复杂工程设计时，必须采用大容量电子计算机，尤其是三维空间应力分析。例如大型通用程序对于特殊问题费用会高几倍，既占据了大容量电子计算

机，又浪费不少时间。

有限单元半分析法，最早由Y.K.CHEUNG提出有限条法与美国E.L.WILSON：Structural Analysis of Axisymmetric Solids。前者是解决工程设计，后者是解算宇航设计。两者数学物理本质相同，统称为有限单元半分析法。

半分析法用分离变量法，使得弹性力学问题三维问题化为二维问题，二维问题化为一维问题。用数学方法使得工程结构总刚度矩阵大大降阶，当使用小型电子计算机X-2、121、108、719等也能解算二维及三维复杂问题，并且还可大大缩短电算时间。在我国若干年内具有现实意义与经济意义。

本书译稿承章远涵教授及黎邦隆付教授对于有些章节阅读并提出一些意见，在此表示感谢。

在翻译过程中，我们对于原书就已发现的错、漏及不妥之处，如图错及公式错进行过核对，概念不清之处，根据译者理解，加了译者注。

本书可供高等学校研究生、教师以及土建设计人员参考。

由于时间仓促、译校者水平有限，译文中难免还有错误缺点，热诚欢迎批评指正。

译　者

1978年10月

序　言

在本书中，试图向读者介绍一种有限条法的简明初步理论，并将此方法应用于各种结构工程课题，特别是应用于板桥和箱形梁桥这些实际的结构。本书所包括的内容大体上是自成体系的，读者只需具备一些矩阵代数和能量原理的基础知识。

有限条法的基本理论在第一章研究。从第二章到第六章提出了板壳问题的多种不同的有限条，并在各章的最后给出了数字例题。第七章讨论将有限条法推广到三维问题，而第八章则叙述结构分析中常用的一些计算方法。为了完整性，引入了一个折板的计算机程序，为清楚起见，还对一个已作出的具体问题作了详细说明。

有限条法的提出并不很久，因而不可能要求本书包含一切最新材料。关于有限条法的许多书刊是在本书完稿后才出现的。

符 号 汇 编

a, b	条的长度和宽度
A_i	多项式位移函数的待定常数
$[B]$	应变矩阵
c	柱面层厚度
C_i	基本函数的待定常数
$[C_i]$	条的形函数
D_x, D_y, D_{xy} D_r, C_θ, D_k	笛卡尔座标系和极座标系的 弯曲和扭转刚度
$[D]$	弹性矩阵
E_x, E_y, E_{xy} $E_r, E_\theta, E_{r\theta}$	笛卡尔座标系和极座标系的 弹性常数
e	偏心率
$f(x), f(r)$	沿横向（笛卡尔座标系）和径向 （极座标系）的多项式函数
f_i	条的结点参数
$\{F\}$	荷载矢量
$G, G_{xy}, G_{r\theta}$	剪切弹性模量
h_j	夹层结构芯子厚度
$[H]$	转换矩阵
I	惯性矩
I_i	（第 i 项）积分
$[J]$	雅可比矩阵

$[K]$	总刚度矩阵
$[K_G]$	总几何刚度矩阵
k^f_{mn}, k^t_{mn}	梁单元弯曲和扭转刚度系数
L_i	面积座标
$[M]$	质量矩阵
M_x, M_y, M_{xy} $M_r, M_\theta, M_{r\theta}$	笛卡尔座标系和极座标系的 弯矩和扭矩
$[N_k]$	形函数
P	集中荷载
$\{P\}$	荷载矢量
q	均布荷载
$\{q\}$	外表面荷载矢量
R, r	曲条薄板半径
$[R]$	转换矩阵
$[S]$	条的刚度矩阵
$[S_G]$	条的几何刚度矩阵
t	板厚
t_i	夹层板第 i 层厚度
u, v, w	沿 x, y 和 z 方向的位移
U	应变能
W	外力势能
x, y, z r, θ	直角座标和极座标
X_m, Y_m	基本函数
$\{X\}$	赘余力矢量
α	张角
β	斜角
$\varepsilon, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	应变

$\sigma, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	应力
$\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{x\}$	广义应力和应变矢量
x_i	曲率参数
θ_x, θ_y	绕 x 和 y 方向的转角
μ_m, α_m	基本函数的参数
δ_k	结点位移参数
$\{\delta\}$	结点位移矢量
ξ, η, ζ	斜的或其它的曲线座标系
ϕ	总势能
ν	泊松比
ω	固有频率
ρ	质量密度
λ	特征值

本书几个专用符号说明

DOF	自由度
HBW	半带宽
LO2	低阶矩形条，两结线
HO2	高阶矩形条，两结线
HO3	高阶矩形条，三结线
FESS	有限单元简支板程序
BAPS	桥梁应用程序
FSM	有限条法
FEM	有限元法
ASCE	美国土木工程学会

目　　录

第一章 有限条法

1.1 引言

现时，作为结构分析中最有效的和用途广泛的解算工具的有限单元法，已经建立并已是众所周知的。然而，对于许多具有规则几何形状的平面和简单边界条件的结构来说，完全的有限单元分析常常是既浪费又不必要，有时甚至不可能。当要求较精确的分析或高维问题分析时，解题费用很高，通常按照某种数量级增涨。此外，常遇到的问题是其精确分析的规模可以远远地超过设计人员或研究人员所能使用到的任何机器，致使问题或只能粗略地解决，或是为降低内存要求而必须写出一些附加的耗费时间的子程序。上述观点对于三维固体和空间结构静力计算以及对于振动和稳定分析特征值问题尤其正确。针对前述种种结构显然需要另选一种方法。它不但能减少计算工作量和内存需要量，同时，在某种程度上又保持了有限单元分析的多用性。

采用最近发展起来的有限条法可以充分满足这些要求。此法是将结构划分成二维（条）或三维（棱柱，层）的许多子区域，子区域中有一对相对边（二维），一对或几对相对面（三维）与结构的边界重合。沿一个或两个座标轴方向，结构的几何形状通常不变，因而沿全长条的宽度或棱柱或层的横截面不改变。所以，当把箱形梁桥和空心板很方便地划分成为条或棱柱时，对于厚的，各向同性的，或多层板和壳来说，将它们划分为层时肯定是更恰当的。

有限条法可作为用位移逼近的有限单元法的一种特殊形式。不同的是标准的有限单元法是沿各个方向采用了多项式的位移函数，有限条法只需沿某些方向采用简单多项式，沿其它方向则为连续光滑可微的级数，并规定此级数必需预先满足这些条和棱柱的端部的边界条件。位移函数的一般形式是以多项式和级数的乘积给出的。这样，对于一个条来说，就能将二维问题简化为一维问题。

$$w=\sum_{m=1}^{r} f_m(x)Y_m \qquad (1.1a)$$

同样地，对于一个棱柱来说，三维问题就能简化为二维问题，位移函数可写为

$$w=\sum_{m=1}^{r} f_m(x,z)Y_m \qquad (1.1b)$$

最后，在一个层的情形中，三维问题可以当作一维问题来处理

$$w=\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{t} f_{mn}(z)X_mY_n \qquad (1.1c)$$

以上诸式中，级数取到第 r 项和第 t 项；$f_m(x)$，$f_m(x, z)$，$f_{mn}(z)$是对应于级数第 m 项和第 n 项的具有待定常数的多项式；而 X_m，Y_m 各是沿 x 和 y 方向满足端部条件的级数，它们也确定沿 x，y 方向的变形形式。对于几种实际的结构，从图 1-1 可见到上面所作讨论的图解和降低维度对矩阵带宽的影响。表 1-1 中列出了有限单元法和有限条法间的简单比较。

有限条法的原理与文献[2]的方法相类似，也是将偏微分

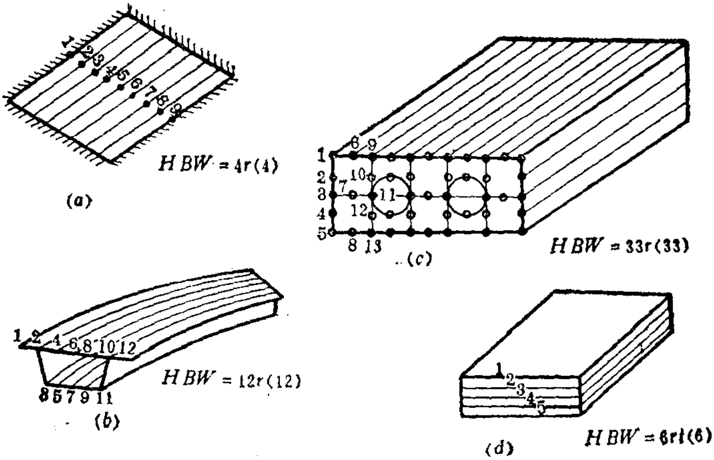

图1-1　几种结构和典型的网格划分
(a)固定板(板条)；(b)曲线形箱形梁桥(壳条)；(c)带圆孔的空心板桥(四边形有限棱柱；(d)厚的多层板(有限层)
HBW＝半带宽；r，t＝级数项数；(　)＝简支情况

方程化为常微分方程。

有限条法要求将连续体离散化，使所得到的最后公式中只包含有限个未知数。解题步骤如下：

(ⅰ)用假想的线（面）将连续体分割成为若干条(棱柱，层)。这些条（棱柱，层）的端部往往构成连续体边界的一部分（图1-1)。为方便计，在一般方程式中只讨论条，这种方程式在任何情况下也适用于棱柱和层。

(ⅱ)假定条沿着几个离散的结线相互联系，结线与条的纵向边界重合。在某些情况下，还能利用内结线得到高阶条。

每条结线上的自由度（DOF），称为结线位移参数，他们通常是与位移和位移对多项式的横向变量 x 的一阶偏导数

有限单元法和有限条法比较　　表1-1

有　限　单　元	有　限　条
适用于任何几何形状，边界条件和材料变化，用途极广，极有效。	在静力分析中，常用于两相对边简支的结构和带有中间弹性支承或无中间弹性支承的结构，特别是桥梁。在动力分析中，除离散的支承外，可用于各种边界条件的结构上。
通常，方程式数量大以及矩阵带宽度较大。解题费用很高，有时由于计算工具的限制而无法作出解答。	通常，方程式数量少得多，矩阵带窄。对于具有一对相对简支端的情况尤其是这样。因而求出相当精确解的计算时间短得多。
输入数据量大易造成错误。要求自动网格和荷载产生方案。	由于降低了问题的维数，所包含的网格线数减少，因而输入数据少。
输出量大，因为照例要打印出所有节点位移和单元应力。在许多低阶单元的结点上不产生正确的应力，在解释结果时必须用应力平均法或内插法。	只确定那些需要求出位移和应力的单元，然后作相应的输出是容易的。
需要大量内存，编程序较困难。为了降低内存需要量，对特征值问题经常借助先进的技术例如质量聚合法和子空间迭代法。	内存要求较小，易于编程序。因为只需求出最低的少数几个特征值（对大多数情况如此）。级数的第一、二、三项将能给出足够精确的结果。可用标准的求特征值的子程序求解矩阵。

（转角）相关连。它们还可能包含非位移项例如应变（包括正应变，剪应变，弯曲和扭曲曲率）。

由于采用了沿纵向的连续函数，条的结线的自由度通常小于单元结点自由度。例如，在弯曲板中，每个条的结线上存在 w 和 θ_x，而在每个单元结点上存在 w，θ_x，θ_y。

(iii)选择用结线位移参数表达的一个位移函数（或几个函数）来表征位移场，因而也表征每个单元内的应变和应力场（包括正应力，剪应力，弯曲和扭矩）。

(iv)在选择位移函数的基础上，由虚功原理或最小总势能原理可以得到刚度矩阵和荷载矩阵，这些荷载矩阵与作用在条上的各种集中荷载或分布荷载相平衡。

(v)集合所有条的刚度矩阵和荷载矩阵，构成一组总刚度方程。由于矩阵带宽度和阶数都较小，用任何标准带矩阵求解办法能容易地求解总刚度方程而得到结点位移参数。事实上，只要得出一个条的刚度矩阵和荷载矩阵，便可认为板的有限条分析就和梁的刚度分析一个样，而壳或箱形梁桥分析则相当于平面框架分析。

1.2 位移函数的选择

以上讨论可见，恰当地选择条的位移函数是分析问题的关键步骤，必须十分注意。错误地选择位移函数显然不仅产生荒谬的答案，甚至对于不断分细的网格来说，也可能导致收敛到错误的答案。

为了确保收敛于正确值，位移函数必须满足下列简单要求。

(i)位移函数的级数部份（Y_m）应预先满足条的端部条件（振动问题仅需满足位移条件）。例如，一个弯曲简支板条，位移函数在两端须满足挠度 w 和法向曲率 $\partial^2 w/\partial y^2$ 都为零的条件。

(ii)位移函数的多项式部分（$f_m(x)$）可表征在横向(x)方向的常应变状态。否则，就无法保证当网格越分越细时应变分布收敛于真实应变。

此常应变条件可用下述两方法之一来检验：

(a)用简单形式的多项式 $a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots$ 作为 $f(x)$，若多项式是完全的并达到或超过一定次数，当计算常应变而进行必要的微分运算时，实际上便得到常数项，即得到常应变。例如，在弯曲条中，多项式必需至少直到二次项是完全的。若将多项式选为 $a_1+a_2x+a_3x^3+a_4x^4$，那么横向弯曲曲率 $\chi_x=-\partial^2 w/\partial x^2$ 将等于 $-6a_3x-12a_4x^2$。这很自然地表明 χ_x