高等几何习题集

梅向明　刘增贤　林向岩　王智秋　编

高等教育出版社

高等几何习题集

梅向明　刘增贤
林向岩　王智秋　编

高等教育出版社

（京）112号

内 容 提 要

本书内容包括：欧氏平面的拓广；一维射影变换；二维射影变换；二次曲线；变换群与几何学；三维射影几何；几何基础发展简史；绝对几何；欧氏几何；非欧几何；一般域上的射影几何。每一章都包括内容提要和习题两部分。习题答案、提示和解答集中在本书的后面。

本书与《高等几何》(梅向明等编，高教出版社 1983年)配套。是师范院校数学专业本科生的教学参考书。

高等几何习题集

梅向明　刘增贤
林向岩　王智秋　编

*

高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 14.125　字数 360 000
1994 年 10 月第 1 版　　1997 年 7 月第 2 次印刷
印数 607—4 616

ISBN7-04-004920-1/O·1349

定价 13.60元

前 言

这是与我们编写的《高等几何》(梅向明，刘增贤，林向岩编，高教版，1983年)教材配套的习题集，是根据1991年底在天津召开的国家教委高等学校理科数学与力学教学指导委员会几何与拓扑教材建设组会议的决定编写的。

本习题集共包括十一章，其中前五章与《高等几何》教材的前六章配套，第六章是三维射影几何内容，后四章则与《高等几何》教材的最后两章配套；最后一章则与《高等几何》教材的附录配套。

每一章都包括内容提要和习题两部分。习题的答案提示和解答集中放在这本习题集的后面。一般的习题仅给出答案；稍难一些的习题还给出提示；至于比较难的习题，则给出较详细的解答。

本习题集是由首都师范大学数学系几何教研室编写的。其中第一、二、三、五、六章由林向岩执笔，第四章由王智秋执笔，第七章到第十章由刘增贤执笔，第十一章由梅向明执笔。我们希望使用这本习题集的兄弟院校的同志们对本书的错误和不足之处给予批评指正。

梅向明

1992年1月于首都师范大学

目　录

第一章　欧氏平面的拓广

内容提要

§1.1　中心射影与无穷远元素

1．二直线间的中心射影　设l与l'是同一平面内两条不同直线，O是该平面内不在l或l'上的一点．设P是l上任一点，若OP与l'相交，则交点P'称为点P从O投射到l'上的中心射影(投影)．OP称为投射线，O称为射影中心(射心)(图1-1)．

2．二平面间的中心射影　设π与π'是空间里两个不同平面，O是空间里不在π或π'上的一点．设P是π内任一点，O与P的连线OP与π'交于点P'，则P'称为P在π'内的中心射影(投影)．OP称为投射线，O称为射影中心(射心)(图1-2)．

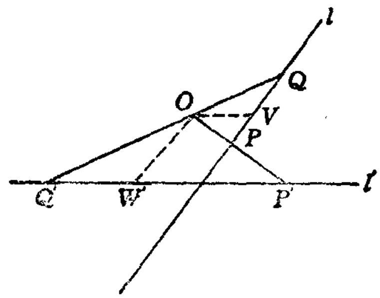

图　1-1

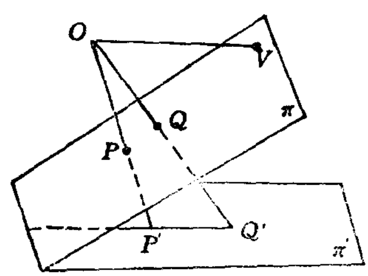

图　1-2

3．影消点与影消直线　在图1-1里，如果l上的一点V与O的连线OV与l'平行，则点V在l'上的中心射影不存在．点V称为直线l上的影消点．同样在直线l'上有一点W'在l上不存在中心

射影．点W'称为直线l'上的影消点．

在图1-2里，如果平面π内一点V与O的连线OV平行于平面π'，则点V在π'上的中心射影不存在．点V称为平面π内的影消点．平面π内的影消点的集合构成一直线，即通过射影中心O与π'平行的平面与π的交线，该直线称为π内的影消线．类似地可以定义平面π'内的影消点与影消线．

4．无穷远元素

（1）无穷远点　在每条直线上添加一个新点，称为无穷远点，并规定：

约定一　在平面内对于任何一组平行直线引入唯一一点，此点在组中每一直线上，而不在组外的任何直线上，称此点为无穷远点．无穷远点常记如P_∞．

（2）无穷远直线

约定二　一平面内所有无穷远点的集合是一条直线．称为无穷远直线．记为l_∞．

（3）无穷远平面

约定三　空间里所有无穷远点的集合是一个平面．称为无穷远平面．记为π_∞．

无穷远点、无穷远直线、无穷远平面统称为无穷远元素．平面上的无穷远元素是无穷远点与无穷远直线、无穷远元素的引入，弥补了在欧氏空间里由于影消点的存在，而使得中心射影不是一一对应关系的缺陷．

§1.2　射影直线与射影平面

1．射影直线　在欧氏直线上引入了无穷远点而得到的新直线称为仿射直线．若在仿射直线上将无穷远点与其他点(直线上的原有点，称为有穷点)同等看待而不加区别时，则仿射直线称为射影直线(一维射影空间)．

2. 射影平面　在欧氏平面内引入了无穷远直线而得到的新平面称为仿射平面．若在仿射平面内将无穷远元素（无穷远点、无穷远直线）与平面内原有元素（有穷点、有穷直线）同等看待而不加区别时，则仿射平面称为射影平面（二维射影空间）．

同样在三维欧氏空间里引入了无穷远平面，并将无穷远平面与其他平面同等看待时，就得到三维射影空间（习惯上常称为射影空间）．

§1.3　图形的射影性质

定义 1.3.1　图形经过中心射影后不变的性质（量）称为图形的射影性质（射影不变量）．

同素性、结合性都是图形的射影性质．

二直线的平行性不是图形的射影性质．在仿射平面上，将二平行直线看作相交于无穷远点的直线，则经过中心射影后不一定仍为二平行直线．所以在仿射平面上，二直线的平行性不是射影性质．

定义 1.3.2　一直线上所有点的集合称为点列，此直线称为点列的底．以l为底，A，B，C，…为元素的点列可以记为$l(A, B, C, \cdots)$．

定义 1.3.3　同一平面内通过一点的所有直线的集合称为线束，此点称为线束的中心或顶点．以O为中心，a，b，c，…为元素的线束可以记为$O(a, b, c, \cdots)$．

点列与线束经中心射影后的象仍为点列与线束．所以点列和线束具有射影性质．

§1.4　齐次坐标

为了代数地描述无穷远元素，需要引入齐次坐标．

1．一维齐次点坐标

定义1.4.1　设欧氏直线上的点 P 的笛氏坐标为x，则满足 $\frac{x_1}{x_2}=x$ $(x_2\neq 0)$ 的二数x_1, x_2称为点P的齐次笛氏坐标．记为$P(x_1, x_2)$。当$x_2=0$时，即$(x_1, 0)$ $(x_1\neq 0)$为直线上的无穷远点的齐次（笛氏）坐标。无穷远点没有非齐次坐标x。

2．二维齐次点坐标

定义1.4.2　设欧氏平面内的点P的笛氏坐标为(x, y)，则满足 $\frac{x_1}{x_3}=x$，$\frac{x_2}{x_3}=y$的三数x_1，x_2，x_3 $(x_3\neq 0)$称为点P的齐次（笛氏）坐标。记为$P(x_1, x_2, x_3)$。

定义 1.4.3　任何有序三实数$(x_1, x_2, 0)$，其中$x_1\neq 0$，规定为以$\frac{x_2}{x_1}=\lambda$为方向的无穷远点的齐次坐标．当两个坐标轴直交时，λ为斜率。若$x_1=0$，即$(0, x_2, 0)$，其中$x_2\neq 0$，为y轴方向的无穷远点的齐次坐标。无穷远点没有非齐次坐标(x, y)。

3．直线的齐次坐标方程

定义1.4.4　在齐次点坐标中，设一直线与一个以(x_1, x_2, x_3)为流动点的齐次坐标所构成的方程，如果此方程能够且仅能够被该直线上的点的齐次坐标所满足，则此方程称为该直线的齐次点坐标方程，简称齐次方程。

定理 1.4.1　直线的齐次方程为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0 \quad (a_1^2+a_2^2+a_3^2\neq 0) \tag{1.4.1}$$

当$a_1^2+a_2^2\neq 0$时，直线是有穷直线，其非齐次方程为

$$a_1x+a_2y+a_3=0$$

当$a_1^2+a_2^2=0$时，直线是无穷远直线l_∞，它没有非齐次方程．l_∞的齐次方程为

$$x_3=0 \tag{1.4.2}$$

4．齐次点坐标的应用．

记$x\equiv(x_1, x_2, x_3)$，称为点x。

记$\alpha = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$，称为直线$\alpha = 0$。

定理1.4.2 两点 a, b 重合的充要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

的秩为1.

定理1.4.2′ 两直线$\alpha = 0$，$\beta = 0$重合的充要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

的秩为1.

定理1.4.3 两个不同点 a, b 的连线的齐次方程是

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.4.3}$$

简记为$|x\ a\ b| = 0$.

定理1.4.3′ 两条不同直线$\alpha = 0$，$\beta = 0$的交点的齐次坐标是

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

定理1.4.4 三个不同点 a,b,c 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

定理1.4.4′ 三条不同直线 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ 共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

定理1.4.5 以两个不同已知点 a, b 的连线为底的点列的

点的齐次坐标能够且仅能够写作$la+mb$(其中l，m为不全为零的常数)。

推论　三相异点a，b，c共线的充要条件是有三个全不为零的常数p，q，r，使

$$pa_i+qb_i+rc_i=0 \qquad (i=1,2,3)$$

定理 1.4.5′　以两不同已知直线$\alpha=0$，$\beta=0$的交点为中心的线束的直线方程能够且仅能够写作$l\alpha+m\beta=0$(其中l，m为不全为零的常数)。

推论　三相异直线$\alpha=0$，$\beta=0$，$\gamma=0$共点的充要条件是有全不为零的常数p，q，r使

$$p\alpha+q\beta+r\gamma=0$$

5. 齐次线坐标

定义 1.4.5　直线的齐次方程$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$中，x_1，x_2，x_3的系数u_1，u_2，u_3称为该直线的齐次线坐标，记为$[u_1,u_2,u_3]$或$u\equiv[u_1,u_2,u_3]$。

定义1.4.6　在齐次线坐标里一点的齐次方程指的是以$[u_1,u_2,u_3]$为流动线坐标所构成的方程，此方程能够且仅能够被通过该点的直线的齐次线坐标所满足。

定理 1.4.6　在齐次线坐标里，一点$a\equiv(a_1,a_2,a_3)$的齐次方程是

$$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=0 \qquad (1.5.1)$$

反之，$[u_1,u_2,u_3]$构成的一次齐次方程表示一点，其齐次坐标是(a_1,a_2,a_3)。

§1.5　对偶原则

在射影平面内，点与直线称为互相对偶的元素。由于点与直线的结合关系经过任何中心射影后不变，所以一个平面几何命题，如果只涉及到结合关系，则此命题称为射影的。对于一个射影的

命题，将“点”与“直线”互换，则得到另一个射影的命题．这样的两个命题称为对偶命题．例如“任何二不同点有唯一连线”与“任何二不同直线有唯一交点”是对偶命题．如果一个命题与其对偶命题一致，则此命题称为自对偶命题．

射影平面内的对偶原则 如果二对偶命题里有一个命题成立，则另一个命题也成立．

代数对偶 在射影平面内，点与直线处于同等地位，表述点与直线结合关系的等式：$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 可以有两种不同的解释：

（1）(x_1, x_2, x_3)是变数，$[u_1, u_2, u_3]$是常数，上式说明动点(x_1, x_2, x_3)在定直线$[u_1, u_2, u_3]$上．$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ 是直线的方程．该直线的坐标是$[u_1, u_2, u_3]$．

（2）$[u_1, u_2, u_3]$是变数，(x_1, x_2, x_3)是常数，上式说明动直线$[u_1, u_2, u_3]$通过定点(x_1, x_2, x_3)．$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$是点的方程．该点的坐标是(x_1, x_2, x_3)．

以上说明体现了点与直线的代数对偶性，§1.4里的定理1.4.2——定理1.4.5与定理1.4.2′——定理1.4.5′分别是互为对偶的命题．

§1.6 笛沙格透视定理

定义 1.6.1 平面内不共线的三点与其每两点的连线所组成的图形称为三点形．平面内不共点的三直线与其每两条直线的交点所组成的图形称为三线形．

在射影平面内，三点形的对偶图形是三线形，由于二者是一致的，所以三点形是自对偶图形．

笛沙格定理 如果两个三点形的对应顶点的连线交于一点，则对应边的交点在同一直线上．

笛沙格定理的逆定理 如果两个三点形的对应边的交点在一

直线上，则对应顶点的连线交于同一点。

定义 1.6.2　如果两个三点形对应边的交点共线，则交点所在直线称为它们的透视轴；如果两个三点形对应顶点的连线共点，则公共交点称为它们的透视中心。

笛沙格定理及其逆定理说明：两个三点形有透视中心与有透视轴二者是等价的。

§ 1.7　复元素

以复数为坐标的点或直线称为复点或复直线。复点与复直线统称为复元素。

两点或两直线的坐标互为共轭复数时，分别称为共轭复点或共轭复直线。

应该注意两个共轭复元素的齐次坐标不一定为共轭复数，原因是齐次坐标允许差一个常数因子。

所有复点的集合称为复射影平面。

复点(x_1,x_2,x_3)与复直线$[u_1, u_2, u_3]$相结合的条件为

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

关于二维复元素有以下定理。

定理 1.7.1　一元素为实元素的充要条件是该元素与其共轭复元素重合，

定理 1.7.2　如果点 x 在直线 u 上，则 x 的共轭复点 $\bar{x}$ 在 u 的共轭复直线 $\bar{u}$ 上。

定理 1.7.3　两共轭虚直线的交点为一实点，两共轭虚点的连线为一实直线。

例 1　求一个中心射影将一任意三角形射影成等腰三角形。

解：设$\triangle ABC$在平面π内，过BC边任作平面π'与π不同，在π'内作BC的垂直平分线 m，在m上任取一点 A' 不在 BC 上，连AA'，在直线 AA' 上取定一点O。则以O为射心，将$\triangle ABC$射影

到π'上得$\triangle A'BC$即为一个等腰三角形（图 1-3）.

例 2　设三直线P_1P_2，Q_1Q_2，R_1R_2交于一点S，P_1P_2，Q_1Q_2，R_1R_2分别交两直线OX_1，OX_2于P_1，Q_1，R_1与P_2，Q_2，R_2。又P_1Q_2与P_2Q_1交于L，Q_1R_2与Q_2R_1交于M，R_1P_2与R_2P_1交于N（图 1-4）.

求证：L，M，N三点共线。

证明：可以选取射影中心V与平面π'，使得平面π内的直线OS射影到π'内得无穷远直线，（简称将直线OS射影到无穷远）。为此只需取不在π内的任意点V，取平面π'平行于V与OS所决定的平面。则以V为射心的π与π'间的中心射影将直线OS射影到π'内的无穷远直线$O'_\infty S'_\infty$。如图 1-5，在π'内X'_1，X'_2，P'_1，Q'_1，R'_1，P'_2，Q'_2，R'_2分别为X_1，X_2，P_1，Q_1，R_1，P_2，Q_2，R_2的象，L'，M'，N'分别为平行四边形$P'_1P'_2Q'_2Q'_1$，$Q'_1Q'_2R'_2R'_1$，$P'_1P'_2R'_2R'_1$的对角线的交点。则L'，M'，N'三点共线。且所在直线与P'_1，Q'_1，R'_1所在的直线或P'_2，Q'_2，R'_2所在的直线平行。根据结合性经中心射影后不变，得在图 1-4 里L，M，N三点共线且所共的直线通过点O。

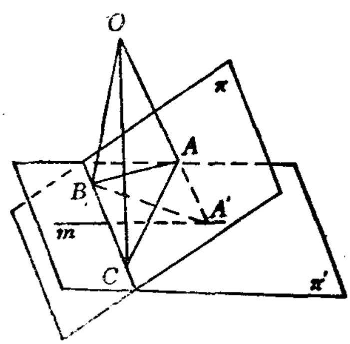

图　1-3

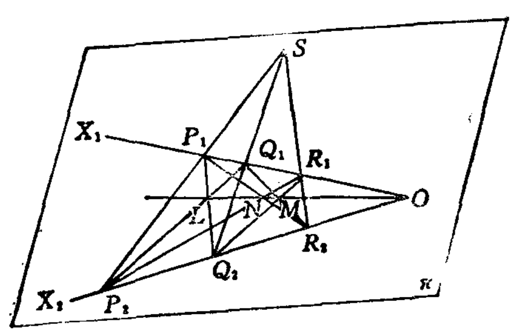

图　1-4

例 3　设同一平面内的四点$a\equiv(a_1,a_2,a_3)$，$b\equiv(b_1,b_2,b_3)$，$c\equiv(c_1,c_2,c_3)$，$d\equiv(d_1,d_2,d_3)$。其中无三点共线。

求证：可以选取上述四点的齐次坐标 (a_1',a_2',a_3')，(b_1',b_2',b_3')，(c_1',c_2',c_3')，(d_1',d_2',d_3')使得：

$$a_i'+b_i'+c_i'+d_i'=0 \qquad (i=1,2,3)$$

证明：令a，d二点连线与b，c二点连线的交点为$t\equiv(t_1,t_2,t_3)$。则由定理 1.4.5 得

$$d_i=pa_i+qt_i \qquad (i=1,2,3)$$

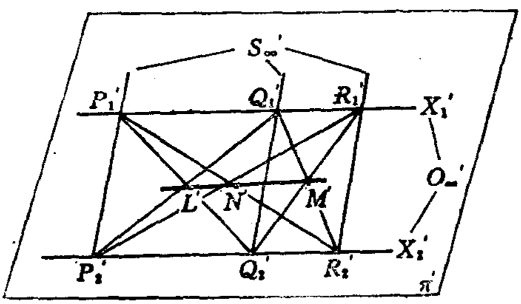

图 1-5

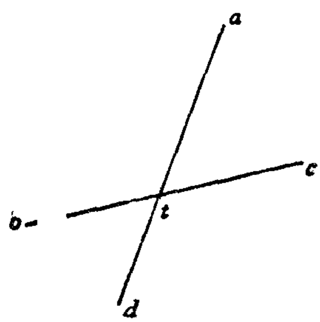

图 1-6

其中$p\neq0$，$q\neq0$。同理有

$$t_i=rb_i+sc_i \qquad (i=1,2,3)$$

其中$r\neq0$，$s\neq0$。因此有

$$d_i=pa_i+q(rb_i+sc_i)$$

$$d_i=pa_i+qrb_i+qsc_i \qquad (i=1,2,3)$$

令$pa_i=a_i'$，$qrb_i=b_i'$，$qsc_i=c_i'$，$-d_i=d_i'$，则得

$$a_i'+b_i'+c_i'+d_i'=0 \qquad (i=1,2,3)$$

例 4 设给定直线 p 与不在 p 上的二点A，B。不许连结A，B而得到p与直线AB的交点。

（1）写出上述命题的对偶命题。

（2）解这个对偶命题。

解：（1）对偶命题：设给定点P与不通过P的二直线a，b。不许求出 a，b 交点而得到 P 与 a，b 交点的连线。