

概率论与 数理统计

何镇邦 李桂荣 编著



北京理工大学出版社

概率论与数理统计

何镇邦 李桂荣 编著

北京理工大学出版社

内 容 简 介

本书分概率论与数理统计两部分，两者并重。在概率论部分，包括随机事件及其概率、条件概率、事件的相互独立性、一维和多维随机变量及其分布、数字特征及极限定理等内容，并突出随机变量及其分布。在数理统计部分，包括基本概念、参数的点估计、区间估计、假设检验、方差分析及一元线性回归分析等内容。

本书先把抽象的概念具体化，再引出概率的数学定义。在数理统计中特别注重实际应用。由于每章内容都利用框图概括，定理及性质除采用传统的证明方法外，同时采用框图证法，因而思路清晰、方法直观、可接受性好。书中列举了较多的实例，便于自学。每章后面附有练习题，书末附习题答案。

本书可作为一般工科院校，各专业本科及专科的教材或教学参考书。

概率论与数理统计

何镇邦 李桂荣 编著

北京理工大学出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

太原机械学院印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 12印张 269千字

1988年12月第一版 1988年12月第一次印刷

ISBN7-81013-064-1/O·12

印数：1-10000册 定价：2.35元

前 言

本书是根据高等学校工科数学教学指导委员会关于“概
论与数理统计”教学基本要求编写的。基本内容包括：随
机事件和概率、随机变量的数字特征、极限定理、随机抽样
与参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等八章及附
表。可供40至60学时的教学使用，亦可供有关科技人员阅
读。

在本书的写作过程中，我们力求做到：

1. 基本概念的引出，要讲明它们的实际背景，以及其
几何意义和物理意义。

2. 采用框图教学法及框图证法，这是一种新的教学方
法及证明命题的方法。这种方法在多年的讲学过程中，获得
了多方面的好评与鼓励。为了进一步推广这种方法，特编著
成书。

本书第一、二、三、五、六、七章由何镇邦同志主笔；
第四、八章及全部习题的编配与答案计算，由李桂荣同志
主笔。胡钦训教授评审了本书的框图证法，中国科学院应用
数学研究所所长吴方研究员对本书进行了精心地审阅，我们
对本书写作过程中提供了宝贵意见和给予了大力支持的所有
同志。在此一并表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望
读者批评指正。

作者 1987.11

目 录

框图教学法及框图证法简介.....	1
第一章 内容总框图.....	4
第一章 随机事件与概率.....	5
§ 1.1 随机事件及其运算.....	5
一、 客观现象的分类及其直观意义.....	5
二、 随机试验与事件.....	7
三、 事件的关系和运算.....	8
四、 事件的集合表示 样本空间.....	12
§ 1.2 概率的直观意义及其计算.....	15
一、 概率的直观意义.....	15
二、 古典概率.....	17
三、 几何概率.....	22
四、 统计概率.....	24
§ 1.3 概率的公理化体系 概率的数学定义.....	25
一、 公理化体系.....	25
二、 概率的数学定义及其性质.....	26
§ 1.4 条件概率 乘法公式 全概率公式 贝叶斯公式.....	31
一、 条件概率.....	31
二、 乘法公式.....	33
三、 全概率公式 贝叶斯公式.....	34
§ 1.5 相互独立的随机事件.....	40
习题一.....	43
第二章 内容总框图.....	48
第二章 随机变量及其分布.....	49
§ 2.1 随机变量的直观意义及其定义.....	49

§ 2.2 离散型随机变量及其分布列.....	52
一、 贝努里试验 二项分布.....	54
二、 泊松分布.....	59
*三、 几何分布.....	64
*四、 超几何分布.....	64
§ 2.3 随机变量的分布函数.....	66
一、 定义.....	67
二、 性质.....	68
三、 离散型随机变量的分布列与分布函数的关系.....	69
§ 2.4 连续型随机变量及其概率密度函数.....	71
一、 定义.....	71
二、 概率密度函数的性质.....	71
§ 2.5 几种重要的分布.....	74
一、 指数分布.....	74
二、 均匀分布.....	74
三、 正态分布.....	77
*四、 Γ 分布.....	85
§ 2.6 随机变量函数的分布.....	86
习题二.....	90
第三章 内容总框图.....	94
第三章 多维随机变量及其分布.....	95
§ 3.1 多维随机变量的直观意义.....	95
§ 3.2 二维随机变量及其联合分布函数.....	95
一、 二维随机变量.....	95
二、 联合分布函数.....	95
三、 离散型.....	98
四、 连续型.....	100
§ 3.3 边沿分布.....	105
一、 定义.....	105
二、 离散型随机变量的边沿分布.....	107

三、 连续型随机变量的边沿分布	108
§ 3.4 相互独立的随机变量 条件分布	
.....	111
一、 相互独立的随机变量	111
*二、 条件分布	113
§ 3.5 两个随机变量的函数的分布	118
一、 和的分布	119
二、 $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ 的分布	121
习题三	123
第四章 内容总框图	127
第四章 数字特征	128
§ 4.1 随机变量的数字特征的直观意义	128
§ 4.2 数学期望	128
一、 离散型和连续型随机变量的数学期望	130
二、 数学期望的性质	136
§ 4.3 方差	138
一、 离散型和连续型随机变量的方差	138
二、 方差的性质	139
§ 4.4 几种重要分布的数学期望和方差	141
一、 二项分布	141
二、 泊松分布	142
*三、 几何分布	143
四、 均匀分布	144
五、 正态分布	144
*六、 Γ 分布	145
*七、 威布分布	146
§ 4.5 协方差与相关系数	147
一、 定义	148
二、 性质	148
§ 4.6 矩 协方差矩阵	154

一、 矩	155
二、 协方差矩阵	155
习题四	158
第五章 内容总框图	161
第五章 极限定理	162
§ 5.1 引言	162
§ 5.2 契比雪夫不等式与大数定律	162
一、 契比雪夫不等式	162
二、 大数定律	164
§ 5.3 中心极限定理	167
习题五	172
第六章 内容总框图	174
第六章 随机抽样与参数估计	175
§ 6.1 引言	175
§ 6.2 三个重要分布	176
§ 6.3 基本概念	185
一、 总体 个体 子样 简单随机子样	186
二、 经验分布与格列汶科定理	188
三、 统计量及子样数字特征	192
四、 统计表(频数分布表) 直方图 概率密度的近似求法	195
§ 6.4 期望与方差的点估计 参数矩估计 极大似然估计	204
一、 期望及方差的点估计	204
二、 矩法估计	213
三、 极大似然法估计	215
§ 6.5 抽样分布定理	222
§ 6.6 正态总体期望值与方差的区间估计	230
一、 期望 $E(\xi)$ 的区间估计	231
二、 方差的置信区间估计	237
三、 二正态总体均值差的区间估计	239
四、 二正态总体方差比的置信区间	241
§ 6.7 (0-1)分布参数的区间估计	243

§ 6.8 单侧置信限	245
§ 6.9 质量控制	246
习题六	252
第七章 内容总框图	257
第七章 假设检验	258
§ 7.1 假设检验的直观意义	258
一、 假设检验的基本思想	260
二、 假设检验的一般程序	262
三、 两类错误	263
§ 7.2 一个正态总体的假设检验	265
§ 7.3 两个正态总体的假设检验	277
§ 7.4 总体分布函数的假设检验	283
一、 正态概率纸	283
二、 χ^2 检验法	287
习题七	292
第八章 内容总框图	296
第八章 方差分析与回归分析	297
§ 8.1 引言	297
§ 8.2 单因素试验	298
§ 8.3 双因素试验	304
一、 不重复试验	304
二、 重复试验	308
§ 8.4 线性回归	311
一、 一元线性回归	312
二、 \hat{b} 、 \hat{y} 、 σ^2 的分布	320
三、 线性假设的显著性检验	324
四、 预测	325
五、 控制	327
习题八	328

附表1	二项分布表	331
附表2	泊松分布表	337
附表3	标准正态分布表	339
附表4	χ^2 分布表	343
附表5	t分布表	345
附表六	F分布表	346
习题答案		360
参考书目		372
正态概率纸		373

框图教学法及框图证法简介

数学是一门系统性很强和具有严密逻辑推理的学科。随着科学技术的发展，要求教学内容及教学方法能反映现代化的科学成就。电子计算机的出现，为人类提供了认识自己的有力工具，人们可以通过电子计算机，来模拟大脑的特定功能，模拟人的思维过程，从而为解开智力之迷开辟了新的道路。数学上的逻辑推理，是电子计算机的基础。因此，在教学过程中，是否能用模拟电子计算机的工作原理，改进传统的教学方法，是值得研究的课题。

框图教学法，是贯彻上述要求的一种方法。框图是指由矩形框、圆边框、虚线框、指向线及文字说明的系统图式。所谓框图教学法，包括两个方面的内容。

(1) 利用框图的特点，编写出各章的内容总框图，以加强学生对数学内容的系统性以及相互之间关系的了解，通过框图便于课前预习、课后补充总结和记忆。


(2) 利用框图可以引出新的概念，或总结一系列的概念利用框图简洁清楚的特点，建立了定理的框图证法，这种证法具有简明、清楚、全面、逻辑性强的特点。下面简单介绍框图证法。


1. 证法语言的基本符号

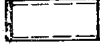
任何语言都是由特定的符号组成。为了使组成的语言容易掌握，这就要求组成语言的符号愈简单愈好。证法语言，也是由一些基本符号构成。

(1) 框图记号


 原始条件。

 构造一个函数或考察一个关系式。


 利用已知定理或结果令, 设。

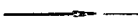
 实线部分仍表示给出的条件。加上虚线后, 表示由虚线推导出的结论。

 检查, 判断。

 表示实线先进行运算点虚线后进行。

 结论。

 思维线。

 指向线。

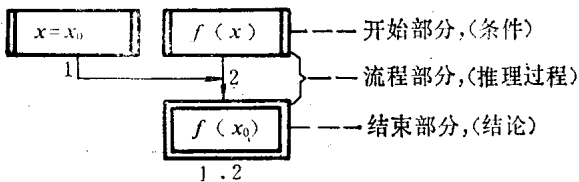
(2) 程序号

$i, (i), j, (j) i', (i)', (j)' (i = 1, 2, \dots, n) (j = 1, 2, \dots, n_1)$

2. 证法语言在证明程序中的结构

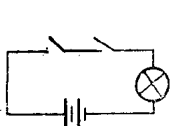
证明命题或计算问题的程序, 简单地说, 就是一种逻辑推断过程。可用一简单的例子, 介绍它的基本内容和结构。

例如: 设函数 $y = f(x)$, 当 $x = x_0$ 时, 求此函数值。用证法语言表示, 则有如下结构

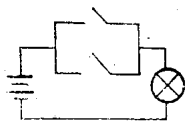


框图表示条件2加上条件1得结论1, 2

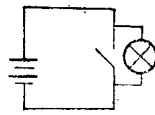
3. 基本逻辑电路



与门系



或门系



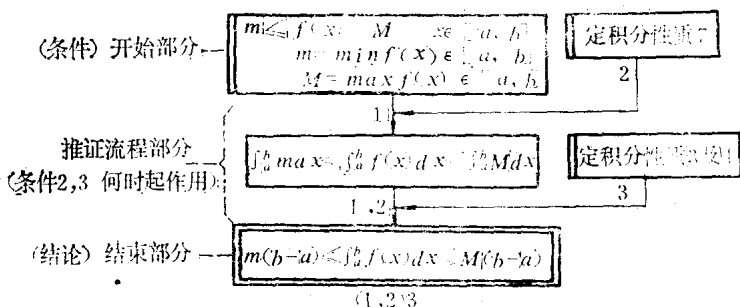
非门系

证法语言就是由上述的基本符号、流程序号、程序结构和逻辑电路组成。

例 定积分性质估值定理：如果 m 与 M 是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的最小值和最大值，即 $m \leq f(x) \leq M$ ，那末

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

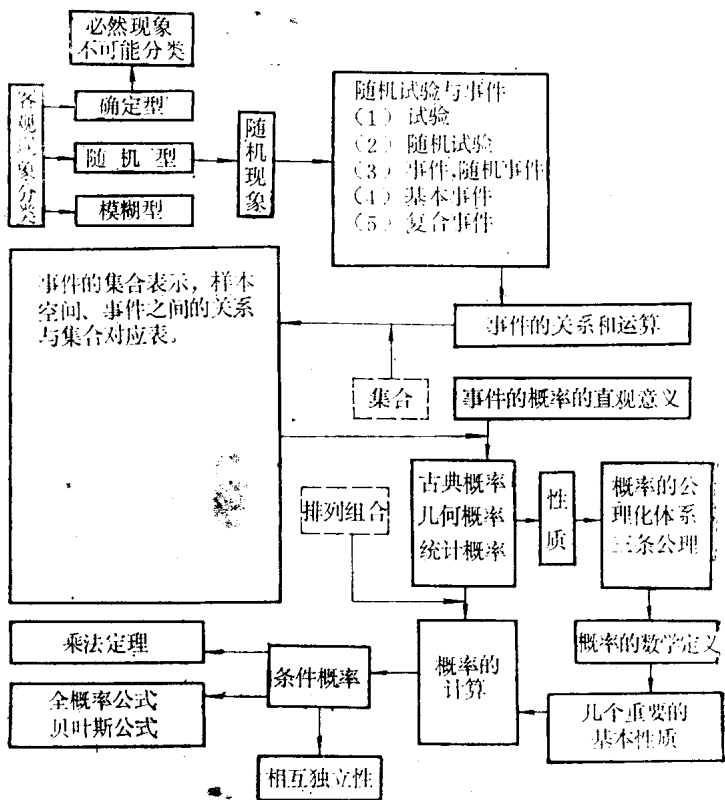
框图证法



在证明的过程中，由于有严格的流程序号，其逻辑推理是很严格和清楚的。值得注意的是，在一般的定理或命题的证明过程中，其原始条件不只一个，因此多数定理的证明大都属“与门”系统，故上例证明属与门系。

在阅读本书时，请先熟悉上述证法语言。为了使读者掌握这种方法，在本书一些命题的推证时，我们将同时采用传统的证明方法及框图证法。在结束每一章的学习时，应根据自己的体会补充该章的总框图，以加深其系统性及对内容的理解。

第一章 内容总框图



第一章 随机事件与概率

概率论是研究随机现象统计规律的一门学科。由于随机现象在客观世界中广泛存在，所以，概率论在自然科学和社会科学中得到广泛的应用。

§ 1.1 随机事件及其运算

一、客观现象的分类及其直观意义

在社会科学和自然科学的研究中，随着人们认识的不断深入，将观察到的大量现象，分成了三种类型。

1. 确定型

必然现象：在一定条件下，其结论是确定的。或是知道它们过去的状态，在条件相同下，能确切地推知其未来的发展。例如纯水在标准压力下升温到 100°C 时，必然沸腾。在直流线性电路中，其电流强度 I 、电压 V 、电阻 R ，一定遵从欧姆定律 $I = V/R$ 。

不可能现象：在一定条件下，现象必不发生。例如纯水在标准压力下温度低于 100°C 时，必不沸腾。

因此在确定型中，必然现象和不可能现象是对某一过程，用两种对立的方式进行描述的。早期的科学仅限于研究这一类现象的规律性，所应用的数学工具，如几何、代数、数学分析和微分方程等，就是所谓确定性模型的数学，这些都是大家所熟悉的。但是随着生产的发展，人们逐渐发现，有大量现象是有别于确定型的。

2. 随机型

随机现象：在条件相同下作重复观察，其每次结果未必相同。或者知道它过去的状态，在相同条件下观察其未来的发展，事前却不能完全肯定。例如：

(1) 在平地上抛掷一枚均匀对称的硬币，可能出现正面，也可能出现反面。

(2) 某电话交换台，在一小时内可能接到的呼唤次数为0、1、2、…

(3) 当空气阻力不能忽视时，弹道不能完全由初始条件确定，它可能有各种不同方向的偏离。

这类现象都是由偶然因素决定的，叫偶然现象——随机现象。随机现象和必然现象有本质的区别。此外，在客观世界中还有一种过去一直被人们忽视的所谓模糊现象。

3. 模糊型

模糊现象：在一定条件下即将发生的现象。介于肯定发生与必不发生之间，没有明确的界线。例如：

(1) 请班上个子高的学生都去植树，而矮的学生都去打扫教室，这时一定会使一部分学生为难，因为高和矮的标准是一个相对的概念，是一个模糊现象。

(2) 撞击一个火帽可能起爆，也可能不起爆，那是随机的。但也可能出现“半爆”，所谓“半爆”是没有明确界线的，因此“半爆”是一种模糊现象。

研究这类问题的数学，即称之为模糊数学，它诞生于1965年，创始人是美国自动控制专家理查德教授。

随机现象从简单的日常生活，到复杂的工业生产和国防建设都是广泛存在的。起初人们对这些现象称为偶然现象，认为它是“不正规的”，或是“异乎寻常的”。这些偶然现象是否就没有什么规律性？事实并非如此，人们通过长期反

复观察和实践，逐渐发现那些随机现象的发生所谓事前是不可预言，只是对一次或少数几次观察或实践而言。当进行大量观察时，随机现象将呈现某种规律性。为了研究这个问题，一些数学家从抛掷一个均匀对称的硬币进行了大量的观察，其结果列表于1.1.1。

表1.1.1

实验者	投掷次数n	正面朝上的次数r(频数)	频率= r/n
迪摩根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005

在这个例子中，当投掷的次数不断增加时，出现正面与反面的比例接近1:1，因而也是有规律性的。由此可知，表面上是偶然性起作用的地方，实际上这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律性所支配。这种在条件相同下进行大量重复观察时，所得结果呈现出的某种规律性，称为随机现象的统计规律性。

概率论与数理统计就是运用数学工具，研究随机现象统计规律性的一门数学学科。它是属于非确定型的数学。概率论作为一门数学，有它的基本概念和术语，我们将按本章总框图的研究。

二、随机试验与事件

(1) 试验：对自然现象进行观察、或进行一次实践的统称。

(2) 随机试验：在条件相同下进行重复试验，而试验的结果均为事先不能唯一确定。