中学数学丛书

初等超越方程的解法

天津市数学会编

天津科学技术出版社

中学数学丛书

初等超越方程的解法

烟学敏　张鼎言
柳书诰　牛继武

天津科学技术出版社

责任编辑：黄立民

中学数学丛书

初等超越方程的解法

烟学敏　张鼎言

柳书诰　牛继武

•

天津科学技术出版社出版

天津市赤峰道124号

天津新华印刷四厂印刷

新华书店天津发行所发行

•

开本 787×1092毫米 1/32 印张 4.75　字数 98,000

一九八六年二月第一版

一九八六年二月第一次印刷

印数：1—8,250

书号：7212·10　　定价：0.74元

编者的话

《中学数学丛书》是献给中学生和自学青年的礼物，希望它们成为中学数学爱好者的良师益友。

编写本丛书的目的在于帮助读者学好数学基础知识、提高运算能力、思维能力和空间想象能力，以及扩大数学知识领域。在编写过程中，力求把中学不同年级，不同阶段学过的代数、几何、三角、解析几何等方面的知识纵横联系，融会贯通，并对中学数学中某些问题或某种数学解题方法进行专题介绍，从而使读者在阅读这些小册子之后，能够比较系统、深入地掌握一些规律，学会一些方法，提高数学水平。

我们希望数学工作者、大中学数学教师和广大读者对本套丛书提出宝贵意见。

天津市数学会

一九八二年十月

目　　录

一、引　　言

什么是初等超越方程？让我们先回答这个问题。

大家都熟悉实数可分为有理数与无理数，此外实数还可以分为“代数数”与“超越数”.

那么什么是代数数呢？先看几个简单的例子：

如：有理数$\frac{q}{p}$，（p.q为整数，$p\neq 0$）可以定义为整数系数方程$px-q=0$的根.

如：$\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$，可以定义为整数系数方程$x^2-2=0$的根.

如：$\frac{q}{p}+\frac{t}{p}\sqrt{m}$，（$p$、$q$、$t$、$m$为整数，$p\neq 0$，$t\neq 0$，$m>0$，且不是某一个整数的完全平方数）.

设　$\frac{q}{p}+\frac{t}{p}\sqrt{m}=x$，$q+t\sqrt{m}=px$，

$px-q=t\sqrt{m}$，$p^2x^2-2pqx+q^2=t^2m$，

$\therefore$　$\frac{q}{p}+\frac{t}{p}\sqrt{m}$，可以定义为整数系数方程$p^2x^2-2pqx+q^2-t^2m=0$的根。

通过这几个例子，我们看到，可以用整数系数方程来限定一些数.

一般情况，设u是实数，如果有整数a_0，a_1，a_2……a_n，

$(a_0 \neq 0)$，使得u适合代数方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$，那么$u$就叫做代数数．

上面这些简单的例子也容易造成一种误解，是否代数数就是把有限个有理数经过有限次加减、乘除、开方等运算后所得到的实数．回答是否定的，这部分数是代数数，但不是代数数的全部．因为一般的五次和五次以上的代数方程不能用任何代数公式求解．

我们把不是代数数的实数叫超越数．如，圆周率π和自然对数底e是两个重要的超越数，

其中，$\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + \cdots = 0.7853\cdots$，

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = 2.7182\cdots.$$

从这里不难看出，求π和e需要无穷无尽的一系列运算步骤．

下面谈谈什么是代数函数，什么是超越函数？

代数函数是指：如果y与x的对应关系能由代数方程 $p_0(x) + p_1(x)y + p_2(x)y^2 + \cdots + p_n(x)y^n = 0$ 确定，其中 $p_0(x)$，$p_1(x)$，$\cdots p_n(x)$是x的多项式，且$p_n(x) \neq 0$，则称y是x的代数函数．由高次方程的理论可知，当$n \geqslant 5$时，一般不能用x的代数式表示y．

一切非代数函数称为超越函数．

中学阶段所涉及的函数从总体上说都是初等函数，为了弄清初等函数的范围，我们先给出基本初等函数。基本初等函数是指下面函数的整体：

多项式 $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$，$(a_n \neq 0, n \geqslant 1$的自然

数）其中 x 为自变量，a_i为常量（$i=0,1,\cdots n$）.

当 $n=1$ 时，为一次函数；$n=2$ 时，为二次函数.

有理函数 $y=\dfrac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}$，（$b_m\neq0$，$a_n\neq0$，$n\geqslant1$ 的自然数，$m\geqslant0$ 的整数）.

幂函数 $y=x^a$（a为常量且为有理数）.

这三个基本初等函数属代数函数.

指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）.

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）.

三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$、$\sec x$、$\operatorname{cosec}x$.

反三角函数 $\arcsin x$、$\arccos x$、$\operatorname{arctg}x$、$\operatorname{arcctg}x$.

这四种基本初等函数属超越函数.

由多项式、有理函数、幂函数经过有限次四则运算及复合运算而成的（用一个解析式表示的）函数称为初等代数函数.

由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算而成的（用一个解析式表示的）函数称为初等函数.那末在初等函数中，不是代数初等函数的函数叫初等超越函数.

在研究初等函数时，还需要强调三点：第一、必须是有限次四则运算及复合运算.如无穷级数所表示的函数就不是有限次运算，它所表示的函数就不一定是初等代数函数，例如，$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$，$\sin x$是超越函数；第二、由解析式判断函数的分类，要把着眼点放在函数对应关系的本质上，而不能由解析式的外形去判断，如 $y=|x|$，实际上可变为 $y=\sqrt{x^2}$，仍是初等函数，又如$y=(\operatorname{arctg}x)'$，实

际上可变为$y=\dfrac{1}{1+x^2}$不仅是初等函数而且是初等代数函数；第三，中学阶段也接触到一些非初等函数，如教材中的分段函数$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,+\infty)\\ -1, & x\in(-\infty, 0)\end{cases}$，但这只是少量的。

下面是教材中几个初等超越函数的例子，

$$y=\ln\frac{e^{\pi x}-1+e^{-\pi x}}{e^{\pi x}+1+e^{-\pi x}},\quad y=(\sin x)^{\ln\cos x},$$

$$y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$$

最后，我们来谈谈初等超越方程.

若$f(x)$是初等超越函数，那么$f(x)=0$叫初等超越方程，在中学范围内我们简称超越方程.

超越方程不能用初等数学方法来解，就是说我们不能找到一个一般的法则，运用这个法则对已知数（或参数）施行有限次的四则或复合运算便得到方程的解。

本书只限于研究特殊情形下初等超越方程（或方程组）的初等解法，而且整个讨论是在实数范围内进行的.

二、指 数 方 程

上面给出了初等超越方程的定义，那么什么叫指数方程呢？按照教科书指数方程定义为“指数里含有未知数的方程叫指数方程”。显然这个定义不能令人满意，如$x^x=x$是指数方程吗？因为$f(x)=x^x$本身已经不是初等函数，因此把$x^x=x$称为指数方程便不符合定义.但方程$x^x=x$确能用初等方法求解，仍属我们研究的范围.这样，本节所讨论的指数方程，我们只能给出一个描述性的定义，重点放在研究“指数方程”的解法及同解变形上.

（一）指数方程的常用解法

1.比较指数法.即把方程两边化成同底的幂求解.

形如$a^{f(x)}=c$（$a>0,a\neq1,c>0$）的最简指数方程.

解法一　因$c>0$，所以由对数恒等式可得：$c=a^{\log_a c}$.

$\therefore$　原方程变为$a^{f(x)}=a^{\log_a c}$

$\because$　$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）是由定义域$x\in(-\infty,+\infty)$到值域$y\in(0,+\infty)$上的一一对应

所以两个同底的幂，当且仅当指数相等时，幂相等.即$a^{f(x)}=a^{\log_a c}\Longleftrightarrow f(x)=\log_a c$.

由此，方程$a^{f(x)}=c$与$f(x)=\log_a c$是两个同解方程（两个方程解集相等）.这也说明指数方程不需要验根.

顺便提一下：方程$a^{f(x)}=c$（$a>0$，$a\neq1$）当$c\leqslant0$时方程无解.若$a=1$，$a^{f(x)}=c$只有$c=1$时方程才有解，

解集是使$f(x)$有意义的数集，即$f(x)$的定义域．若$a<0$，a^x的定义域应重新确定，问题变得非常复杂，只有在特殊情形下我们才研究，本节最后一部分将涉及到这类问题．

解法二　因$a>0$，$a\neq1$，$c>0$．

所以由对数定义可得$f(x)=\log_a c$．若需要计算，利用换底公式$\log_a c=\dfrac{\lg c}{\lg a}$，变成以10为底的常用对数，查表求值．

解法二也可以看成方程两边取以a为底（或以10为底）的对数．

【例1】　解下列方程

（1）$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{9}{16}$，（2）$2^x=5$（精确到0.01）

解（1）　方程左边变形$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{9}{16}$

即　　$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1-\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$．

$$\therefore\quad x-1-\frac{1}{x}=2, \tag{1}$$

解分式方程（1）得　$x_{1,2}=\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{13})$．

$\because\quad x_{1,2}=\dfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{13})\neq0$，

$\therefore\quad x_{1,2}$是方程（1）的解，也是原方程的解．

（2）方程两边取以10为底的对数，得

$$x\cdot\lg2=\lg5$$

$\therefore \quad x = \dfrac{\lg 5}{\lg 2} \approx \dfrac{0.6990}{0.3010} \approx 2.32$.

【例 2】 解下列方程

(1) $3^x \cdot 4^x = 5^x$, (2) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$

(3) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

解 (1) 由指数运算法则，方程左边可变为12^x

$\therefore$ 原方程变为 $12^x = 5^x$

$\because$ $5^x \neq 0$，方程两边可同除以5^x，

$\therefore \quad \dfrac{12^x}{5^x} = 1$，

再用指数运算法则 $\dfrac{12^x}{5^x} = \left(\dfrac{12}{5}\right)^x$.

$\therefore$ 原方程进一步变为 $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x = 1$，

即 $\left(\dfrac{12}{5}\right)^x = \left(\dfrac{12}{5}\right)^0$，

$\therefore \quad x = 0$.

(2) 方程左边提取2^{x-2}、方程右边提 取7^{x-2}，原方程变为 $2^{x-2}(2^2 + 2^1 + 1) = 7^{x-2}(7^2 + 7^1 + 1)$

$7 \cdot 2^{x-2} = 57 \cdot 7^{x-2}$, $\quad \dfrac{2^{x-2}}{7^{x-2}} = \dfrac{57}{7}$, $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{x-2} = \dfrac{57}{7}$ (1)

方程(1)两边取以10为底的对数，得

$(x-2) \cdot \lg\dfrac{2}{7} = \lg\dfrac{57}{7}$,

$x - 2 = \dfrac{\lg 57 - \lg 7}{\lg 2 - \lg 7}$,

$$\therefore\quad x = 2 + \frac{\lg 57 - \lg 7}{\lg 2 - \lg 7},$$

（3）先把2^{2x-1}变形，$2^{2x-1}=2^{2(x-\frac{1}{2})}=(2^2)^{x-\frac{1}{2}}=4^{x-\frac{1}{2}}$

原方程变为　$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-4^{x-\frac{1}{2}}$

移项得　$4^x+4^{x-\frac{1}{2}}=3^{x-\frac{1}{2}}+3^{x+\frac{1}{2}}$。

方程左右两边分别提取$4^{x-\frac{1}{2}}$、$3^{x-\frac{1}{2}}$、得

$$4^{x-\frac{1}{2}}(4^{\frac{1}{2}}+1)=3^{x-\frac{1}{2}}(1+3),4^{x-\frac{1}{2}}\cdot 3=3^{x-\frac{1}{2}}\cdot 4,$$

$$\frac{4^{x-\frac{1}{2}}}{3^{x-\frac{1}{2}}}=\frac{4}{3},\ \left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3},$$

$$\therefore\quad x-\frac{1}{2}=1,\qquad x=\frac{3}{2}.$$

注：上面三个题在求解过程中都用到了指数运算法则。指数概念扩大化后，指数运算法则可以概括为$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$。$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^m=a^m\cdot b^m$（$a>0$，$b>0$，$m\in R$，$n\in R$），解指数方程需要逆用（指从右到左）这些运算法则，特别是法则$(a^m)^n=a^{mn}$的逆用，要善于把mn分解为两个因式（数）相乘的形式.

形如　$ma^{f(x)}=n\cdot a^{\phi(x)}$（$a>0$，$a\neq 1$）的指数方程

$\because\quad a>0$，$a\neq 1$

$\therefore\quad a^{f(x)}>0$，$a^{\phi(x)}>0$。

$\therefore\quad m$，n必同号（若m，n异号方程无解）

当$m<0$，$n<0$时，方程两边同乘（-1）原方程变为$-ma^{f(x)}=-na^{\phi(x)}$，这时$-m>0$，$-n>0$，所以，只需研究$m>0$，$n>0$的情形。

解法一　由对数恒等式，$m=a^{\log_a m}$，$n=a^{\log_a n}$，原方程变为　$a^{\log_a m}\cdot a^{f(x)}=a^{\log_a n}\cdot a^{\phi(x)}$，

进一步　$a^{\log_a m+f(x)}=a^{\log_a n+\phi(x)}$，由此有与原方程同解的方程　$\log_a m+f(x)=\log_a n+\phi(x)$。

解法二　方程两边取以a为底的对数，$\log_a(m\cdot a^{f(x)})=\log_a(n\cdot a^{\phi(x)})$。

由对数运算法则：$\log_a m+f(x)=\log_a n+\phi(x)$。

【例3】　解方程　$0.4^{\lg^2 x+1}=6.25^{2-\lg x^3}$

解　原方程变为　$\left(\frac{4}{10}\right)^{\lg^2 x+1}=\left(\frac{25}{4}\right)^{2-\lg x^3}$，

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{(\lg^2 x+1)}=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^{2-\lg x^3},$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{(\lg^2 x+1)}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4+2\lg x^3}$$

$\therefore\ \lg^2 x+1=-4+2\lg x^3$。　　　　(1)

解方程（1）得　$x_1=10$，$x_2=100000$，x_1、x_2是方程（1）的根，所以也是原方程的根。

（3）形如　$ma^{f(x)}=nb^{\phi(x)}$　$(a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1)$的指数方程．

解法一　同上面（2）的讨论，m、n必同号，不妨假定$m>0$，$n>0$．

利用对数恒等式，原方程变为：

$$a^{\log_a m}\cdot a^{f(x)}=a^{\log_a n}\cdot(a^{\log_a b})^{\phi(x)}。$$

利用指数运算法则有：

$$a^{\log_a m+f(x)}=a^{\log_a n+(\log_a b)\cdot\phi(x)}。$$

由此，有　$\log_a m+f(x)=\log_a n+(\log_a b)\cdot\phi(x)$．

解法二　方程两边取对数，得

$$\log_a m + f(x) = \log_a n + (\log_a b)\cdot\phi(x).$$

【例 4】　解方程　$5^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$

解　方程两边取以 5 为底的对数

$$x + \frac{x}{x+1}\cdot\log_5 8 = \log_5 100.$$

利用对数运算法则，变为

$$x + (3\log_5 2)\cdot\frac{x}{x+1} = 2 + 2\log_5 2, \qquad (1)$$

解分式方程（1）　$x(x+1) + (3\log_5 2)x$

$$= (2 + 2\log_5 2)(x+1),$$

$$x^2 + (\log_5 2 - 1)x - 2(\log_5 2 + 1) = 0.$$

$$(x-2)[x + (\log_5 2 + 1)] = 0.$$

解得：$x_1 = 2$，$x_2 = -1 - \log_5 2$.

x_1，x_2是方程（1）的根，所以也是原方程的根.

【例 5】　解方程　$2^{x+3} - 3^{x^2-2} = 3^{x^2+1} - 2^{x-1}$.

解　移项　$2^{x+3} + 2^{x-1} = 3^{x^2+1} + 3^{x^2-2}$，方程两边分别提取公因式　$2^{x-1}(1+2^4) = 3^{x^2-2}(1+3^3)$，化简为

$$17\cdot 2^{x-1} = 28\cdot 3^{x^2-2}. \qquad (1)$$

方程（1）两边取以 3 为底的对数：

$$\log_3 17 + (x-1)\cdot\log_3 2 = \log_3 28 + x^2 - 2,$$

化简整理：　$x^2 - (\log_3 2)x + \log_3\frac{56}{153} = 0$，解此二次方程得　$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\log_3 2 \pm \sqrt{(\log_3 2)^2 - 4\log_3\frac{56}{153}}\right)$

$\because\quad \log_3\dfrac{56}{153}<0$

$\therefore\quad (\log_3 2)^2-4\log_3\dfrac{56}{153}>0.$

$\therefore\quad x_1$、x_2为实数解，

$\therefore$ 原方程的根为 $x_{1,2}=\dfrac{1}{2}\Big(\log_3 2$

$$\pm\sqrt{(\log_3 2)^2-4\log_3\frac{56}{153}}\Big).$$

2.换元法 若方程 $f[a^{\phi(x)}]=0$，($a>0$，$a\neq 1$) 我们可设$y=a^{\phi(x)}$，原方程变为$f(y)=0$.方程 $f(y)=0$ 一般为代数方程，其根为$y_i(i=1, 2, \cdots, n)$，其中的正根为$y_i(k)$ ($1\leqslant k\leqslant n$) .由$a^{\phi(x)}=y_i(k)$得上面1（1）讨论过的最简指数方程，进一步可求x.若方程 $f(y)=0$ 没有正根，那么原方程无解.

换元法解指数方程最常见的有下面三种类型.

（1）形如$Aa^{2f(x)}+Ba^{f(x)}+c=0$ 的指数方程($a>0$，$a\neq 1$) .

解 设$y=a^{fx}$，原方程变为关于y的二次方程 $Ay^2+By+C=0$，若方程有正根，由$y=a^{f(x)}$进一步求x.

【例 6】 解方程 $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$

解 设$y=5^x$，原方程变为$\dfrac{y^2}{5}+5y=250$，

整理得 $y^2+25y-5\times 250=0$，

解得 $y_1=-50$， $y_2=25$，

舍去y_1，由$y_2=25$，得 $5^x=25$，$x=2$.

原方程的根为 $x=2$.

（2）形如 $A\cdot a^{f(x)}+\dfrac{C}{a^{f(x)}}+B=0$，（$a>0$，$a\neq 1$）的指数方程。

解　设 $y=a^{f(x)}$，原方程变为 $Ay+\dfrac{C}{y}+B=0$，方程两边同乘以 y，得 $Ay^2+By+C=0$，这正是上面的（1）。

【例7】 解下列方程（i）$\left(\dfrac{57}{37}\right)^{1+x}+\left(\dfrac{57}{37}\right)^{1-x}=10$。

(ii) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$。

解　(i) 原方程变为 $\left(\dfrac{57}{37}\right)\cdot\left(\dfrac{57}{37}\right)^x+\left(\dfrac{57}{37}\right)\cdot\left(\dfrac{57}{37}\right)^{-x}=10$。

设 $y=\left(\dfrac{57}{37}\right)^x$，上面方程化简为

$$\frac{57}{37}y+\frac{57}{37}\cdot\frac{1}{y}=10 \qquad (1)$$

去分母，整理得方程 $57y^2-370y+57=0$。

解得 $y_1=\dfrac{19}{3}$，$y_2=\dfrac{3}{19}$，∵y_1，y_2均不为0

∴ y_1、y_2为分式方程（1）的根。

由 $\left(\dfrac{57}{37}\right)^x=\dfrac{19}{3}$，两边取10为底的对数得

$$x_1=\frac{\lg 19-\lg 3}{\lg 57-\lg 37}.$$

由 $\left(\dfrac{57}{37}\right)^x=\dfrac{3}{19}$，解得 $x_2=\dfrac{\lg 3-\lg 19}{\lg 57-\lg 37}$，