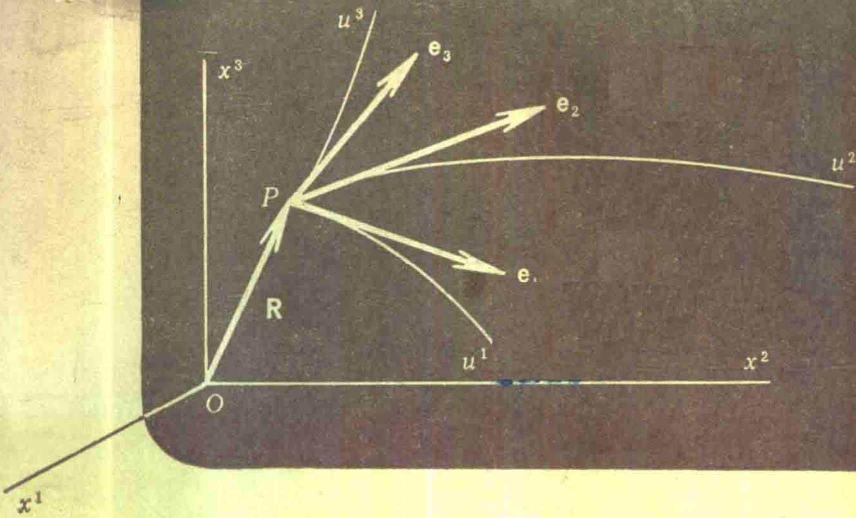


孔超群
李康先 编

张量分析及其在连续介质力学中的应用

张量分析及其在连续介质力学中的应用

哈尔滨船舶工程学院出版社

张量分析及其

在连续介质力学中的应用

孔超群　李康先　编

哈尔滨船舶工程学院出版社

内 容 提 要

本书通过浅显的阐述，系统地介绍了张量的基本概念、基本特性、基本算法及其在连续介质力学中的某些应用。内容由浅入深，通俗易懂。全书共分四章。前三章分别介绍直角坐标系、斜角直线坐标系和一般坐标中的张量。第四章介绍张量及张量算法的具体应用。各章节均附有一定数量的例题。书后附有习题参考答案。书中特别提到对于初学者容易糊涂、混淆的概念和内容，通过联系对比的阐述予以澄清，并通过示图加强直观性。

本书可作为大专院校师生的教学参考书，也可供机械、土建、水利、地质、造船等专业的工程技术人员了解张量分析基础知识的参考。

张量分析及其在连续介质力学中的应用

孔超群　李康先　编

哈尔滨船舶工程学院出版社出版
北 京 市 新 华 书 店 发 行
哈尔滨船舶工程学院印刷厂印装

787×1092　1/16开　印张：8　200千字
1986年12月第一版　1986年12月第一次印刷　印数：0,001—4,000册
统一书号：15413·002　　定价：1.45元

前　　言

本书遵循由浅入深、由简到繁、循序渐进的原则，通过浅显的、较为形象化的阐述，系统地介绍有关张量分析的一些基本知识及其在连续介质力学中的某些应用。

全书共分四章。前三章是本书的主体，介绍张量的基本概念、基本特性和基本算法。考虑到直接讨论一般张量会较集中地引入许多新的概念、符号和运算法则，从而增加学习的难度，因此我们在讨论一般张量之前，先讨论直角坐标系和斜角直线坐标系中的张量，逐步地、有层次地、前后呼应地引入各种新的概念、符号和运算法则，使难点分散，梯度平缓。各部分内容的讨论一般都从矢量开始，逐步引伸到高阶张量。书中特别注意了对一些容易模糊、混淆的概念和内容通过联系对比的阐述予以澄清。此外，每一章节均列举了一定数量的例题，便于读者对相应的概念和内容作进一步的、具体的理解。第四章主要是结合连续介质力学中一些最基础的内容来具体说明张量和张量算法的某些应用，而不是系统地介绍连续介质力学方面的知识。书的末尾提供了与各章内容相呼应的、不同难度的习题，并附有参考答案。

本书第一、二、三章由孔超群执笔，第四章由李康先执笔。

我们衷心地感谢戴遗山教授在百忙中审阅了全部书稿，并对本书的编写给予热诚的鼓励。罗芳本副教授、高玉臣副教授以及吴立人博士、何大同、祖国成、张光明等讲师在本书的编写和修改过程中认真地通阅了原稿，并提出了许多极为有益的建议和具体的修改意见。孙守光同志在文字的整理、校对以及例题、习题的验算等方面进行了大量的认真细致的工作。在此我们向上列同志致以深切、诚挚的谢意。

由于我们水平有限，书中难免有错误和不妥之处，谨希读者批评指正。

编　者

1984.2

目　　录

引　言

张量是一个数学概念。我们知道，可以由一个实数值完全确定的物理量（如长度、温度、密度等）称为**标量**；可以用一个实数值（模值）和空间一定方向来表征的物理量（如力、速度、加速度等）称为**矢量**。有许多物理量既不属于标量，也不属于矢量，它们具有更复杂的性质，需要用更复杂的数学实体——**张量**来描述。例如，连续体内一点的应力状态和一点的应变状态需要分别用应力张量$\boldsymbol{\sigma}$和应变张量$\boldsymbol{\in}$来描述，

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\in}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix};$$

又如，质点对于某定点的转动惯量需要用惯性张量来描述……。事实上，标量和矢量都是张量的特例，它们分别为**零阶张量**和**一阶张量**。这是两种最简单的张量。

在处理物理学和力学问题中，张量理论是一种有效的数学工具。它有许多突出的优点，例如：

(1) 张量方程的一个重要特性是与坐标系的选择无关。这一特性使它能够很好地反映物理定律和各物理量之间的关系。张量方程对于任何坐标系都具有统一的形式，因此，当坐标系不确定时，照样可以将物理现象用数学方程表达出来。

(2) 张量方程的上述特性使我们能够从某种特殊坐标系中建立起适用于一切坐标系的方程。

(3) 属于某阶张量的某种物理量所具有的张量特性，对于所有这类张量（不管它们表达何种物理现象）来说，必定也都具有这些特性。（例如应力张量是二阶对称张量，倘若我们掌握了应力的张量特性，便可以断定所有二阶对称张量，如应变张量、惯性张量以及平板曲率张量等，也都具有这些特性。）

(4) 张量表述和张量算法具有十分清晰、简捷的特点。

张量理论是数学中的一个分支。张量的普遍概念是十九世纪中叶对连续介质力学有了深入研究之后建立起来的。（在法文中，张量 tension 一词具有"应力"的意思；也就是说，张量是像应力那样具有某些特定性质的量。）1887—1896年间，李奇(G.Ricci)系统地论述了张量算法（又称为李奇算法），但当时没有引起人们的重视。直到 1913—1916 年间，爱因斯坦 (A.EinsTein)以四维黎曼空间为基础，以张量算法为工具，建立了广义相对论，从此以后，研究张量的人剧增。近一、二十年，人们对于这一数学工具又有了新的认识，张量表述和张量算法在物理学和力学领域中得到了广泛的应用。弗留盖 (W.Flu—gge)认为：研究连续介质力学应用了张量，真好比如鱼得水；新一代的工程师对张量学习和理解得越透彻，使用得越广泛，张量的用处将越大。

第一章　直角坐标系中的矢量和张量

§1.1　符号及求和约定

(一) 指标记法

本章所讨论的内容都限于直角坐标系。通常用 x、y、z 表示直角坐标系的坐标。空间某一点 $P(x, y, z)$ 的位置矢量可写成

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1.1—1}$$

式中 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 表示沿坐标轴方向的单位矢量(图1—1a)，称为**单位基矢量**。现在我们把 x，y，z 分别改写成 x_1, x_2, x_3，然后统一用 $x_i(i=1,2,3)$ 来表示；类似地，把 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别改

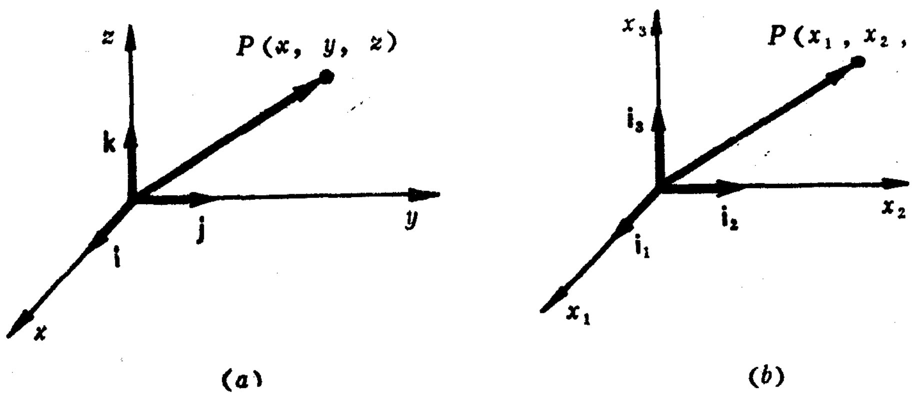


图 1—1

写成 $\mathbf{i}_1$，$\mathbf{i}_2$，$\mathbf{i}_3$（图1—1a），然后统一地用 $\mathbf{i}_i(i=1,2,3)$ 来表示。于是(1.1—1)可写成

$$\mathbf{R} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{i}_i. \tag{1.1—2}$$

在一般情况下，$a_i(i=1,2,\cdots,N)$ 代表 N 个量 $a_1, a_2, \cdots, a_N$；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots,M)$ 代表 $N\times M$ 个量

$$\begin{array}{l} a_{11},\ a_{12},\ \cdots,a_{1M}, \\ a_{21},\ a_{22},\ \cdots,a_{2M}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{N1},\ a_{N2},\ \cdots,a_{NM}; \end{array}$$

$a_{ijk}(i=1,2,\cdots,L;\ j=1,2,\cdots,M;\ k=1,2,\cdots,N)$ 代表 $L\times M\times N$ 个量；依此类推。**这种采用赋值字母为指标的表示方法称为指标记法**①。

---

① 指标分上标和下标两种，例如 a_{ij} 中的指标 i，j 为下标，a^{pq} 中的指标 p，q 为上标。对于直角坐标系，可以将所有的指标均写成下标，因此在这一章里只采用下标。关于上标，将在第二章里介绍。

（二）求和约定及哑标

设有求和表达式

$$S = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_N x_N.$$

利用求和记号Σ，可将上式写成

$$S = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i.$$

现在我们将上式写成更紧凑的形式

$$S = a_i x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N).$$

这里，我们略去了求和记号Σ，并规定：**若某个指标在某一项中重复出现，而且仅重复一次，则该项代表一个和式，按重复指标的取值范围求和。**这就是爱因斯坦所提出的**求和约定**(summation convention)．例如

当 $i = 1, 2, \cdots, N$时，a_{ii} 表示$\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$；

当 i，$j = 1, 2, \cdots, N$时，$a_{ij} x_i x_j$ 表示 $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N} a_{ij} x_i x_j$.

在三维空间中，通常取$N = 3$。因此当我们未标出求和指标的取值范围时，就意味着求和指标的取值范围为 1 至 3。例如

$$\mathbf{R} = x_i \mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{i}_i;$$

$$\| \mathbf{R} \| = x_i x_i = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i;$$

$$a_{ijk} x_i x_j x_k = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk} x_i x_j x_k.$$

表示求和的重复指标称为**哑标** (dummy index)．显然，哑标采用什么字母来表示对结果没有影响。例如

$$a_i x_i = a_m x_m \quad (\text{因为} \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = \sum_{m=1}^{3} a_m x_m);$$

$$a_{ii} = a_{kk} \quad (\text{因为} \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{k=1}^{3} a_{kk}).$$

如果在某一项中，重复指标出现两次以上，则该指标便失去了求和的含义，它不再是哑标了。例如

$$a_{ij} x_i x_j x_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i x_j x_j \neq \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j x_j,$$

上式左边 i 是哑标，j 不是哑标；又如

$$(a_i x_i)^2 = a_i x_i a_j x_j \neq a_i x_i a_i x_i.$$

（三）自由指标

设有方程组

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{cases}$$

按照求和约定，上列方程组可写成

$$\begin{cases} y_1 = a_{1m}x_m \\ y_2 = a_{2m}x_m \\ y_3 = a_{3m}x_m, \end{cases}$$

或 $$y_i = a_{im}x_m \quad (i = 1,2,3).$$

上式中的指标 i 不是哑标。凡不属于哑标的指标均称为自由指标(free index)．上式也可以写成

$$y_j = a_{jm}x_m \quad (j = 1,2,3).$$

在同一方程中，每一项的自由指标必须相同。例如

$$a_i + b_i = c_i \quad (i = 1,2,3);$$

$$a_i + b_i c_j d_j = 0 \quad (i = 1,2,3);$$

$$T_{ij} = A_{im}A_{jm} \quad (i, j = 1,2,3);$$

而方程 $a_i = b_{jm}x_m$ 是没有意义的。

（四）克罗尼克尔符号

克罗尼克尔符号(Kronecker delta) δ_{ij} 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j); \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \tag{1.1—3}$$

按此定义可导出下列结果：

(1) $\delta_{ij} = \delta_{ji}$; (1.1—4)

(2) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$; (1.1—5)

(3) $$\begin{cases} \delta_{1m}a_m = \delta_{11}a_1 + \delta_{12}a_2 + \delta_{13}a_3 = a_1 \\ \delta_{2m}a_m = a_2 \\ \delta_{3m}a_m = a_3 \end{cases}$$

或 $$\delta_{im}a_m = a_i \quad (i = 1,2,3), \tag{1.1—6a}$$

类似地有 $$\delta_{mi}a_m = a_i; \tag{1.1—6b}$$

(4) $$\begin{cases} \delta_{1m}T_{mj} = \delta_{11}T_{1j} + \delta_{12}T_{2j} + \delta_{13}T_{3j} = T_{1j} \\ \delta_{2m}T_{mj} = T_{2j} \\ \delta_{3m}T_{mj} = T_{3j} \end{cases}$$

或 $$\delta_{im}T_{mj} = T_{ij}, \tag{1.1—6c}$$

类似地有 $$\delta_{mi}T_{jm} = T_{ji} \tag{1.1—6d}$$

$$\delta_{im}\delta_{mj} = \delta_{ij} \tag{1.1—6e}$$

$$\delta_{im}\delta_{mj}\delta_{jk} = \delta_{ik}, \tag{1.1—6f}$$

由(1.1—6)可以看出，克罗尼克尔符号能起到改换自由指标的作用；

(5) $\delta_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j$, (1.1—7)

上式表明 δ_{ij} 为单位基矢量 $\mathbf{i}_i$ 与 $\mathbf{i}_j$ 的点积。

（五）置换符号

置换符号(permutation symbol) e_{ijk}定义为

$$e_{ijk}=\begin{cases}1 & 若\ i,j,k\ 形成\ 1,2,3\ 的循环序列①（或偶次置换）；\\ -1 & 若\ i,j,k\ 形成\ 1,2,3\ 的逆循环序列（或奇次置换）；\\ 0 & 若\ i,j,k\ 中有相同的指标.\end{cases} \tag{1.1—8}$$

例如

$$\begin{cases}e_{123}=e_{231}=e_{312}=1,\\ e_{321}=e_{132}=e_{213}=-1,\\ e_{111}=e_{112}=e_{113}=\cdots=e_{333}=0.\end{cases} \tag{1.1—9}$$

e_{ijk} 共代表 27 个量，其中 21 个为零。显然，

$$e_{ijk}=e_{kij}=e_{jki}=-e_{kji}=-e_{ikj}=-e_{jik}.$$

利用置换符号e_{ijk}可将两矢量的矢积$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$表示成简单的分量形式。例如

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}=C_i\mathbf{i}_i, \tag{1.1—10}$$

则

$$C_i=e_{ijk}A_jB_k, \tag{1.1—11}$$

即

$$\begin{cases}C_1=e_{123}A_2B_3+e_{132}A_3B_2=A_2B_3-A_3B_2\\ C_2=e_{231}A_3B_1+e_{213}A_1B_3=A_3B_1-A_1B_3\\ C_3=e_{312}A_1B_2+e_{321}A_2B_1=A_1B_2-B_1A_2.\end{cases}$$

将(1.1—11)代入(1.1—10)，得

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=e_{ijk}A_jB_k\mathbf{i}_i, \tag{1.1—12}$$

若令上式中的$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$分别为$\mathbf{i}_j$，$\mathbf{i}_k$，可得

$$\mathbf{i}_j\times\mathbf{i}_k=e_{ijk}\mathbf{i}_i,$$

再将两边点乘 $\mathbf{i}_m$，便得

$$\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{i}_j\times\mathbf{i}_k=e_{ijk}\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_m=e_{ijk}\delta_{im}=e_{mjk},$$

即

$$e_{ijk}=\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_j\times\mathbf{i}_k. \tag{1.1—13}$$

可见 e_{ijk} 是直角坐标系中基矢量的混合积（数性三重积）②。

置换符号 e_{ijk} 还可以用来定义三阶行列式。

行列式

$$|a_{ij}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

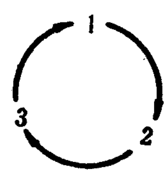
代表 $\pm a_{i1}a_{j2}a_{k3}$ 的和式；该和式的每一项中 i,j,k 的值互不相等；而且当 i,j,k 为 1，2，3 的循环序列时取正号，为逆循环序列时取负号；因此，上式可写成

$$|a_{ij}|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=e_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}. \tag{1.1—14}$$

---

①所谓“1，2，3 的循环序列”是指指标 1，2，3 的排列保持右图中顺时针方向的顺序。

②根据(1.1—8)中给出的置换符号e_{ijk}的定义，(1.1—13)中的基矢量 $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3$ 应构成右手坐标系。关于这个问题将在§1.2例 3 中进一步说明。



(六) 指标记法的运算特点

(1) 求和：凡自由指标完全相同的项才能相加（或减），例如

$$a_{ij}+b_{ij}=C_{ij},\quad a_i+\delta_{im}b_m=C_{ik}d_k.$$

而 $a_{ij}+b_{ik}$，a_i+b_{ij} 都是无意义的。

(2) 代入：设

$$a_i=U_{im}b_m, \tag{I}$$

$$b_i=V_{im}C_m. \tag{II}$$

若将(II)式中的 b_i 代入(I)式，必须先把(II)式中的自由指标 i 改为 m，把哑标 m 改用其它字母，例如 n，即写成 $b_m=V_{mn}C_n$，然后将它代入(I)式，得

$$a_i=U_{im}V_{mn}C_n.$$

(3) 乘积：设

$$p=a_mb_m, \tag{III}$$

$$q=C_md_m, \tag{IV}$$

则乘积 pq 的表达式不能直接写成

$$pq=a_mb_mc_md_m,$$

必须先将(III)式或(IV)式中的哑标改用其它字母，例如$q=c_nd_n$，然后将它与(III)式相乘，得

$$pq=a_mb_mc_nd_n.$$

(4) 因子分解：设

$$T_{ij}n_j-\lambda n_i=0.$$

若要将n_j作为公因子提出来，必须先把 n_i 写成$\delta_{ij}n_j$，即

$$T_{ij}n_j-\lambda\delta_{ij}n_j=(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})n_j=0. \tag{V}$$

注意，上式中不能因 $n_j\neq 0$ 而断定$(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0$。上式相当于

$$(T_{i1}-\lambda\delta_{i1})n_1+(T_{i2}-\lambda\delta_{i2})n_2+(T_{i3}-\lambda\delta_{i3})n_3=0. \tag{VI}$$

若n_j具有任意性，则由(V)式可得$T_{ij}-\lambda\delta_{ij}=0$。例如取 $n_1=1$，$n_2=n_3=0$，由(VI)式可得 $T_{i1}-\lambda\delta_{i1}=0$；类似地，取 $n_2=1$，$n_1=n_3=0$ 和 $n_3=1$，$n_1=n_2=0$，可得 $T_{i2}-\lambda\delta_{i2}=0$，$T_{i3}-\lambda\delta_{i3}=0$；这三个等式可统一地写成$T_{ij}-\lambda\delta_{ij}=0$.

§1.2 矢量的变换规律

(一) 坐标变换

设有直角坐标系$ox_1x_2x_3$和 $ox_{1'}x_{2'}x_{3'}$，它们具有共同的原点 o（图 1—2a），$x_{i'}$坐标系相当于x_i坐标系旋转了一个角度。空间一点P在这两个坐标系中的位置矢量$\mathbf{R}$可分别写成（图 1—2b,c）

$$\mathbf{R}=x_1\mathbf{i}_1+x_2\mathbf{i}_2+x_3\mathbf{i}_3=x_i\mathbf{i}_i, \tag{1.2—1}$$

$$\mathbf{R}=x_{1'}\mathbf{i}_{1'}+x_{2'}\mathbf{i}_{2'}+x_{3'}\mathbf{i}_{3'}=x_{i'}\mathbf{i}_{i'}. \tag{1.2—2}$$

现在我们来推导原坐标x_i与新坐标 $x_{j'}$的变换关系。

设 $\beta_{ij'}$ 表示原坐标系中的x_i轴与新坐标系中的$x_{j'}$轴夹角的余弦，即

$$\beta_{ij'}=\cos(\mathbf{i}_i,\mathbf{i}_{j'})=\mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_{j'}=\beta_{j'i}. \tag{1.2—3}$$

由(1.2—1)和(1.2—2)可知

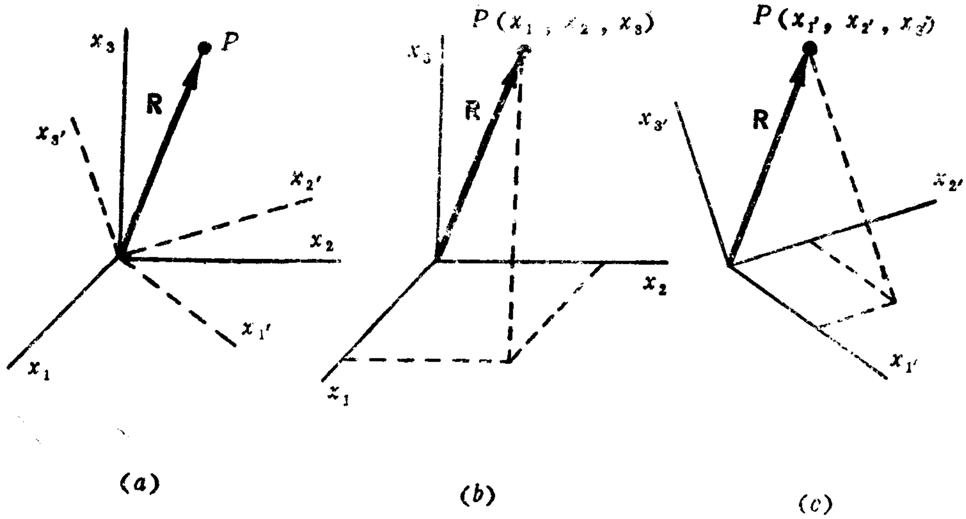


图 1—2

$$x_{i'}\mathbf{i}_{i'} = x_j\mathbf{i}_j.$$

上式两边点乘$\mathbf{i}_{k'}$，得

$$x_{i'}\mathbf{i}_{i'}\cdot\mathbf{i}_{k'} = x_j\mathbf{i}_j\cdot\mathbf{i}_{k'}.$$

注意到(1.1—7)和(1.2—3)，由上式可得

$$x_{i'}\delta_{i'k'} = x_j\beta_{jk'},$$

即 $$x_{k'} = \beta_{jk'}x_j.$$

改换指标($k'\to j'$，$j\to i$)，上式可写成

$$x_{j'} = \beta_{ij'}x_i. \tag{1.2—4}$$

类似地，可得上式的逆变换为

$$x_i = \beta_{j'i}x_{j'}. \tag{1.2—5}$$

此处 $\beta_{ij'} = \beta_{j'i} = \mathbf{i}_i\cdot\mathbf{i}_{j'}$ 称为变换系数。

由于矢量$\mathbf{R}$的长度不会因坐标变换而改变，在原坐标系中$\|\mathbf{R}\|^2 = x_ix_i$，在新坐标系中$\|\mathbf{R}\|^2 = x_{j'}x_{j'}$，由此得

$$x_ix_i = x_{j'}x_{j'}. \tag{1.2—6}$$

根据(1.2—4)，有$x_{j'}x_{j'} = \beta_{j'i}x_i\beta_{j'k}x_k$.

将上式代入(1.2—6)，得

$$x_ix_i = \beta_{j'i}\beta_{j'k}x_ix_k,$$

即 $$x_ix_k\delta_{ik} = \beta_{j'i}\beta_{j'k}x_ix_k,$$

或 $$x_ix_k(\delta_{ik} - \beta_{j'i}\beta_{j'k}) = 0.$$

因点的坐标 x_i 具有任意性，故由上式可得

$$\beta_{j'i}\beta_{j'k} = \delta_{ik}. \tag{1.2—7}$$

类似地，可得 $$\beta_{ij'}\beta_{ik'} = \delta_{j'k'}. \tag{1.2—8}$$

具有这种性质的变换称为线性正交变换。

（二）矢量的变换规律

设有矢量**A**，它在x_j坐标系中，沿x_j轴的分量为A_j

$$\mathbf{A}=A_j\mathbf{i}_j; \tag{1.2—9}$$

类似地，在$x_{j'}$坐标系中有

$$\mathbf{A}=A_{j'}\mathbf{i}_{j'}; \tag{1.2—10}$$

我们来讨论A_j与$A_{j'}$之间的变换关系。

将(1.2—9)两边点乘$\mathbf{i}_{i'}$，得

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_{i'}=(A_j\mathbf{i}_j)\cdot\mathbf{i}_{i'}.$$

上式左边为矢量**A**沿$x_{i'}$轴的分量$A_{i'}$，上式右边$\mathbf{i}_j\cdot\mathbf{i}_{i'}=\beta_{i'j}$，由此得

$$A_{i'}=\beta_{i'j}A_j. \tag{1.2—11}$$

类似地，将(1.2—10)两边点乘$\mathbf{i}_i$，可得

$$A_i=\beta_{ij'}A_{j'}. \tag{1.2—12}$$

可见，当坐标系通过旋转由x_i坐标系转到$x_{j'}$坐标系时，矢量**A**沿坐标轴的分量将随着改变，由A_i变为$A_{j'}$；它们之间的变换关系服从(1.2—11)和(1.2—12)。现在，我们根据这一变换规律来定义矢量。

定义1.　矢量A是由三个分量A_i组成的量，A_i在坐标变换时服从变换规律(1.2—11)和(1.2—12)。

这一定义与张量的定义（以后在§1.3介绍）具有统一的形式。在张量语言中，矢量是**一阶张量**，标量是**零阶张量**。标量可定义如下：

定义2.　凡是只有一个分量，而且当坐标变换时其分量始终保持不变的量称为标量。

例1　设$x_{i'}=\beta_{i'j}x_j$，

$$(\beta_{i'j'})=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix},$$

在x_j坐标系中，矢量**A**的分量为(1, 2, −1)．求**A**在$x_{i'}$坐标系中的分量。

解：由(1.2—1)得

$$A_{1'}=\beta_{1'1}A_1+\beta_{1'2}A_2+\beta_{1'3}A_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2+0\cdot(-1)=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$A_{2'}=\beta_{2'1}A_1+\beta_{2'2}A_2+\beta_{2'3}A_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot 2+\frac{\sqrt{3}}{3}(-1)=-\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$A_{3'}=\beta_{3'1}A_1+\beta_{3'2}A_2+\beta_{3'3}A_3=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\cdot 1+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot 2+\frac{2\sqrt{6}}{6}\cdot(-1)=-\frac{\sqrt{6}}{6},$$

故　$\mathbf{A}=A_{1'}\mathbf{i}_{1'}+A_{2'}\mathbf{i}_{2'}+A_{3'}\mathbf{i}_{3'}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}_{1'}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathbf{i}_{2'}-\frac{\sqrt{6}}{6}\mathbf{i}_{3'}.$

例2　设A_i和B_i是空间任意给定的两个矢量**A**和**B**在x_i坐标系中的分量。试证明(A_i+B_i)也是空间某个矢量的分量（即两矢量之和为矢量），而A_iB_i为一标量（即两矢

量的标积为标量）。

证：根据定义 1，矢量的分量服从(1.2—11)，

故有 $A_{i'}=\beta_{i'j}A_j$, $B_{i'}=\beta_{i'j}B_j$.

由此得 $(A_{i'}+B_{i'})=\beta_{i'j}(A_j+B_j)$.

可见(A_i+B_i)也服从变换规律（1.2—11）．由定义 1 可知（A_i+B_i）是某个矢量的分量。

根据(1.2—11)和(1.2—7)可得

$$\begin{aligned}A_{i'}B_{i'}&=(\beta_{i'j}A_j)(\beta_{i'k}B_k)\\&=\beta_{i'j}\beta_{i'k}A_jB_k\\&=\delta_{jk}A_jB_k=A_jB_j.\end{aligned}$$

由此可见，量 A_iB_i 在任何其它坐标系中数值保持不变，即$A_{i'}B_{i'}=A_iB_i$．由定义 2 可知 A_iB_i 为一标量。

例 3 在 x_i 坐标系中，两矢量$\mathbf{A}=A_j\mathbf{i}_j$和$\mathbf{B}=B_k\mathbf{i}_k$的矢积为

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}=C_i\mathbf{i}_i,\quad C_i=e_{ijk}A_jB_k; \tag{1.2—13}$$

在$x_{i'}$坐标系中($x_{i'}=\beta_{i'j}x_j$)，有$\mathbf{A}=A_{j'}\mathbf{i}_{j'}$，$B=B_{k'}\mathbf{i}_{k'}$，

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}=C_{i'}\mathbf{i}_{i'},\quad C_{i'}=e_{i'j'k'}A_{j'}B_{k'}, \tag{1.2—14}$$

若变换系数为

$$(\beta_{i'j})=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \tag{1.2—15}$$

试证明 $$C_{i'}=-\beta_{i'j}C_j. \tag{1.2—16}$$

证：因$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$为矢量，由(1.2—11)得

$$\begin{cases}A_{1'}=\beta_{1'1}A_1+\beta_{1'2}A_2+\beta_{1'3}A_3=A_3\\A_{2'}=\beta_{2'1}A_1+\beta_{2'2}A_2+\beta_{2'3}A_3=-A_1\\A_{3'}=\beta_{3'1}A_1+\beta_{3'2}A_2+\beta_{3'3}A_3=A_2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_{1'}=\beta_{1'k}B_k=B_3\\B_{2'}=\beta_{2'k}B_k=-B_1\\B_{3'}=\beta_{3'k}B_k=B_2;\end{cases}$$

故

$$\begin{cases}C_{1'}=e_{1'j'k'}A_{j'}B_{k'}=A_{2'}B_{3'}-A_{3'}B_{2'}=-(A_1B_2-A_2B_1)\\C_{2'}=e_{2'j'k'}A_{j'}B_{k'}=A_{3'}B_{1'}-A_{1'}B_{3'}=A_2B_3-A_3B_2\\C_{3'}=e_{3'j'k'}A_{j'}B_{k'}=A_{1'}B_{2'}-A_{2'}B_{1'}=-(A_3B_1-A_1B_3)\end{cases}. \tag{1.2—17}$$

然而 $\beta_{i'j}C_j$ 的展开式为

$$\begin{cases}\beta_{1'j}C_j=C_3=e_{3jk}A_jB_k=A_1B_2-A_2B_1\\\beta_{2'j}C_j=-C_1=-e_{1jk}A_jB_k=-(A_2B_3-A_3B_2)\\\beta_{3'j}C_j=C_2=e_{2jk}A_jB_k=A_3B_1-A_1B_3.\end{cases} \tag{1.2—18}$$

对此(1.2—17)和(1.2—18)，得

$$C_{i'}=-\beta_{i'j}C_j.$$

这一结果表明，当进行上述的坐标变换时，矢积$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$的分量不完全服从变换规律(1.2—11)，相差一个负号。因此，严格说来，矢积（$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$）不符合我们上面所给出的矢

量的定义。这种矢量称作**伪矢量**(pseudo vector). 完全符合定义1的矢量称作**真矢量**(true vector)或**绝对矢量**(absolute vector).

倘若我们取变换系数为

$$(\beta_{i'j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2—19}$$

便可以得到$C_{i'} = \beta_{i'j}C_j$(读者可自行证明)。这是因为(1.2—19)的变换仅是**旋转变换**[即

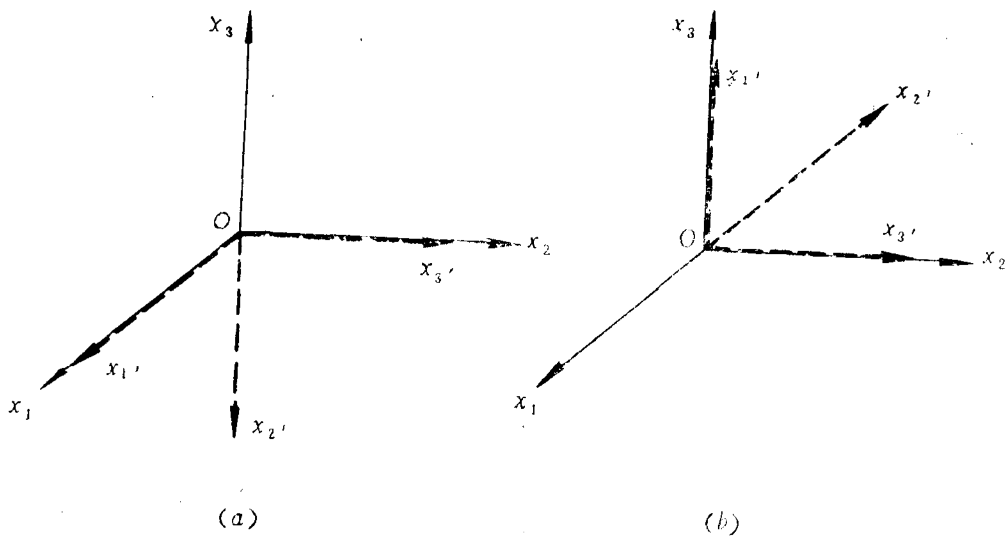


图1—3

坐标轴作为一个整体绕原点转过一个角度,如图1—3(a)]. 这种变换不会使坐标轴由右手系变为左手系(或相反)。但是(1.2—15)的变换不仅是旋转变换,还包含**反射变换**[即两轴不动,另一轴转过180°,见图1—3(b)]. 反射变换使坐标轴由右手系变为左手系(或相反)。当坐标系进行反射变换时要改变正负号的矢量,称为**伪矢量**。例如,两矢量**A**,**B**构成的平行四边形的面积($\mathbf{S} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$),以及力矩、动量矩等都是两矢量的矢积。这些由矢积形成的矢量均属于伪矢量。当坐标系进行反射变换①时,这些矢量的大小不变,但指向则转为相反方向。

§1.3 笛卡尔张量

上面我们讨论了标量和矢量。标量是只有数值大小而无方向的量,如温度、密度、长

①判别某种变换是否包含反射变换,可以考察变换系数的行列式

$$\det(\beta_{i'j}) = \begin{vmatrix} \beta_{1'1} & \beta_{1'2} & \beta_{1'3} \\ \beta_{2'1} & \beta_{2'2} & \beta_{2'3} \\ \beta_{3'1} & \beta_{3'2} & \beta_{3'3} \end{vmatrix}$$

的值。若$\det(\beta_{i'j})$取负值,表明这种变换包含反射变换。