

普通高等教育规划教材

工程力学

教程篇

周松鹤 徐烈烜 编



TB1243
276

普通高等教育规划教材

工 程 力 学

(教 程 篇)

周松鹤 徐烈烜 编
冯 奇 虞爱民 审



机 械 工 业 出 版 社

本书为普通高等教育规划教材。

全书以刚体力学与变形体力学为分类主线，除绪论外共分两大部分内容（刚体、变形体），计五篇二十二章。第一篇为刚体静力学，内容包括静力学基本概念与基本原理、力系的等效简化、力系的平衡以及刚体静力学的应用问题。第二篇为刚体运动学，内容包括点的运动学、刚体的基本运动、点的合成运动、刚体的平面运动。第三篇为刚体动力学，内容包括质点动力学、动量定理、动量矩定理、动能定理、达朗伯原理与虚位移原理。第四篇为变形体静力学，内容包括轴向拉伸与压缩、扭转、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、平面应力状态分析、强度理论、组合变形与压杆稳定。第五篇为变形体动力学，内容为动荷载。

本书为适应普通工科院校机械专业工程力学（95~114学时）的教学需要而编写。也可作为土建、桥梁专业的专科学生，或其他专业（如建材、给排水、供暖与通风等）的本科生工程力学课程的教材，同时可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学（教程篇）/周松鹤，徐烈烜编. —北京：机械工业出版社，2003.2

普通高等教育规划教材

ISBN 7-111-11314-4

I. 工... II. ①周... ②徐... III. 工程力学—高等学校—教材 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 100354 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

责任编辑：郑 丹 宋学敏 版式设计：冉晓华 责任校对：李秋荣

封面设计：饶 薇 责任印制：路 琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·9.125 印张·353 千字

0 001—4 000 册

定价：24.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书为普通高等教育规划教材，是为适应普通高等工科院校的机械专业工程力学课程教学需要而编写，也可作为土建、桥梁专业的专科生或其他专业（如建材、给排水、供暖与通风等）本科生的工程力学课程教材。

本教材建议教学时数为 95~114 学时。

作者根据多年来在工程力学教学中积累的基本经验，注意汲取各类教材的精华，特别注意汲取欧美同类教材优点，立志编写一套融合我国传统教材理论性强、严谨、系统全面与欧美教材起点高、内容广、简洁扼要特点的新型教材，以适应现代教学改革的要求。

本书特别注意吸收德国同类教材的优点，并结合我国高等教育的实际情况，在如下几个方面作了改革探索：

1) 提高起点。考虑到现今高中教学中已经引入了许多现代数学知识，并且高校学生已经过高等数学的学习，对矢量知识已有相当基础，所以本书努力将矢量方法运用于公式推导和定理证明。例如，动量矩定理中矩心选择的原则、瞬心存在的证明、速度加速度合成的公式推导、力偶性质的证明等，都运用了矢量方法，证明过程简洁。

2) 刚体静力学部分的内容作了较大幅度的整合和调整。公式推导从空间一般力系出发，将平面问题作为空间力系的特例处理。但解题重点仍放在平面力系上。这样减少内容重复、减少公式推导、减少教学时数、减少教材篇幅。

3) 考虑到对本教材适用对象的实际教学要求，体现一般工科院校及机电类专业的特点和要求，作者不盲目追求教材的系统性和完整性，删除了一般教材中的某些内容，涉及到这些内容中机械类专业学生应该了解的一些基本概念，则融合在最简单和实用的例题中予以说明。例如，简单的碰撞问题、定轴转动时轴承的动约束力和动平衡的概念等。

4) 特别需要说明的是，作为完整的教学用书，学生应同时使用两本书：《工程力学（教程篇）》和《工程力学（导学篇）》。本教材吸收了德国教材的优点，将理论部分与习题部分分开。在《工程力学（教程篇）》中，着重于理论说明、公式推导，只列举少量例题，这些例题较为简单，只是为了加强学生对公式、定理的理解与应用能力。而《工程力学（导学篇）》则侧重于内容的总结、解题过程、学习指导、错解分析、综合应用能力培养等方面。在《工程力学（导学篇）》中，列举了一些较为大型的例题，习题量也适当大了一些。这样处置，两本书的特色更为

明显，也有利于学生课后复习。

5) 按刚体和变形体这一物理性质作为划分章节的主线，有利于各校在使用本教材时，能结合各校自己的教学安排，对教学内容自行作出合理的取舍和整合。这对于某些以理论力学、材料力学作为教学安排的学校选用本教材是有利的。

本书由周松鹤负责编写刚体静力学、刚体运动学和刚体动力学部分，由徐烈烜负责编写变形体静力学和变形体动力学部分，并由周松鹤负责统稿。

承蒙冯奇教授、虞爱民教授担任本书的主审，冯奇教授、虞爱民教授认真、细致负责地审阅了全书，并在本书编写的整个过程中提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢。

本书得到了机械工业出版社的大力支持，在编写过程中，还得到了张若京教授、唐寿高教授、仲政教授的热情帮助，在此一并致谢。

由于本书在诸多方面作了改革和探索，同时限于编者水平，书中的缺点和不妥之处在所难免，敬请广大教师和读者批评指正。

目 录

前言

绪论	1
----------	---

第一篇 刚体静力学

第一章 基本概念及基本原理	3
第一节 力学模型	3
第二节 力的概念	4
第三节 静力学基本原理	6
第四节 力的分解与力的投影	7
第五节 力矩的概念	9
第六节 力偶的概念	12
第七节 约束与约束力	13
第八节 受力分析与受力图	18
第二章 力系的等效简化	21
第一节 力系的分类	21
第二节 力的平移定理	23
第三节 力系的简化	24
第四节 平行分布载荷的简化	31
第五节 物体的重心	33
第三章 力系的平衡	36
第一节 汇交力系的平衡	36
第二节 力偶系的平衡	38
第三节 任意力系的平衡	40
第四节 静定与超静定概念 刚体系统的平衡	43
第四章 刚体静力学应用问题	48
第一节 平面桁架	48
第二节 考虑滑动摩擦的平衡问题	53

第二篇 刚体运动学

第五章 点的运动学	60
第一节 矢量表示法	61
第二节 直角坐标表示法	62

第三节	自然轴系表示法	63
第六章	刚体的基本运动	67
第一节	刚体的平行移动	67
第二节	刚体的定轴转动	68
第三节	角速度与角加速度的矢量表示 以矢积表示点的速度和加速度	71
第七章	点的合成运动	73
第一节	点的合成运动概念	73
第二节	点的速度合成	74
第三节	变矢量对时间的绝对导数和相对导数	76
第四节	牵连运动为平动时点的加速度合成定理	77
第五节	牵连运动为定轴转动时点的加速度合成定理	79
第八章	刚体的平面运动	83
第一节	运动方程 平面运动分解为平动和转动	83
第二节	平面图形内各点的速度	84
第三节	平面图形内各点的加速度	88

第三篇 刚体动力学

第九章	质心运动定理 动量定理	93
第一节	质点运动微分方程	93
第二节	质点系的质心 质心运动定理	95
第三节	动量和冲量	98
第四节	动量定理	100
第十章	动量矩定理	105
第一节	转动惯量	105
第二节	质点系的动量矩	108
第三节	质点系动量矩定理	111
第四节	刚体定轴转动微分方程	115
第五节	刚体平面运动微分方程	116
第十一章	动能定理	119
第一节	力与力偶的功	119
第二节	动能	123
第三节	动能定理	125
第四节	势力场与势能	127
第五节	机械能守恒定律	129
第六节	动力学普遍定理的综合运用	130
第十二章	达朗伯原理	132
第一节	惯性力 质点系的达朗伯原理	132

第二节	刚体惯性力系的简化	133
第十三章	虚位移原理	138
第一节	约束的分类 自由度与广义坐标	138
第二节	虚位移	140
第三节	虚位移原理	142
第四节	以广义坐标表示的质点系平衡条件	145

第四篇 变形体静力学

第十四章	轴向拉伸与压缩	150
第一节	轴向拉伸与压缩时横截面上的内力	150
第二节	轴向拉伸与压缩时的应力及强度条件	152
第三节	轴向拉伸与压缩时的变形及刚度条件	157
第四节	材料的力学性能 安全系数和允许应力	160
第五节	拉压超静定问题	167
第六节	联接件的实用计算	169
第十五章	扭转	175
第一节	扭转的概念	175
第二节	杆受扭时的内力计算	175
第三节	切应力的一些常用性质	178
第四节	圆轴扭转时横截面上的应力及强度计算	180
第五节	圆轴扭转时的变形及刚度计算	184
第六节	圆轴受扭破坏分析	185
第七节	矩形截面杆的自由扭转 (free torsion)	186
第十六章	弯曲内力	188
第一节	弯曲的概念	188
第二节	静定梁的分类	189
第三节	剪力方程和弯矩方程 剪力图和弯矩图	189
第四节	弯矩、剪力及分布载荷集度间的微分关系	193
第五节	按叠加原理作弯矩图	197
第十七章	弯曲应力	199
第一节	弯曲正应力及强度条件	199
第二节	弯曲切应力及强度条件	205
第三节	提高弯曲强度的措施	208
第十八章	弯曲变形	211
第一节	挠度和转角	211
第二节	用积分法计算梁的变形	212
第三节	用叠加法计算梁的变形 梁的刚度校核	216
第四节	简单超静定梁的解法	221

第十九章 平面应力状态分析 强度理论	223
第一节 应力状态的概念	223
第二节 平面应力状态分析的数解法	225
第三节 平面应力状态分析的图解法	229
第四节 广义胡克定律	233
第五节 强度理论	235
第二十章 组合变形	238
第一节 组合变形的概念	238
第二节 斜弯曲	239
第三节 拉伸(压缩)与弯曲组合	243
第四节 偏心压缩(拉伸)	244
第五节 扭转与弯曲组合	245
第二十一章 压杆稳定	249
第一节 压杆稳定的概念	249
第二节 细长压杆的临界力	250
第三节 压杆的临界应力总图	252
第四节 压杆的稳定计算	255
第五节 提高压杆稳定性的措施	258

第五篇 变形体动力学

第二十二章 动载荷	260
第一节 等加速运动构件的应力和变形计算	260
第二节 杆件受到冲击载荷作用时的应力和变形计算	264
第三节 提高构件抗冲击能力的措施	270
第四节 冲击韧度	271
附录 A 简单形体的形心	273
附录 B 若干均质刚体的转动惯量及回转半径	275
附录 C 截面图形的几何性质	277
参考文献	282

绪 论

一、工程力学的研究内容

工程力学是一门研究物体机械运动以及构件强度、刚度和稳定性的科学，它涵盖了理论力学与材料力学两门课程的主要内容。

力学是研究物体宏观机械运动的学科。所谓“机械运动”是指物体在空间的位置随时间的变化。机械运动是物质运动最简单、最基本的形式。

工程力学所研究的机械运动主要有两大类：一类是研究物体的运动及研究作用在物体上的力和运动之间的关系；另一类是研究物体的变形，即研究作用在物体上的力与变形之间的关系。本书将这两类问题归纳为刚体力学与变形体力学两大部分。这两类问题既有区别，又不是完全孤立的，在许多方面都有一些交叉问题，例如在研究振动时又必须考虑有关变形的一些问题。所有这些问题都是以这两大类问题为基础的。

当所研究物体的运动范围远远超过其本身的几何尺度时，物体的形状和大小对运动的影响很小，可将其抽象为只有质量而无体积的“质点”。由有限或无限多质点组成的系统，称为“质点系”。因此，质点的力学问题是工程力学的基础。

在机电设备、机械安装，以及建筑、化工、轻工、包装等许多工业生产领域，都有大量的工程力学应用问题，例如高速离心机转鼓的回转运动、牛头刨床的往复运动、包装机械的各种复杂运动等。静止是机械运动的特例。研究静止物体的受力分析和平衡问题，以及机械运动的规律问题，都要用到“刚体静力学”、“刚体运动学”、“刚体动力学”的知识。

各类结构物、设备和机械都是由构件组成的，构件在工作时，总要受到载荷的作用。为了使构件在载荷作用下能正常工作而不损坏，也不发生过度的变形和不丧失稳定，就要求构件具有一定的强度、刚度和稳定性，“变形体静力学”和“变形体动力学”就是研究在各类载荷作用下构件强度、刚度和稳定性计算原理的学科。

二、工程力学的研究方法

进行现场观察和实验是认识力学规律的重要实践性环节。将实践过程中所得结果，利用抽象化的方法，加以分析、归纳、综合，可得到一些最普遍的公理或定律，再通过严格的数学推演，可得到运用于工程的力学公式。学习工程力学，并不要求去重复经历力学的发展过程，而是要深刻理解工程力学中已被实践证明是正确的基本概念和基本定律，这些是力学知识的基础，由基本概念和基本定律导

出的工程力学定理和公式，必须熟练掌握。演算一定数量的习题，把学到的理论知识不断用到实践中去，是巩固和加深理解所学知识的重要途径。

自然界与各种工程中涉及机械运动的物体有时是很复杂的，工程力学研究其机械运动时，必须忽略一些次要因素的影响，对其进行合理的简化，抽象出研究模型。研究不同的问题，采用不同的力学模型，是研究工程力学问题的重要方法。

由于计算机的飞速发展和广泛应用，除传统的力学研究方法（理论方法和实验方法）外，又增加了一种新的研究方法，即计算机分析方法。对于一些较为复杂的力学问题，人们可以借助于计算机推导那些难于导出的公式，利用计算机整理数据、绘制实验曲线、显示图形等。由此可以展望，力学加电子计算机将成为工程设计的新的主要手段。

三、工程力学在机电类专业中的地位和作用

“工程力学”是机电类专业和其他工科类专业的重要技术基础课。工程力学中讲述的基础理论和基本知识，在基础课与专业课之间起桥梁作用。它为专业设备及机器的机械运动分析和强度计算提供必要的理论基础。

一些日常生活中的现象和工程技术问题，可直接运用工程力学的基本知识去分析研究。比较复杂的问题，则需要用工程力学知识结合其他专业知识进行研究。所以学好工程力学知识，可为解决工程实际问题打下基础。

工程力学的理论既抽象而又紧密结合实际，研究的问题涉及面广，系统性、逻辑性强。这些特点，对于培养辩证唯物主义世界观、培养逻辑思维和分析问题的能力，也起着重要作用。

第一篇 刚体静力学

在任何外力作用下，物体内任意两点之间的距离都保持不变，这样的物体称为刚体。在自然界中受力作用后绝对不变形的刚体实际上是不存在的。可见，刚体只是抽象化了的力学模型。

研究刚体在力作用下平衡规律的科学，称为刚体静力学（又称矢量静力学或静力学）。所谓平衡，一般是指物体相对于地面保持静止或作匀速直线运动，它是机械运动的特殊情况。刚体静力学主要研究两大类问题：力系的等效与简化及力系的平衡条件和平衡方程。而受力分析是研究所有力学问题最基本和最重要的基础知识，务必十分重视。

静力学是动力学的特例。作为研究力系简化和平衡的理论基础的等效力系定理，就是依据由牛顿运动定律导出的质点系动力学普遍定理而得到的。而刚体静力学又是研究变形体静力学的基础。当考虑一些更为复杂的力学现象时，必须考虑物体变形的平衡问题，也是以刚体静力学的概念和方法为基本理论，再附加一些变形协调方程而求得的。

第一章 基本概念及基本原理

力与力偶是力学中两个基本物理量。力与力偶使物体产生的运动效应和变形效应是力学分析的基本知识。本章所述的力、刚体、力偶、约束等基本概念以及静力学的几个公理，是静力学的基础。而研究工程中常见的约束及产生的约束力，研究如何将工程中的实际问题简化成便于分析计算的力学模型则是本章的重要内容。

第一节 力学模型

一般讲，工程实际中所研究的物体有时是相当复杂的。为了便于进行力学分析和计算，常根据所研究问题的不同，找到研究对象的某些共性和影响研究结果的某些主要因素，而将某些次要因素忽略不计，从而把复杂的工程实际问题简化为合理的力学模型，这一过程称为“建模”。然后再在该数学力学模型基础上进行

求解。建模并不是一件很容易的工作，往往需要进行多次反复和修改才能完成。力学模型的合理性直接决定计算结果的正确与否。建模能力只有在不断实践的过程中才能得到提高。本节仅介绍在工程力学中常见的质点、刚体和质点系三种简单的理想模型。

(1) 质点 (particle) 当物体的大小和形状对所讨论的问题无关紧要时，可以忽略不计，而只需计及其质量，就可将该物体视为只有质量而不计大小的点，称为质点。

(2) 刚体 (rigid body) 在任何外力作用下都不变形的物体称为刚体。对所讨论的问题而言，刚体的大小和形状不能忽略，而仅仅忽略了它的变形。自然界中绝对不变形的物体实际上是不存在的，刚体只是理想化了的力学模型。

(3) 质点系 (particle system) 质点系是相互间有一定联系的有限或无限多质点的总称，有时也称为机械系统。刚体可视为由无限多质点组成的不变形的质点系。由若干个刚体组成的系统称为刚体系统，有时也称为物体系统。

上述几种力学模型，只要不考虑变形，在研究它们的平衡或运动时，并不特指某些具体物体，即既不考虑其材质，也不考虑其在工程中的实际用途，而只是客观存在的实际物体的科学抽象。

第二节 力的概念

力 (force) 是物体间的相互机械作用。力的作用有两种效应：使物体产生运动状态变化和形状变化，分别称为运动效应 (effect of motion) 和变形效应 (effect of deformation)。在刚体力学中，只讨论力的运动效应，力的变形效应将在变形体力学中考虑。

力对物体作用的效应取决于力的三要素 (three elements of a force)：力的大小、方向和作用点。所以力是矢量，应符合矢量运算法则。

度量力的大小通常采用国际单位制 (SI)，力的单位是牛顿 (N) 或千牛顿 (kN)。使 1kg 质量的物体产生 1m/s^2 加速度的力定义为 1N。

力的方向是指它在空间的方位和指向两个意思。

力的作用点是指力在物体上的作用位置。

力作用的理想化情况可视为集中力或分布力。当力的作用面积小到可以不计其大小时，就抽象为一个点，这个点就是力的作用点，而这种作用于一点的力则称为集中力；当作用力分布在有限面积上或体积内时，称为分布力。分布力的分布规律一般比较复杂，也需要简化。实际上，集中力是分布力的理想化模型。

力矢量 F 可以带箭矢的线段 $\overline{AB}$ 表示，如图 1-1 所示。图中 A 为力 F 的作用点， KL 为 F 的作用线。

实践证明,作用于刚体的力可沿其作用线移动而不改变其对刚体的运动效应。例如,如图 1-2 所示,为使小车运动,在车后 A 点用力 F 推车与在车前 B 点用同样的力 F 拉车,效果是一样的。力的这一性质称为 力的可传性 (transmissibility of a force)。

由于力具有可传性,所以力矢 F 是 滑动矢量 (sliding vector)。

作用于物体上同一点的两个力可以合成为作用于该点的一个合力,合力的大小和方向由以这两个力矢量为邻边所构成的平行四边形的对角线表示。这一求矢量和的方法称为 平行四边形法则 (parallelogram law), 如图 1-3 所示。以矢量方程表示, 为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (1-1)$$

也可用 三角形法则 (triangle law) 求合力的大小和方向。作 $\overrightarrow{AB}$ 矢代表力 F_1 , 再从 F_1 的终点 B 作矢 $\overrightarrow{BC}$ 代表 F_2 , 最后从 A 点指向终点 C 的矢量 $\overrightarrow{AC}$ 就代表了合力 F_R 。三角形法则与分力的次序无关, 即也可先作 F_2 , 再从 F_2 的终点作 F_1 , 所得合力相同。但应注意, 力三角形只能表明力的大小和方向, 并不表示力的作用点或作用线。

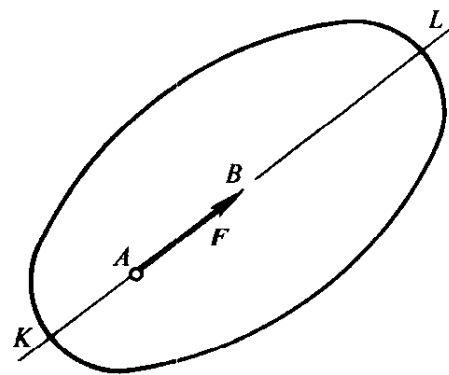


图 1-1 力的作用线

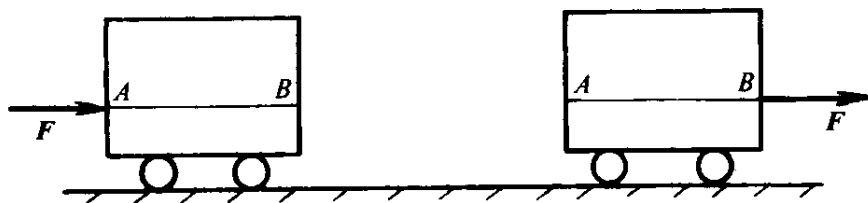


图 1-2 力的可传性

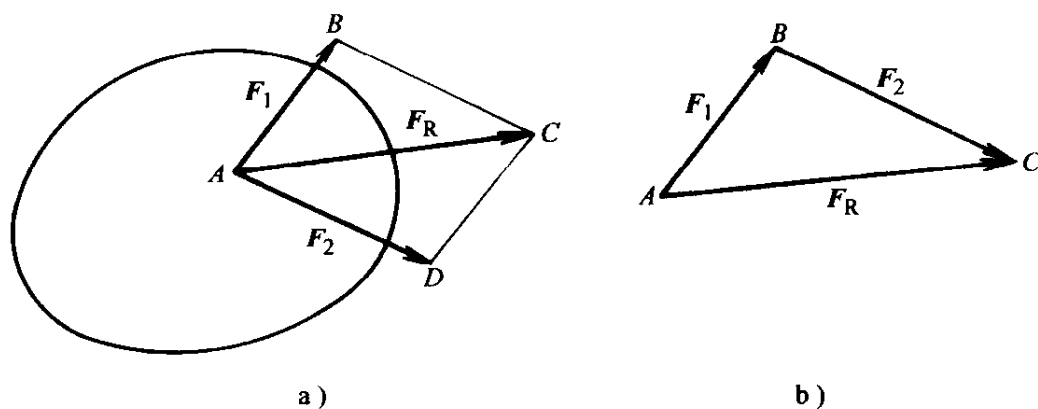


图 1-3 力的合成

第三节 静力学基本原理

静力学基本原理是牛顿运动定律对于研究平衡问题的通俗归纳。这些原理,有的就是牛顿运动定律本身的内容;有的则可由牛顿运动定律导出。作为经过反复观察和实践总结出来的客观规律,这些原理正确地反映了作用于物体上的力的基本性质。下面不加证明地讲述这几个原理。

一、二力平衡原理 (equilibrium principle of two forces)

刚体只受两个力作用而平衡的必要和充分条件是:这两个力等值、反向、共线。

例如,在图 1-4 中,若各物体均在力 F_1 及 F_2 的作用下保持平衡,则此两力必等值、反向,并沿着其作用点 A 、 B 的连线,作用在同一物体上。否则,该物体就不能平衡。

在机械及土建结构中,有仅在两端各受一力作用而平衡的直杆或构件,通常称为二力杆(见图 1-4a、b)或二力构件(见图 1-4c)。

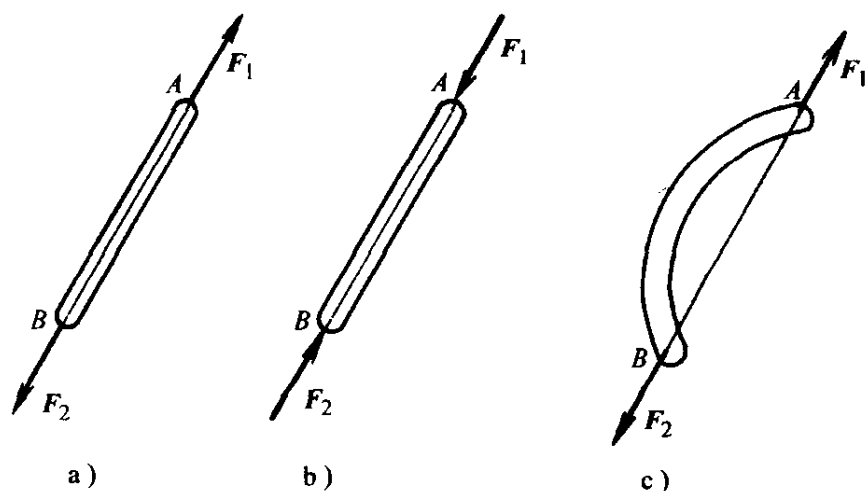


图 1-4 二力平衡

二力平衡原理是论证刚体平衡条件的基础。

二、加减平衡力系原理 (principle of added or moved equilibrium force system)

在任一力系中加上或减去一个平衡力系,所得新力系与原力系对刚体的运动效应相同。这个原理不适用于变形体。

运用上述两原理,可从理论上证明第二节中所述的力的可传性(请读者自行证明)。

三、作用与反作用定律 (principle of action and reaction)

两物体间的相互作用力,总是等值、反向、共线,并分别作用在这两个物体上。

这就是牛顿第三定律。力学中一切有相互作用现象的物体，无论是静止的还是运动着的，都普遍适用。作用力与反作用力是成对出现的，两者总是同时存在，又同时消失。

应该注意的是，不能把该定律与二力平衡原理混淆起来：二力平衡原理的两个力是作用在同一刚体上；而作用力与反作用力却是分别作用在两个相互作用的不同物体上，因此，作用力与反作用力不是一对平衡力。

四、刚化原理 (principle of digitization)

当变形体在已知力系作用下处于平衡时，若将此变形体刚化为刚体，则其平衡状态不变。

此原理表明，对已知处于平衡状态的变形体，可以应用刚体静力学的平衡条件。这样，就能把刚体的平衡条件应用到变形体的平衡问题中去，从而扩大了刚体静力学的应用范围。

必须指出，刚体静力学中得到的平衡条件，对于刚体而言是充分和必要的，而对变形体而言，却只是必要的而不一定是充分的，它还需要满足由变形体的物体性质所决定的其他附加条件。

第四节 力的分解与力的投影

力的分解与力的投影是两个不同的概念。一个力可分解成两个或两个以上的分力，力沿坐标轴分解的分力是矢量，因此，力的分解应满足矢量运算法则；而力在坐标轴上的投影，是该力的起点与终点分别向该坐标轴作垂线而截得的线段。它们概念上的区别，对非正交坐标轴最易说明。

显然，图 1-5a 中分力 F_1 、 F_2 的大小，并不等于图 1-5b 中投影 OA 、 OB 的大小。惟有当力沿正交坐标轴分解和投影时，其分力与投影的值相等。

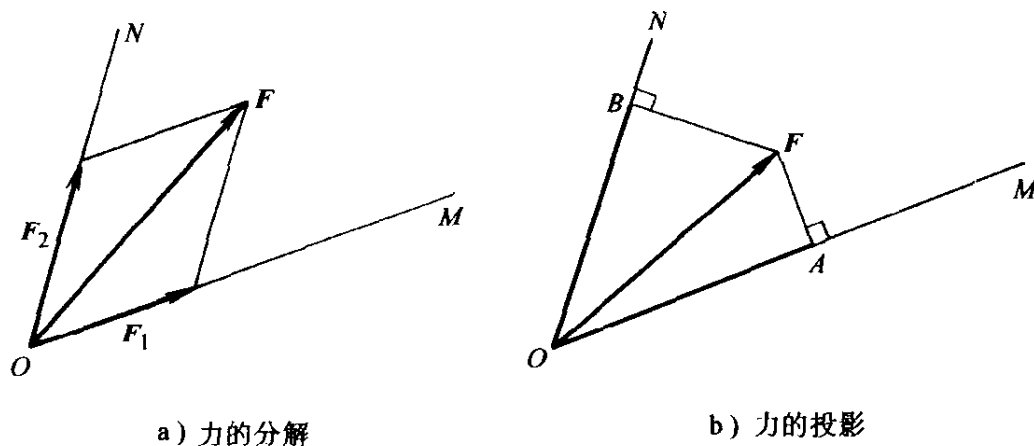


图 1-5 力的分解与投影

a) 力的分解 b) 力的投影

最常用的力的分解是将一个力分解为沿直角坐标轴 x 、 y 、 z 的分力，如图 1-6 所示。根据矢量运算法则，力 F 的矢量分解公式为

$$F = F_x + F_y + F_z = F_x i + F_y j + F_z k \quad (1-2)$$

式中 i 、 j 、 k ——沿直角坐标轴正向的单位矢量；

F_x 、 F_y 、 F_z —— F 力在 x 、 y 、 z 轴上的投影。

$$F_x = F \cos \alpha, F_y = F \cos \beta, F_z = F \cos \gamma \quad (1-3)$$

式中 α 、 β 、 γ —— F 力与 x 、 y 、 z 轴正向的夹角。

α 、 β 、 γ 可以是锐角，也可以是钝角。由夹角的余弦即知力投影的正负号：当力与轴间夹角为锐角时，其值为正；当夹角为钝角时，其值为负。力在轴上的投影为代数量。

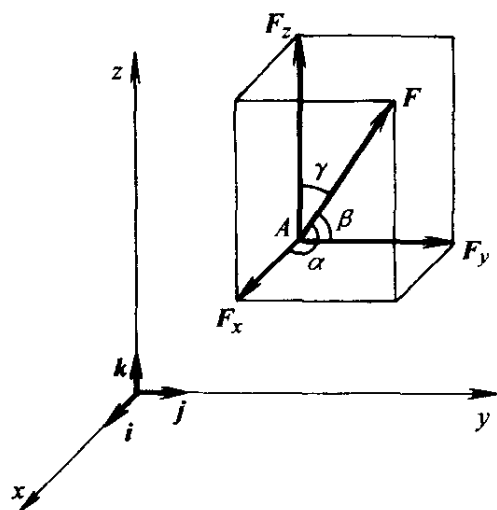


图 1-6 力沿直角坐标轴的分解

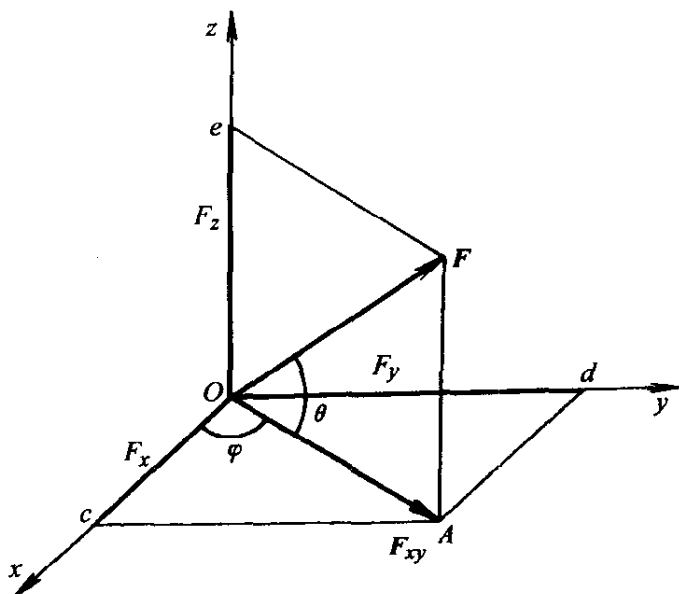


图 1-7 二次投影法

当力与三个坐标轴的夹角不全知道，或者不易直接确定时，常用二次投影法求该力在坐标轴上的投影（见图 1-7）。先将力 F 投影到 Oxy 平面（要注意的是，空间力 F 在 Oxy 平面上的投影 F_{xy} 仍是矢量），再将 F_{xy} 投影到 x 、 y 轴上，于是得到力 F 在三个坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \theta \cos \varphi \\ F_y &= F \cos \theta \sin \varphi \\ F_z &= F \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

在许多实际问题中，运用二次投影法往往比较方便。

若已知力 F 在 x 、 y 、 z 轴上的投影 F_x 、 F_y 、 F_z ，则可求得 F 的大小及方向余弦