

微积分杂谈

龚昇编著

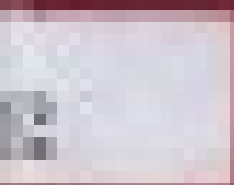
科学技术文献出版社

$$\int_a^b f(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

微积分学讲义

第二版

高等教育出版社



微 积 分 杂 谈

龚 昇 编著

科学技术文献出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分杂谈/龚升编著. —北京:科学技术文献出版社, 2001. 5

ISBN 7-5023-3800-4

I. 微... II. 龚... III. 微积分-研究 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 20203 号

出 版 者: 科学技术文献出版社

地 址: 北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼
B 段/100038

社办公室电话: (010)68515544-2950

编辑部电话: (010)68515544-2935, (010)68515037

发行部电话: (010)68515544-2831(或 2835), (010)68514035

门市部电话: (010)68515544-2172

传 真: (010)68514035

E-mail : stdph@istic.ac.cn

责 任 编 辑: 王文才

发 行 者: 新华书店北京发行所

印 刷 者: 上海市曙光印刷厂

版(印)次: 2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷

开 本: 850 × 1168 32 开

字 数: 80 千

印 张: 3.25

印 数: 1000 册

定 价: 7.50 元

© 版权所有 违法必究

购买本社图书, 凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责调换。

前 言

这本小书由五篇相互独立又相互联系的文章组成.

教书半世纪,教材只写了二本.

1958年到中国科学技术大学教书,教了八年后,于1966年写了一本微积分教材《简明微积分》.在1966年《自然辩证法研究通讯》杂志上,我写了一篇短文,对写这本教材的想法做了十分简要的说明.这当然不能引起人们的注意.直到30年后,我在中国科学技术大学和其他一些大学,以及一些会议上,系统地讲述了我写这本教材的想法,才引起人们的注意.后来,在这些讲话的基础上,写了一本小册子《话说微积分》,于1998年5月由中国科学技术大学出版社出版.书出版后,受到数学界以及教与学微积分师生们较为广泛的欢迎.

《话说微积分》一书,吴文俊院士审阅后,曾给以鼓励,且亲自动手写了“龚昇教授《简明微积分》读后感”一文.此文刊登在《高等数学研究》每2卷,1999年,第三期,第2~3页,也刊于《数学通报》杂志,2000年,第一期,第44~45页.此文不仅评述了拙著《简明微积分》一书,还十分深刻地论述了微积分的地位、微积分的产生和发展、微积分的精髓,这对读者认识微积分这门学科以及这门课程,具有十分重要的指导意义.征得吴文俊院士同意,将此文列在本书之首,以代序.此文也是本书的指导性文章.

何祚庥院士在审阅了《话说微积分》后,也给以鼓励,并嘱我从侧重于哲学的角度写一文章,投《自然辩证法研究》杂志.于是我就写了“对微积分中主要矛盾的认识”一文.此文刊登在

《自然辩证法研究》第 15 卷, 1999 年, 第 11~18 页. 刊登时, 对文章曾作了删节. 此文全文刊登在《高等数学研究》杂志第 2 卷, 1999 年, 第一期, 第 5~12 页; 第二期, 第 2~5 页; 第 3 卷, 2000 年, 第一期, 第 2~5 页; 第二期, 第 2~5 页. 这就是本书的第一篇文章.

为了对理解第一篇文章有所帮助, 还将拙著《简明微积分》中第 7 章 7.6 节, 作为本书的第二篇文章, 取名为“浅说外微分形式”.

《简明微积分》的英文版即将出版.

2000 年 10 月 18 日至 21 日于西安举行的“20 世纪数学传播与交流国际学术讨论会”上, 我作了二次演讲, 讲的内容是“微积分严格化之后”, 这是“对微积分中主要矛盾的认识”一文的续篇, 现整理成文, 作为本书的第三篇文章.

大学基础课复分析的内容实际上是复数域上的微积分, 这是我于 1992 年撰写另一本教材《简明复分析》的指导思想之一. 此书于 1996 年由北京大学出版社出版, 第一次印了三千册, 到 1999 年已售罄. 此书同样引起了教与学复分析这门课的师生们较为广泛的注意. 在 1999 年第二次印刷时, 除了修订一些错误外, 还写了一个“重印说明”. 在此文中, 比较详细地说明了撰写这本教材的指导思想, 这也反映了我对这门数学基础课的一些认识与看法, 这是本书的第四篇文章, 此文也是“对微积分中主要矛盾的认识”的另一个续篇. 读者可以发现, 此文与前三文的思想是一脉相通的. 希望此文对教与学复分析及微积分这二门课的师生们有所参考与帮助.

《简明复分析》的英文版《Concise Complex Analysis》已于 2001 年由 World Scientific Publishing Company 出版.

本书的最后一篇文章是我写的一篇短文“数学基础课教材随想”. 此文刊于《中国大学教学》杂志 (原《教学与教材研究》杂志) 2000 年第一期, 第 35~37 页; 以及《高等理科教育》杂志 2000

年第一期, 第 38~41 页. 在此文中, 阐述了我对数学基础课教材的一些基本观点, 而上述二本教材就是试图按照这种观点撰写的.

这本小书是由相互独立的五篇文章组成. 由于这些文章写于不同时期及不同场合, 在内容上难免有些重复. 但要去掉一些重复部分, 会影响每篇文章的独立性. 因之, 只好保持原状, 这点还望读者谅解. 这五篇文章又是相互联系的, 观点是一致的. 这是一本反映我对大学数学基础课教学的一些看法的小书, 当然这仅仅是个人的一点浅见, 不妥之处, 还望读者不吝赐教.

龚昇

2001 年 12 月

目 录

代序	吴文俊
前言	
对微积分中主要矛盾的认识	1
浅说外微分形式	32
微积分严格化之后	54
《简明复分析》重印说明	72
数学基础课教材随想	82

对微积分中主要矛盾的认识*

1958年,我从中国科学院数学研究所调到中国科学技术大学教书.在中国科学技术大学,我大多时间是在教微积分.教了8年之后,于1966年对微积分的教学产生了一些想法,于是写了一篇关于微积分教学改革的想法的短文,题为“对高等数学课程改革的一些尝试”,刊登在《自然辩证法研究通讯》1966年第1期上,并且,按照这个想法写了一本微积分教材《简明微积分》(第一版,1978年~1983年,人民教育出版社;第二版,1993年,中国科学技术大学出版社;第三版,1997年,中国科学技术大学出版社).这本教材正式出版后,在中国科学技术大学部分系一直用到现在,已20年了.微积分教材不下千种,我为何还要再写一本?这是有感而发.由于我长期以来,从未系统地、公开地阐述这个“感”是什么,以至于1995年,我在中国科学技术大学数学系的一次教学研讨会上,讲了为何30年前我要写这本微积分教材,以及对微积分这门学科、这门课程的一些想法时,大多数教员说他们从未听过.后来我又在多次有关会议及多所大学讲了这个课题,引起了一些人的兴趣.还有同行建议我将此讲稿整理出版.由于我对微积分这门学科、这门课程的想法与30多年前无大变化,基本上是1966年我刊登在《自然辩证法研究通讯》上的那篇短文的想法,所以我只好老调重弹,在1966年那篇短文的基础上,加以扩展与充实,写成了一本很小的小册子《话说微积分》,于1998年由中国科学技术大学出版社出版.小册子出版后,在国内

*本文曾节录刊于《自然辩证法研究》第15卷,1999年;全文在《高等数学研究》上连载:第2卷(1999年)第1期、第2期,第3卷(2000年)第1期、第2期.

一部分数学界与国外一部分华裔数学界中得到了较快的传播，有不少同行，或口头、或写信、或电子邮件给我，对我在这本小册子中阐述的一些观点表示赞同，这使我得到了极大的鼓舞。何祚庥院士在审阅了这本小册子后，给我以鼓励，并嘱我写一稿投寄《自然辩证法研究》杂志。我十分冒昧地写了此文，此文的主要观点与 30 年前我在《自然辩证法研究通讯》上刊登的那篇短文是完全一致的，只是写得更具体、更充实，与《话说微积分》这本小册子中所阐述的一些观点也是完全一致的，只是侧重有所不同。由于我对自然辩证法完全是外行，对无产阶级革命导师的一些论述的理解也十分浅薄甚至可能不正确，对数学的了解也十分肤浅，文笔不通甚至谬误之处一定不少，还望大家指正。

本文的内容大致如下：在第一部分叙述无产阶级革命导师马克思、恩格斯以及列宁对微积分的关注与研究，以及有关微积分的一些论述。当然这里只能引述其中极小的一部分，但这些论述是本文的指导思想。在第二部分，对微分与积分这对矛盾在一元微积分中的体现，谈了自己的认识。在第三部分，对微分与积分这对矛盾在高维空间中如何体现，说说自己一些粗浅的想法。在第四部分，对数学中的高与低、难与易的辩证关系作了一些探索。在第五部分，探讨了微积分这门学科中其他一些矛盾。

马克思、恩格斯以及列宁对微积分的关注与研究

恩格斯在《反杜林论》中提出：“纯数学是以现实世界的空间形式和数量关系，也就是说，以非常现实的材料为对象的。这种材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界”（《马克思恩格斯选集》第 3 卷，人民出版社，1995 年版，第 377 页），明确地指出了数学科学所研究的对象。尽管人们对“空间”及“数量”的概念及认识较之上一个世纪已有了极大的扩充与

深化，但恩格斯对数学科学所研究的对象的提法依然是十分正确的，仍然为大家所接受的。但是数学科学有十分众多的学科，随着时间的推移，不断地有新的数学学科产生。要说清楚数学科学中各个学科所研究的对象是什么，恐怕不是一件容易的事情。即使就其中的一门学科来讨论其研究的对象是什么，对大多数学科来说，也会众说纷纭，很难取得共识。但是，对微积分这门学科来说，它所研究的对象是什么，是早已解决了的，大概不会引起任何争议的。毛泽东在《矛盾论》中论述了矛盾的特殊性时指出：“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一科学的对象”（《毛泽东选集》第1卷，人民出版社，1991年版，第309页）。因之，要说清楚某一门数学学科所研究的对象，等于要说清楚这门学科是研究那一种矛盾的，即说清楚这门学科的主要矛盾是什么。而微积分这门学科是研究那一种矛盾的，这在马列主义的一些经典著作中早已解决了的。不妨十分简单地回顾一下历史。

微积分是由牛顿 (Isaac Newton, 1642~1727) 及莱布尼兹 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716) 所建立的。牛顿对微积分主要创作年代是在 1665 年至 1667 年之间，而发表其成果于 1687 年、1704 年及 1736 年。莱布尼兹对微积分主要创作年代是在 1673 年至 1676 年之间，而发表其成果于 1684 年及 1686 年。也就是说，微积分建立于 17 世纪 60 年代至 70 年代。马克思、恩格斯以及列宁等都对微积分给予了关注并作了深入研究，在他们的一些经典著作中多次论及微积分。

马克思对微积分作了很多研究，且特别重视它。例如，1863 年 7 月 6 日马克思给恩格斯的信中说：“有空时我研究微积分。顺便说说，我有许多关于这方面的书籍，如果您愿意研究，我准备寄给您一本。”（《马克思恩格斯全集》第 30 卷，人民出版社，1975 年版，第 357 页）。1865 年 5 月 20 日马克思给恩格斯的信中说：

“在工作之余 —— 当然不能老是写作 —— 我就搞搞微分学 $\frac{dx}{dy}$ 。我没有耐心再去读别的东西，任何其他读物总是把我赶回写字台来”（《马克思恩格斯全集》第 31 卷，人民出版社，1972 年版，第 124 页）。从这二封信中可以看出，马克思是多么热衷于研究微积分。从下面另一封马克思给恩格斯的信中可以看出，马克思不仅研究牛顿、莱布尼兹，而且对当时活跃在数学研究第一线的一批大数学家，如达兰贝尔 (Jean Le Rond D'Alembert, 1717~1783)、欧勒 (通常译作欧拉, Leonhard Euler, 1707~1783) 以及拉格朗日 (Loseph Louis Lagrange, 1736~1813) 等人的著作，都有所研究。1882 年 11 月 22 日马克思给恩格斯的信中提到：“我未尝不可用同样的态度去对待所谓微分方法本身的全部发展 —— 这种方法始于牛顿和莱布尼兹的神秘方法，继之以达兰贝尔和欧勒的唯理论的方法，终于拉格朗日的严格的代数方法 (但始终是从牛顿 - 莱布尼兹的原始的基本原理出发的)，—— 我未尝不可以用这样的话去对待分析的这一整个发展过程，说它在利用几何方法于微分学方面，也就是使之几何形象化方面，实际上并未引起任何实质性的改变”。（《马克思恩格斯全集》第 35 卷，人民出版社，1971 年版，第 110 页）。在恩格斯撰写的《资本论》第二卷序言中，说到马克思在“1870 年以后又有一个间歇期间，这主要是由马克思的病情造成的，他照例利用这类时间进行各种研究。……最后还有自然科学，如地质学和生理学，特别是独立的数学研究，成了这个时期的许多札记本的内容。”（《马克思恩格斯全集》第 24 卷，人民出版社，1972 年版，第 7~8 页）。现在我们能见到马克思在数学上的研究，除了散见在他的各种著作中以外，比较集中的是他的《数学手稿》（人民出版社，1975 年版），而其中绝大部分的内容是论述微积分的。马克思本人十分重视他的数学研究，主要是对微积分的研究。1883 年 6 月 24 日恩格斯在致劳拉·拉法格的信中提到马克思委托后人处理他的文稿，“并关心出版那些应

该出版的东西，特别是第二卷和一些数学著作”(《马克思恩格斯全集》第36卷，人民出版社，1975年版，第42页)。这里，第二卷指的是后来编成的《资本论》第二卷与第三卷。

恩格斯高度评价马克思的数学研究，尤其是微积分研究的成就。例如，1881年，马克思曾将他的部分有关微积分的数学手稿誊清后寄给恩格斯，恩格斯仔细阅读了这份手稿，于1881年8月18日写信给马克思，说道：“昨天我终于鼓起勇气，没用参考书便研究了你的数学手稿，我高兴地看到，我用不着其他书籍，为此，我向你祝贺。”(《马克思恩格斯全集》第35卷，人民出版社，1971年版，第21页)。在《反杜林论》中，恩格斯说：“马克思是精通数学的”。(《马克思恩格斯选集》第3卷，人民出版社，1995年版，第349页)。恩格斯在《在马克思墓前的讲话》中还说到：“但是马克思在他所研究的每一个领域，甚至在数学领域，都有独到的发现，这样的领域是很多的，而且其中任何一个领域他都不是浅尝辄止。”(《马克思恩格斯选集》第3卷，人民出版社，1995年版，第776~777页)。恩格斯本人在他的著作中，大量论述了数学，尤其是微积分。特别在他的《反杜林论》以及《自然辩证法》这两部著作中，更是深刻地、系统地论述了微积分。恩格斯在《反杜林论》第二版的序言中写道：“目前我只好满足于本书所作的概述，等将来有机会再把所获得的成果汇集发表，或许同马克思所遗留下来的极其重要的数学手稿一齐发表。”(《马克思恩格斯选集》第3卷，人民出版社，1995年版，第351页)，后来由于种种原因并未实现。关于恩格斯对微积分的大量论述，在这里只是摘引其中的二段。在《反杜林论》中，恩格斯说到：“因为辩证法突破了形式逻辑的狭隘界限，所以它包含着更广的世界观的萌芽。在数学中也存在着同样的关系。初等数学，即常数的数学，是在形式逻辑的范围内活动的，至少总的说来是这样，而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——本质上不外是辩证法在数学方面的运用。”(《马克思恩格斯选集》第3卷，人民出

版社, 1995 年版, 第 477 页). 在这里恩格斯十分明确地指出, 微积分本质上不外是辩证法在数学方面的运用. 在《自然辩证法》中, 恩格斯说: “数学中的转折点是笛卡尔的变数. 有了变数, 运动进入了数学, 有了变数, 辩证法进入了数学, 有了变数, 微分和积分也就立刻成为必要的了, 而它们也就立刻产生, 并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的, 但不是由他们发明的.”(《马克思恩格斯全集》第 20 卷, 人民出版社, 1971 年版, 第 602 页). 这段话实际上阐述了微积分产生的过程.

到了列宁, 他也有不少关于数学的论述. 他在 1915 年写的《谈谈辩证法问题》一文中, 在论及自然科学中的矛盾时, 十分明确地指出: “在数学中加号和减号, 微分和积分. 在力学中, 作用与反作用. 在物理学中, 正电和负电. 在化学中, 原子的化合和分解. 在社会科学中, 阶级斗争.”(《列宁选集》第 2 卷, 人民出版社, 1995 年版, 第 556 页). 而这段话, 毛泽东在《矛盾论》中论及矛盾的普遍性时, 全文加以引用(《毛泽东选集》第 1 卷, 人民出版社, 1991 年版, 第 306 页). 从这里, 列宁十分明确地指出了, 微积分这门学科是研究微分和积分这对矛盾的学问: 也就是说, 微积分这门学科中, 主要矛盾是微分和积分的矛盾.

在一元微积分中微分与积分这对矛盾

马克思、恩格斯以及列宁有关微积分的一些论述, 是我们认识与研究微积分的指导思想. 有了这个认识之后, 就决定了微积分这门学科的内容是由三个部分组成的, 即微分、积分、指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理这三个部分. 微分的部分与积分的部分都易于理解, 而对于第三部分, 指出微分与积分是一对矛盾的微积分基本定理, 也许得多说几句.

微分与积分的概念古已有之, 例如: 阿基米德 (Archimedes, 公

公元前 287 年 ~ 公元前 212 年) 于公元前就已经知道如何求抛物线 $y = x^2$ 的切线. 刘徽于公元 3 世纪在他的割圆术中, 就是用无穷小分割来求面积的, 等等. 由于长期的积累, 在牛顿与莱布尼兹之前, 已经有了大量的微积分的先驱性的工作, 这为微积分的产生作了准备. 例如: 托里拆利 (Evangelista Torricelli, 1608~1647) 已经知道如何求曲线 $y = x^n$ (其中 n 是为正整数) 的切线, 卡瓦列利 (Bonaventura Cavalieri, 1598~1647) 已经知道如何求曲线 $y = x^n$ (其中 n 是正整数) 所覆盖的曲边梯形的面积. 又例如: 开普勒 (Johannes Kepler, 1571~1630) 的父亲好喝酒, 以开酒馆为业, 少年时期的开普勒帮助父亲照料酒馆, 他用无穷小方法精确地计算酒桶的体积, 并于 1615 年为此出版了一本书, 题为《测量酒桶体积的新科学》. 当然, 还可以举出很多用无穷小分析计算切线、面积及体积的例子. 有兴趣的读者可参阅众多的有关微积分史的书籍. 例如波耶的《微积分概念史》, 1977 年, 上海人民出版社 (Carl B. Boyer, The concepts of the Calculus, Hafner Publishing Company, 1949). 但是, 所有这些还不能说建立了微积分. 直到牛顿与莱布尼兹证明了如下的微积分基本定理.

微积分基本定理 (微分形式) 设函数 $f(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, x 是 $[a, b]$ 中的一个内点, 令

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad (\text{其中 } a < x < b)$$

则 $\Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 并且

$$\Phi'(x) = f(x), \quad (\text{其中 } a < x < b)$$

即

$$d\Phi(x) = f(x)dx.$$

换句话说, 若 $f(x)$ 的积分是 $\Phi(x)$, 则 $\Phi(x)$ 的微分就是 $f(x)dx$, 即 $f(x)$ 的积分的微分就是 $f(x)$ 自己乘上 dx , 也就是反映整体性质

的积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是由作为反映局部性质的微分 $d\Phi(x) = f(x) dx$ 所决定.

微积分基本定理 (积分形式) 设 $\Phi(x)$ 是在 $[a, b]$ 上可微, 且 $\frac{\Phi(x)}{dx}$ 等于连续函数 $f(x)$, 那么成立着

$$\int_a^x f(t) dt = \Phi(x) - \Phi(a). \quad (\text{其中 } a \leq x \leq b)$$

换句话说, 若 $\Phi(x)$ 的微分是 $f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的积分就是 $\Phi(x)$, 即 $\Phi(x)$ 的微商的积分就是 $\Phi(x)$ 自己 (或相差一常数). 也就是, 作为反映局部性质的微分 $f(x) dx$, 是由作为反映整体性质的积分 $\Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x f(t) dt$ 所规定. (参阅龚昇, 张声雷: 《简明微积分》第三版, 1997 年, 中国科学技术大学出版社, 第 34~36 页.)

微积分基本定理明确地指出: 微分与积分互为逆运算, 也就是指出微分与积分是对矛盾. 这时也只有在这时, 才算建立了微积分这门学科. 所以恩格斯在论述微积分产生过程时说: 微积分“是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的, 但不是由他们发明的”(《马克思恩格斯全集》第 20 卷, 人民出版社, 1971 年版, 第 602 页). 说“不是由他们发明的”是指: 在牛顿和莱布尼兹之前, 微分与积分的概念早已有之. 说“是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的”是指: 他们建立了微积分基本定理, 指出微分与积分是一对矛盾, 从此微积分成了一门独立的学科, 而不再像以前那样作为几何学的延伸. 而求微分与积分的问题, 不再是一个个问题地来处理, 而是有了统一的处理方法. 说“大体上”是指: 他们建立起来的微积分这门学科还有不完备之处, 是没有建立牢固的基础, 一些解说不能令人满意. 他们利用直观无穷小的概念, 例如牛顿使用“刹那”的说法, 莱布尼兹对微分有时解释为 0, 有时又说不为 0, 在逻辑上往往不能自圆其说, 所以马克思称之“牛顿和莱布尼兹的神秘方法”(《马克思恩格斯全集》第 35 卷, 人民出版社, 1971 年

版,第110页).而马克思在他的《数学手稿》(人民出版社,1975年版)中大量论述的正是这些问题。

从历史唯物主义的观点来看微积分的产生,就会感到是十分自然的事.自从15世纪~16世纪文艺复兴以来,大批优秀的数学家为微积分的诞生作出了杰出的贡献.牛顿与莱布尼兹正处在微积分诞生前的水到渠成的时代.牛顿说他是站在巨人的肩膀上,这时巨人已经形成.这位巨人当然包括了这些伟大的微积分的先驱们.我不在这里一一列举他们的名字与他们的贡献,在这里只想提一下巴罗(Isaac Barrow, 1630~1677)其人.他是牛顿的老师,他已经知道“求切线”和“求面积”是两个互逆的问题,他写了并译了很多书,其中1669年出版的《几何讲义》一书对微积分的创立起了巨大的作用.他完全以几何的面貌,用语言来表述上述重要结果,可是在表述上是有一些不严格与难于理解之处,并在具体应用上较为困难.而他本人对于这个接近于微积分基本定理的重大发现并不重视.1669年,作为剑桥大学“路卡斯(Lucas)教授”的巴罗,主动宣布牛顿的学识已超过自己,把“路卡斯教授”的职位让给年仅26岁的牛顿.这种高风亮节的品德与风格,实在令人钦佩,这件事也成了科学史上的一段佳话.

从以巴罗为代表的这些微积分的先驱们的贡献,可以看出:牛顿与莱布尼兹的确生长在微积分诞生前的水到渠成的年代.更为重要的是:16世纪的欧洲,正处于资本主义萌芽的时期,生产力得到了很大的发展,生产实践的发展向自然科学提出了新的课题,迫切要求力学、天文学等基础学科的发展,这些学科是深刻地依赖于数学,因而也就推动了数学的发展.在马列主义的一些经典著作中,对此都有十分深刻的论述.可以这样认为:微积分的产生,是量变(先驱们的大量工作的积累)到质变(牛顿与莱布尼兹指出微分与积分是对矛盾)的过程,是当时历史条件(资本主义萌芽时期)下的必然产物.

在我国最早引入微积分的是清代的李善兰(1811~1882).他