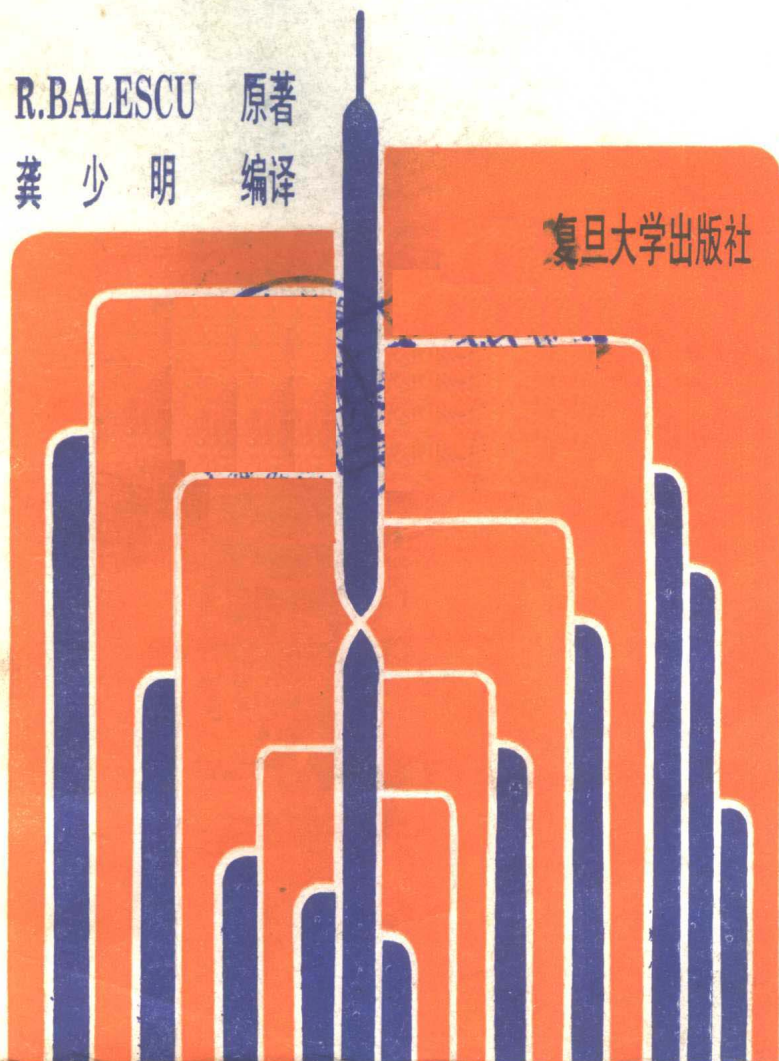


非平衡态 统计力学

R.BAILESCU 原著

龚 少 明 编译

复旦大学出版社



非平衡态统计力学

R. Balescu 原著

龚少明 编译

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书主要根据R. Balescu的原著《Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics》编译而成。为了使原著更加适应物理学、数学、化学及生物学读者的需要,在编译过程中对原书的理论基础和推导步骤都作了充实。全书分三大部分:第一章为唯象理论,结合布朗运动、Schlögl反应模型、布鲁塞尔子等具体物理学问题,讨论主方程、福克-普朗克方程等的求解方法及其在非平衡态统计力学中的地位。第二~四章为输运理论,利用玻耳兹曼方程、朗道方程、符拉索夫方程及矩方程和流体力学方程,导出微观平衡方程,经线性化处理得出输运系数。第五~七章为非平衡态统计力学的理论核心,先介绍经典关联动力学理论,然后再推广到量子关联的情况,最后两章讨论普遍理论的实际应用。

本书可作为物理系高年级大学生、硕士和博士研究生的教学用书,以及有关专业的教师和研究工作者的参考书。

非平衡态统计力学

龚少明 编译

复旦大学出版社出版

(上海国权路579号)

新华书店上海发行所发行 复旦大学印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张14.75 字数424,000

1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷

印数1—2,000

ISBN7-309-00120-6/O·034

定价: 3.45元

编译者的话

本书的核心内容是根据 R. Balescu 的原著《Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics》(1975 年) 的第三部分编译而成的。原著是原作者在广泛征求各国物理学家意见、全面总结统计力学各个领域中的研究成果并归纳出共同的理论基础上, 用了四年多时间才完成的以教科书形式出现的一部杰作, 迄今为止, 如此系统地阐述非平衡统计力学的最基础的内容, 还是独一无二的。1980 年开始, 我在原著的基础上编译成《非平衡态统计物理学》讲义。使用讲义的过程中得到不少同行的支持和鼓励; 在这次成书的过程中, 内容上又作了充实和改动, 以使全书层次清楚而便于阅读。

1. 为了使本书适应物理学、数学、化学、生物学等不同学科读者学习非平衡态统计力学的需要, 我们在保留原著科学性和系统性的前提下, 充实了非平衡态唯象理论的内容。第一章采用概率论方法, 引入主方程、福克-普朗克方程、反应扩散方程及微观可逆性的 Onsager 倒易关系, 并通过布朗运动、Schlögl 反应模型、布鲁塞尔子及最小熵产生原理等具体问题的讨论, 说明涨落在非平衡态多体理论中具有举足轻重的作用。唯象理论虽然无法回答这里为什么会出现这些现象的问题, 但能说明这里发生了什么样的问题。因此, 通过这部分的学习, 读者可以懂得全书真正要解决的核心问题是不可逆的机理问题。

2. 第二~四章为中级理论: 从刘维方程出发, 经过若干假定, 导出玻耳兹曼方程、朗道方程和符拉索夫方程; 再利用矩方程和流体力学方程, 得到微观平衡方程; 经过线性化处理之后, 求出本征值和本征函数, 计算出输运系数。这部分内容是统计物理学教程中急需充实的重要内容之一。

3. 第五~第六章是非平衡态统计力学的理论核心,其地位相当于平衡态统计力学中的系综理论;第七章专门阐述量子关联动力学理论。引入维格纳函数和对称性算子之后,量子统计和经典统计纳入到统一的理论框架之中。最后两章阐述普遍关联动力学理论的简单应用。这五章是全书中的高级理论。我在编译过程中对原书的推导步骤作了充实,有些内容作了次序上的更动和删改。为了便于读者阅读,每节又归纳出许多小标题。

书中也反映了编译者的一些教学体会和粗浅研究成果,错误或失当之处在所难免,恳切地期望读者和专家们批评指正。

1987年11月于复旦大学

目 录

编译者的话

第一章 非平衡态统计力学的唯象理论

- §1.1 布朗运动;朗之万方程..... 1
 - 1. 布朗运动的物理机制(2) 2. 朗之万方程的求解(4)
- §1.2 连续变量的随机过程;主方程和福克-普朗克方程..... 8
 - 1. 随机过程(8) 2. 马尔柯夫过程;主方程(11) 3. 平稳马尔柯夫过程;福克-普朗克方程(14) 4. 扩散方程的解(18)
- §1.3 福克-普朗克方程的解.....20
 - 1. 定态福克-普朗克方程的解(20) 2. 同时间有关的福克-普朗克方程的解(21) 3. 一般福克-普朗克方程的解(23)
- §1.4 主方程的解;反应速率方程和生灭过程方程.....28
 - 1. 跃变矩的运动方程(28) 2. 反应速率方程和生灭方程(29)
 - 3. 线性生灭方程的解(32) 4. 非线性生灭方程的解(32)
 - 5. 用生成函数来解主方程(33)
- §1.5 利用大参量展开求解 Schlögl 模型的主方程.....36
 - 1. Schlögl 化学反应模型(36) 2. 用大参量展开解主方程(38)
 - 3. 二分岔现象和非平衡相变(42)
- §1.6 化学反应速率方程;布鲁塞尔子.....45
 - 1. 气体分子的碰撞频率(45) 2. 反应速率方程(48) 3. 布鲁塞尔子(50)
- §1.7 涨落的初级唯象理论;Onsager倒易关系和最小熵产生原理...54
 - 1. 爱因斯坦的涨落理论(55) 2. Onsager 倒易关系(60)
 - 3. 最小熵产生原理(64)

文献注释.....	66
-----------	----

第二章 最基本的动力学方程

§2.1 统计力学的基础动力学知识.....	65
1. 宏观量及其相应的微观动力学函数(69)	2. 哈密顿函数(70)
3. 粒子数密度(72)	4. 微观动力学函数的普遍特性(74)
5. 约化分布函数(76)	
§2.2 刘维方程和约化分布函数的时间演化方程.....	79
1. 刘维方程(80)	2. BBGKY 方程链(82)
3. 广义刘维方程(85)	4. 图形表示(87)
§2.3 稀薄气体:玻耳兹曼方程.....	88
1. 稀薄气体(88)	2. 玻耳兹曼方程的推导(90)
3. 关于玻耳兹曼方程的讨论(95)	
§2.4 均匀弱耦合气体:朗道方程.....	98
1. 散射概率的展开(98)	2. 朗道方程的推导(102)
3. 朗道方程同福克-普朗克方程的关系(108)	
§2.5 非均匀等离子体:符拉索夫方程.....	110
1. 等离子体的自洽场特性(110)	2. 符拉索夫方程的推导(113)
文献注释.....	115

第三章 平衡方程及其流体力学描述

§3.1 动力学方程的矩方程.....	117
1. 动力学方程的矩方程(118)	2. 完整动力学算子 $\mathcal{O}$ 的特性(120)
§3.2 不可逆过程的动力学描述.....	122
1. 朗道方程情况下的 H 定理(122)	2. 均匀系统玻耳兹曼方程下的 H 定理(124)
3. 符拉索夫方程情况下的 H 定理(126)	
4. 碰撞不变性(128)	5. 不可逆性的讨论(131)
§3.3 流体力学的微观平衡方程.....	132
1. 质量平衡方程(133)	2. 动量平衡方程(133)
3. 能量平衡方程(136)	
§3.4 微观平衡方程的唯象描述.....	138

1. $\bar{P}$ 和 J 的流体力学唯象处理(139)	2. 输运系数的特性(140)
3. 平衡方程的线性化(142)	
§3.5 流体力学的简正模式.....	145
1. 色散关系(145)	2. 流体力学简正模式(146)
§3.6 等离子体的简正模式.....	149
1. 等离子体频率(149)	2. 无耗散等离子体的简正模式(151)
3. 耗散等离子体的朗道阻尼(153)	
文献注释.....	154

第四章 动力学方程的本征值及输运理论

§4.1 均匀气体线性化动力学方程的本征值.....	156
1. 朗道方程的线性化(156)	2. 线性碰撞算子 K 的基本性质(158)
3. 弛豫时间(161)	
§4.2 非均匀气体线性化动力学方程的本征值.....	163
1. 非均匀气体的简正态(163)	2. 非均匀分布函数围绕平衡态的展开(166)
3. 用微扰论解本征值方程(167)	4. 动力学算子的本征值同流体力学本征值的比较(171)
§4.3 输运系数的具体计算.....	175
1. Green-Kubo 公式(176)	2. Sonine 多项式(178)
3. 热导率 κ 的计算(179)	
§4.4 非均匀等离子体线性化动力学方程的本征值.....	183
1. 本征值方程(183)	2. 本征值和本征函数的确定(185)
3. 输运系数(189)	
文献注释.....	193

第五章 关联动力学的普遍理论

§5.1 均匀和非均匀系统中的关联.....	196
1. 均匀系统的特性(197)	2. 经典关联的一般特性(198)
§5.2 经典关联模式的时间演化.....	202
1. 关联模式的演化方程(202)	2. 关联模式演化方程的图形表示(205)
3. 广义关联模式 $p_r(\Gamma_r)$ (209)	

§5.3 真空和关联:子动力学的概念.....	213
1. 真空和关联(213) 2. 无微扰刘维方程的解:传播算子 $\mathcal{U}^0(t)$ (217) 3. 分解算子 $\mathcal{R}^0(z)$ (219) 4. 子动力学(221)	
§5.4 相互作用系统刘维方程的形式解.....	224
1. 传播算子 $\mathcal{U}(t)$ (224) 2. 分解算子 $\mathcal{R}(z)$ (227) 3. 分解算 子的进一步变换:不可约演化算子 $\tilde{\mathcal{R}}(z)$ (229) 4. 主方程(232)	
§5.5 不可逆过程动力学的理论框架.....	234
1. 投影算子 Π 和 $\hat{\Pi}$ (235) 2. 算子 Π 的建立(238) 3. 动力 学传播算子 $\Sigma(t)$ (244)	
§5.6 关联的动力学分量和非动力学分量的演化方程.....	246
1. 产生算子 $C\mathcal{R}(t)V$ 和湮灭算子 $V\mathcal{D}(t)C$ (248) 2. 动力学传 播算子 $\Sigma(t)$ 同 $C\mathcal{R}(t)V$ 及 $V\mathcal{D}(t)C$ 的关系(250) 3. $V\bar{f}(t)$ 的动力学方程(253) 4. 算子 $V\Gamma V$ (254) 5. 与时间无关的函 数形式(257) 6. 动力学演化方程(259) 7. 分布矢量的非动力 学分量的演化方程(260)	
附录1 $\Sigma(t)=\Pi\mathcal{U}(t)$ 的证明.....	264
附录2 $\Pi^2=\Pi$ 的证明.....	266
文献注释.....	270

第六章 关联动力学理论的具体化

§6.1 子动力学的初值和均匀系统的状态.....	274
1. 子动力学的初值问题(275) 2. 空间均匀的状态(276)	
3. 平衡态(280)	
§6.2 非平衡定态.....	83
1. 外场作用下的演化方程(284) 2. 非平衡定态(285)	
§6.3 经典动力学关联.....	288
1. 弱耦合气体的动力学方程(288) 2. 关联模式的动力学方 程(290) 3. 经典动力学关联(293)	
§6.4 空间均匀的经典弱耦合气体.....	295
1. 朗道方程的推导(295) 2. 普遍的关联动力学理论中假定的合	

理性(298) 3. 二粒子动力学关联函数的确定(299)	
§6.5 非均匀经典弱耦合气体	300
1. 动力学方程(300) 2. 动力学方程的流体力学描述(302)	
§6.6 分布矢量的非动力学分量	304
1. 关联模式的演化(304) 2. 关联模式的初值问题和演化图像(305)	
文献注释	312

第七章 量子关联的动力学理论

§7.1 维格纳函数:量子系统的动力学方程	313
1. 密度矩阵(315) 2. 维格纳函数(317) 3. 维格纳函数的归一化和傅里叶变换(320) 4. 维格纳函数的对称性(323)	
§7.2 量子分布矢量的时间演化方程	326
1. 二次量子化表象中的哈密顿函数(326) 2. 维格纳函数 $f_2^w(\xi_1, \xi_2)$ 的演化方程(327)	
§7.3 量子系统的关联特性	332
1. 量子系统的关联(332) 2. 对称性算子(333)	
§7.4 量子关联动力学	336
1. 关联动力学的定义(337) 2. 矩阵元的计算(341) 3. 演化方程的图形表示(343)	
§7.5 量子动力学方程和动力学关联	347
1. 维格纳函数的动力学方程(347) 2. 量子动力学关联(349)	
§7.6 空间均匀的弱耦合量子气体	352
1. 弱耦合的特征(352) 2. 弱耦合的演化方程(354)	
§7.7 量子动力学方程的特性	356
1. Uehling-Uhlenbeck 方程的涵义(357) 2. 量子关联动力学的高度非线性特征(358) 3. H 定理(359)	
文献注释	360

第八章 关联动力学理论的具体应用

§8.1 从普遍形式的方程到具体方程的过渡	362
-----------------------	-----

1. 动力学方程的简约(362)	2. 不可约演化算子的图形表示(366)	
§8.2 动力学方程和关联函数的图形表示		371
1. 符拉索夫传播子的图形表示(372)	2. 均匀系统的符拉索夫传播子的图形表示(374)	
§8.3 强相互作用粒子的稀薄气体		375
1. 微扰展开的发散问题(375)	2. 强相互作用的气体(377)	
§8.4 二体散射理论和玻耳兹曼方程		381
1. 与时间无关的算子方程(381)	2. 玻耳兹曼方程的推导(385)	
§8.5 具有中等密度的气体的动力学方程		387
1. 二体碰撞的展开(389)	2. 关于四体碰撞的讨论(391)	
§8.6 处于非平衡态下的经典等离子体		392
1. 动力学方程的结构(393)	2. 动力学方程的具体表示式(399)	
§8.7 经典等离子体的动力学方程		402
1. 同 $F(\alpha)$ 有关的奇异积分方程(402)	2. 积分方程的解(404)	
§8.8 布朗运动和偏离平衡的范德瓦耳斯气体		407
1. 重粒子的布朗运动(407)	2. 偏离平衡的范德瓦耳斯气体(410)	
文献注释		413

第九章 涨落和关联的动力学

§9.1 关联函数的定义和分类		417
1. 涨落的普遍描述(418)	2. 双时关联函数(420)	3. 谱密度(422)
§9.2 输运系数的 Green-Kubo 公式		423
1. 力学输运系数(423)	2. 电导率的 Kubo 公式(426)	
§9.3 涨落耗散定理		427
1. 响应函数的类型(427)	2. 响应函数的形式(428)	3. 对周期性外场的响应(430)
4. 涨落耗散定理(432)		
§9.4 热学输运系数		434
1. Mori 的理论:热导率的计算(434)	2. 关于输运系数的讨论(440)	

§9.5 关联函数的“长时尾”.....	441
1. 流体的粘滞系数(442) 2. 对关联长时尾的评论(446)	
§9.6 多时约化分布函数.....	447
1. 约化分布函数的推广(447) 2. 双时分布函数(448)	
§9.7 双时分布函数的动力学.....	450
1. 双时关联分布的 BBGKY 方程链(450) 2. 双时关联分布动力学方程的初值问题的求解方法(452)	
文献注释.....	455
结束语.....	457

第一章 非平衡态统计力学的唯象理论

本章主要采用概率描述方法,阐述布朗运动、Schlögl 反应模型和布鲁塞尔子等典型的非平衡态统计力学问题。布朗运动理论说明,含有随机力的运动方程的解,是一种典型的马尔柯夫过程。主方程是描述马尔柯夫过程概率密度守恒的方程,福克-普朗克方程又是描述平稳马尔柯夫过程概率密度在摩擦和扩散两种效应联合作用下的方程。从求解主方程或福克-普朗克方程过程中,又可以得出反应速率方程。反应速率方程是描述二分岔现象或非平衡相变的重要手段。布鲁塞尔子是反应扩散系统在远离热力学平衡情况下,由于涨落的放大作用而出现非平衡相变的实例。

涨落的平均分布和流体力学方程,是系统在偏离平衡不远的特殊情况下,出现输运现象的真实写照,本书以后各章还会反覆加以讨论。

本章所讨论的现象,都具有明显的不可逆属性。因此,相应的方程在非平衡态统计理论中具有举足轻重的作用。但是,这种唯象理论只能说明这里发生了什么,却无法回答为什么会发生这些现象。本书将从第二章开始,逐一回答后一问题。

§1.1 布朗运动,朗之万方程

布朗运动是非平衡态统计力学的经典理论问题之一,它涉及到含随机变量的运动方程和时间关联函数的概念。作为本书的开头,使读者从中领略一下我们这门学科的特点和处理实际问题的方法,以便提出有待全书解决的问题。

1. 布朗运动的物理机制

1827年,植物学家布朗首先观测到浸在水中的花粉等小颗粒在不断地发生剧烈的运动,世称这种无规运动为布朗运动。布朗粒子的直径约等于 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 厘米,它们时时受到介质分子的撞击。计算表明,一个布朗粒子在气体中约受到每秒 10^{15} 次以上的撞击;处在水中时,每秒受到 10^{19} 次以上的撞击。由于布朗粒子不可能在 $10^{-19} \sim 10^{-15}$ 秒内获得能为宏观感知的动量,因而布朗运动的直接原因决不是介质分子的逐次撞击,而是来自四面八方的撞击不平衡引起的。由于各次撞击的方向和大小都是动荡不定的,反映出来的不平衡形态也是涨落不定的。也就是说,布朗运动的原因是介质分子的涨落剩余(平均)效应。因此,布朗粒子受到两种力的作用:(1)介质的宏观粘滞阻力 $-\gamma v$, γ 为摩擦系数(假定为大于零的常数)。若将布朗粒子当作半径为 a 的圆球,那末由斯托克斯证明: $\gamma=6\pi a\eta$, η 为介质的切变粘滞系数(见第三、四章)。(2)介质分子对布朗粒子的涨落剩余力(随机力) $F(t)$ 。如果布朗粒子的质量为 M ,那末就给定的一维水平方向(不必考虑重力的作用)而言,相应的运动方程为标量方程:

$$M \dot{v} = -\gamma v + F(t) \quad (1.1.1)$$

方程(1.1.1)称为朗之万方程。为了下面讨论的方便,先把方程(1.1.1)化成为

$$\dot{v} = -\xi v + A(t) \quad (1.1.2)$$

的形式,这里的 $\xi = \gamma/M$ 具有时间倒数的量纲,单位质量所受到的随机力 $A(t) = F(t)/M$ 的函数形式是动荡不定的。为了解方程(1.1.2)和计算布朗粒子的位移,首先必须对涨落随机力 $A(t)$ 作一些假定:

(1) 如果 $t=0$ 的时刻,在 $x=0$ 处注入一束初速度的大小(但方向是随机的)为 v_0 的布朗粒子,由于这群布朗粒子有的受到正 x 方向的力,有的受到负 x 方向的力,因此 $A(t)$ 对于这群布朗粒子的系综求平均

$$\langle A(t) \rangle = 0, \quad (1.1.3)$$

这是很显然的结果。将条件 (1.1.3) 代入方程 (1.1.2), 可以得到宏观动力学方程

$$\langle \dot{v} \rangle = -\xi \langle v \rangle. \quad (1.1.4)$$

因此布朗粒子的系综平均速度为

$$\langle v \rangle = v_0 e^{-\xi t}. \quad (1.1.5)$$

对于浸在水 ($\eta \approx 10^{-3}$ 帕) 中的半径的量级为 10^{-5} 厘米、质量约等于 10^{-16} 千克的布朗粒子来说, 计算表明 ξ 约等于 10^7 秒 $^{-1}$, 可见经过 10^{-8} 秒这样短暂的时刻之后, 布朗粒子的初始速度 v_0 已经接近于消失了 (v_0/e)。这就是粘滞阻力决定布朗运动的马尔柯夫性质的原因所在, 亦即布朗运动的机制对初速度是没有记忆效应的。

(2) 同一个布朗粒子, 相继两个时刻 t_1 和 t_2 之间的随机力 $A(t_1)$ 和 $A(t_2)$ 之间的关联, 同 $t_2 - t_1$ 的长短有关。当 $t_2 - t_1 < \tau_c$ 时 (这里的 τ_c 为介质分子同布朗粒子的相互作用时间, 我们将在讨论玻耳兹曼方程时再作详细分析。), 这两个随机力才有关联; 也就是说, 当一种随机效应还未脱离作用而另一种随机力又产生时这两时刻的 $A(t)$ 之间才有关联效应: $A(t_1)$ 的取值大小和正负号, 将影响 $A(t_2)$ 的大小和符号。当 $t_2 - t_1 > \tau_c$ 时, $A(t_1)$ 和 $A(t_2)$ 的大小和正负号都没有关系。由

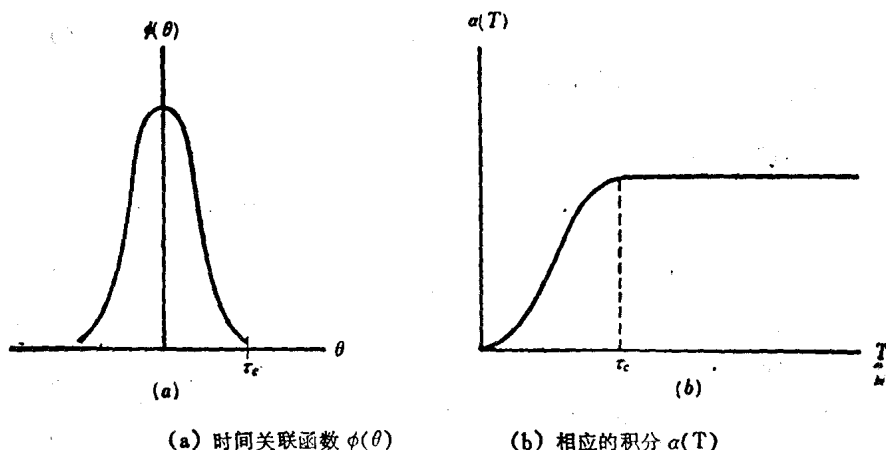


图 1.1.1 时间关联函数及其相应的积分

此分析,得到力的时间关联函数(对布朗粒子的系综平均)为

$$\langle A(t_1)A(t_2) \rangle = \phi(t_2 - t_1), \quad (1.1.6)$$

其中 $\phi(t_2 - t_1)$ 的函数形式应由动力学机制决定,这也是本书后面各章要详细讨论的主题。眼下我们还只能根据上面的物理分析,若令 $t_2 - t_1 = \theta$, 假定 $\phi(t_2 - t_1)$ 是一个接近于 δ 函数形式(图 1.1.1a) 的函数。

(3) 后面两节的分析可以指出,由于随机力 $A(t)$ 表现出来的频繁性和随机性(满足大数定律或中心极限定理),可得 $A(t)$ 的概率分布函数具有高斯函数的形式。因此,根据维克(Wick)定理,对于高斯分布, $2n$ 个随机变量乘积的平均,等于随机变量所有可能配对乘积平均的组合方式之和。因而

$$\begin{aligned} \langle A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_{2n-1})A(t_{2n}) \rangle \\ = \sum \langle A(t_1)A(t_2) \rangle \cdots \langle A(t_{2n-1})A(t_{2n}) \rangle, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

例如 $n=2$ 时, (1.1.7) 式就是

$$\begin{aligned} \langle A(t_1)\cdots A(t_4) \rangle &= \langle A(t_1)A(t_2) \rangle \langle A(t_3)A(t_4) \rangle \\ &+ \langle A(t_1)A(t_3) \rangle \langle A(t_2)A(t_4) \rangle \\ &+ \langle A(t_1)A(t_4) \rangle \langle A(t_2)A(t_3) \rangle. \end{aligned}$$

此外,由于高斯型分布函数是偶函数,因此 $A(t)$ 的奇数级矩恒为零:

$$\langle A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_{2n+1}) \rangle \equiv 0. \quad (1.1.8)$$

很显然, (1.1.3) 式是 (1.1.8) 式的一个特例。

2. 朗之万方程的求解

先把方程 (1.1.2) 当成普通的一阶微分方程,它的解为

$$v(t) = v_0 e^{-\zeta t} + e^{-\zeta t} \int_0^t d\tau e^{\zeta \tau} A(\tau) \quad (1.1.9)$$

根据前面的讨论,知道上式右边的第一项很快地趋向于零,因此布朗粒子的真正速度只由第二项决定。下面先讨论速度的时间关联函数 $\langle v(t)v(t') \rangle$ 。由 (1.1.9) 右边的第二项可见,

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' e^{-\zeta(t-\tau)} e^{-\zeta(t'-\tau')} \langle A(\tau)A(\tau') \rangle \quad (1.1.10)$$

再将 (1.1.6) 代入, 得

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \int_0^{t'} \int_0^{t'} d\tau d\tau' e^{-i(t+t')\omega} e^{i(\tau+\tau')\omega} \phi(\tau'-\tau). \quad (1.1.11)$$

为了计算上式中的积分, 先作变量置换

$$\tau' + \tau = \xi, \quad \tau' - \tau = \theta,$$

那末相应的积分元 $d\tau d\tau' = \frac{1}{2} d\xi d\theta$ 。并根据被积函数中 $\phi(\theta)$ 的接近

于 δ 函数的特性, 把积分限 t 改为 t' 并不会引起太大的误差 (这里假定 $t' > t$)。根据定积分坐标变换的规则, 当 ξ 的积分限为 $0 \sim t'$ 时, θ 为从 $-\xi \sim \xi$; 当 ξ 从 $t' \sim 2t'$ 时, θ 从 $-(2t' - \xi) \sim 2t' - \xi$, 因此 (1.1.11) 中的积分可以写成

$$\begin{aligned} J(t') &= \int_0^{t'} \int_0^{t'} d\tau d\tau' e^{i(\tau+\tau')\omega} \phi(\tau'-\tau) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t'} d\xi e^{i\xi\omega} \int_{-\xi}^{\xi} d\theta \phi(\theta) + \frac{1}{2} \int_{t'}^{2t'} d\xi e^{i\xi\omega} \int_{-(2t'-\xi)}^{2t'-\xi} d\theta \phi(\theta). \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

由于关联函数 $\phi(\theta)$ 的具体函数并不知道, 我们先定义以下两个函数:

$$\alpha(\xi) = \int_{-\xi}^{\xi} d\theta \phi(\theta) \quad \text{及} \quad \alpha(2t' - \xi) = \int_{-(2t'-\xi)}^{2t'-\xi} d\theta \phi(\theta). \quad (1.1.13)$$

鉴于 $\phi(\theta)$ 具有图 1.1.1a 所表明的特殊函数形式, 可以看到 $\alpha(\xi)$ 必定是一个接近于阶跃函数的如图 1.1.1b 所示的函数, 即当 $\xi > \tau_c$ 之后, $\alpha(\xi)$ 趋近一个常数 $\alpha = \alpha(\infty)$ 。而我们感兴趣的计算所涉及到的时间比 τ_c (τ_c 的量级在 10^{-13} 秒左右) 长得多, 因此 (1.1.13) 的两个积分都用 α 来近似是许可的。引起误差的原因只在于: 由于 ξ 是从 0 到 $2t'$ 的积分变量, 在 $\xi=0$ 附近就用 α 来代替 $\alpha(\xi)$ 会引起误差。同样, 在 $\xi=2t'$ 附近, 用 α 代替 $\alpha(2t'-\xi)$ 也会引起误差。至于积分路径的中间一大段, 用 α 来近似是可行的。作了这些假定之后, (1.1.12) 的积分立即可以得出: