中国科学院研究生教学丛书

微分方程数值解法

余德浩　汤华中 编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书为《中国科学院研究生教学丛书》之一.

本书内容包括常微分方程初边值问题数值解法、偏微分方程的差分方法、偏微分方程和边界积分方程的有限元方法和边界元方法.本书选材力求通用新颖,叙述力求深入浅出,既介绍了在科学和工程计算中常用的计算方法,又包含了近年来研究的进展,还有作者的若干研究成果.

本书可作为高等院校理工科高年级学生和研究生的教材或参考书,也可作为计算数学工作者和从事科学与工程计算人员的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

微分方程数值解法/余德浩,汤华中编著.—北京:科学出版社,2003.10

(中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编)

ISBN 7-03-011312-8

Ⅰ.微… Ⅱ.①余… ②汤… Ⅲ.微分方程解法-数值计算-研究生-教材 Ⅳ.O241.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022760 号

责任编辑:鄢德平 杨 波/责任校对:柏连海

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年10月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2003年10月第一次印刷 印张:15 1/4

印数:1—3 000 字数:396 000

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《中国科学院研究生教学丛书》序

在21世纪曙光初露，中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际，《中国科学院研究生教学丛书》——这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了.相信这套丛书的出版，会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难，对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

21世纪将是科学技术日新月异，迅猛发展的新世纪，科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力，成为经济和社会发展的首要推动力量.世界各国之间综合国力的竞争，实质上是科技实力的竞争.而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量.我国要想在21世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略，实现邓小平同志规划的第三步战略目标——把我国建设成为中等发达国家，关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军，这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心，在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨，长期坚持走科研与教育相结合的道路，发挥了高级科技专家多，科研条件好，科研水平高的优势，结合科研工作，积极培养研究生.当前，中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示，在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时，加强研究生教育，努力建设好高级人才培养基地，在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时，为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命，全面提高研究生培养质量是当前

我国研究生教育的首要任务.研究生教材建设是提高研究生培养质量的一项重要的基础性工作.由于各种原因,目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展.为了改变这种情况,中国科学院组织了一批在科学前沿工作,同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材,并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版.希望通过数年努力,出版一套面向21世纪科技发展、体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书.本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性,同时也兼顾前沿性,使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识,也能被引导进入当代科学研究的前沿.这套研究生教学丛书,不仅适合于在校研究生学习使用,也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言,下自成蹊.”我相信,通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘,《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花,也将似润物春雨,滋养莘莘学子的心田,把他们引向科学的殿堂,不仅为科学院,也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

路甬祥

前　言

科学与工程中的许多问题都可用线性或非线性微分方程来描述，这些微分方程中只有很少一部分可以给出解析解，而绝大多数则必须通过近似方法求解，包括借助计算机进行数值求解. 随着计算机软硬件的不断更新和计算方法的迅猛发展，科学计算和实验以及理论研究成为现代科学研究的三大主要手段. 科学计算还能解决实验及理论无法解决的问题，并由此发现一些新的物理现象，加深人们对物理机理的理解和认识，促进科学的发展.

当代科学计算已渗透到极其广泛的专业领域中，形成了许多新的边缘学科，如计算物理学、计算力学、计算流体力学、计算化学、计算生物学、计算材料科学和计算经济学等，而计算数学正是联系它们的纽带和共同的基础. 因此，不仅数学工作者要学习和掌握微分方程数值解法的知识，其它理工科专业的科技工作者也迫切需要学习和掌握微分方程数值解法的知识，以便结合自身专业开展与科学工程计算相关的研究工作.

本书是在作者原有讲义的基础上编写而成的. 该讲义积累了作者十几年的教学经验，并不断吸收近几年国内外发展的一些新算法和新理论，同时也融合了作者本人的一些相关的科研成果.

本书内容丰富、比较全面，取材力求典型、通用和新颖，既重视基础理论和基本训练，又有一定的理论深度. 为了面向更多的读者，本书避免了过多的抽象数学理论分析，但又自成系统. 书中每章后面都配有一定数量的习题，可供读者练习和上机实习. 阅读本书，仅需数学分析、高等代数、数学物理方程及计算机程序设计等方面的基础知识. 全书共分 6 章，其中前面 4 章由汤华中编写，后面两章由余德浩编写. 第一章介绍常微分方程初值、边值问题的数值解法，着重介绍一些典型的离散方法，包括 Euler 方法、Runge-

Kutta 方法、一般线性多步方法和 Hamilton 系统的辛几何算法，对算法的稳定性和收敛性等基本问题也做了分析. 第二、三、四章分别介绍抛物型、双曲型和椭圆型偏微分方程的初值、边值问题的有限差分法. 内容包括有限差分方法的构造、数值方法的稳定性分析、收敛性理论和基本的迭代方法. 第五章和第六章则分别介绍有限元方法及边界元方法. 其中除了介绍经典的方法外，也简要介绍了自适应有限元、自然边界元及区域分解算法等较新的内容.

中国科学院及中国科学技术大学北京研究生院的领导对本书的写作给予了热情的鼓励和支持. 此外，本书在编写过程中也得到了中国科学院数学与系统科学研究院，计算数学与科学工程计算研究所和科学与工程计算国家重点实验室领导和同事的大力支持和帮助. 作者在这里向他们表示衷心的感谢. 我们还要特别感谢中国科学院研究生教材出版基金的资助，正是这一资助使本书得以顺利出版.

由于时间仓促，加之我们水平有限，本书不可避免存在错误和不足之处，敬请读者批评指正.

编著者

于北京

目　录

第一章 常微分方程初、边值问题数值解法

§1.1 引 言

微分方程和微积分是同时问世的. Newton 在 1671 年的一篇关于微积分的论文中就已涉及,并用积分和级数讨论了微分方程的近似求解.他研究的第一个一阶微分方程是

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy.$$

微积分的另一发明者(Leibniz)约于 1676 年讨论了一个几何问题——反切向问题. 它的数学模型是

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Euler (1744) 利用二阶微分方程

$$f_{y'y'}y'' + f_{y'y}y' + f_{y'x} - f_y = 0,$$

给出了极小问题:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx = \min$$

的一般解. Clairaut(1734)研究一个长方形框的移动时,建立了如下数学模型:

$$y - xy' + f(y') = 0,$$

这是第一个隐式微分方程. 这个方程在某些点处存在着许多可能的不同解曲线,例如,直线族 $y = Cx - f(C)$和它们的包络曲线,其中 C 为任意常数.

总之,在生产实际和其它数学分支中,都会不断地遇到常微分方程,而在这些方程中,仅有很少的一部分能通过初等积分法给出其通解或通积分. 这促使数学工作者从理论上去探讨它们的解析解,工程师们从渐近分析角度去研究它们的渐近解,但无论是

理论分析还是渐近分析均存在着一定的局限性.

在计算机迅猛发展的今天,微分方程的数值求解越来越受到重视. 一方面,借助计算机,一些超大规模问题和原来无法通过初等积分和渐近方法求解的问题能得以求解;另一方面,借助于数值方法,也可以简化一些问题的理论分析. 当然数值模拟最终还必须用理论和实验来检验.

本章将主要介绍离散一阶常微分方程初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad x \in [a,b], \tag{1.1.1}$$

$$y(a) = y_0 \tag{1.1.2}$$

的数值方法,其中 f 是 x 和 y 的已知函数, y_0 是给定的初始值, 同时也将简单介绍求解常微分方程边值问题和刚性常微分方程组的计算方法, 以及 Hamilton 系统的辛几何算法.

在介绍数值方法之前, 我们要问:给定的初值问题是否有解, 解是否惟一? 对于初值问题(1.1.1)和(1.1.2),我们有下述定理.

定理 1.1.1 如果方程(1.1.1)中的右端函数 $f(x,y)$ 满足:

(i) $f(x,y)$ 是实值函数,

(ii) 函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $\Omega = \{(x,y) \mid x \in [a,b], \ y \in (-\infty,\infty)\}$ 内连续,

(iii) $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件: 即存在正常数 L, 使得对任意 $x \in [a,b]$,均成立不等式

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \tag{1.1.3}$$

则问题(1.1.1)和(1.1.2)存在惟一的解 $y(x) \in C^1[a,b]$.

另一个值得关心的问题是: 初始值引起小挠动时,对微分方程解是否有影响,影响程度有多大? 即初值问题的适定性问题:

定义 1.1.1 称初值问题(1.1.1)和(1.1.2)对初值 y_0 是**适定的**,如果存在常数 $K>0$, $\eta>0$, 使得当 $\forall \varepsilon \leqslant \eta$, 及

$$|y_0 - \tilde{y}_0| < \varepsilon, \quad |f(x,y) - \tilde{f}(x,y)| < \varepsilon, \quad (x,y) \in \Omega \tag{1.1.4}$$

时, 初值问题

$$\frac{dz}{dx}=\tilde{f}(x,z),\quad z(x_0)=\tilde{y}_0 \tag{1.1.5}$$

有解存在，且满足$|y(x)-z(x)|\leqslant K\epsilon$，这里$y(x)$表示问题(1.1.1)和(1.1.2)的解.

该定义刻画了微分方程的解对初始值的连续依赖关系.

定理 1.1.2 如果方程(1.1.1)中的右端函数$f=f(x,y)$在区域Ω上满足 Lipschitz 条件(1.1.3)，则初值问题(1.1.1)和(1.1.2)对任何初值y_0都是适定的.

上述结论的证明可参阅有关微分方程理论的教材.

下面以初值问题(1.1.1)和(1.1.2)为例简单地说明建立数值方法的基本思想. 初值问题(1.1.1)和(1.1.2)的解$y(x)$是区间$[a,b]$上连续变量x的函数，而计算该连续问题的数值解就是在区间$[a,b]$上的有限个离散点(例如$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$)处计算函数$y(x)$的近似值，即$y(x_m)\approx y_m$ $(m=1,2,\cdots,N)$. 通常取x_0，x_1，…，x_N是等距的，即$x_m=a+mh$ $(m=0,1,\cdots,N)$，$h=(b-a)/N$称为步长. 建立数值方法的过程也就是通过一定的手段将连续性的问题(1.1.1)和(1.1.2)转化为在给定的有限个离散结点$\{x_m\}$上的近似差分或有限元方程的初值问题，这个过程通常称为**数值离散**. 数值离散的方法通常有直接化微商为差商的方法，Taylor 级数展开法，数值积分方法等，它们将在后面的章节中介绍，这里不作专门介绍.

解常微分方程初值问题(1.1.1)和(1.1.2)的数值方法通常可分为两类：

(1) 单步法——计算$y(x)$在$x=x_{m+1}$处的值仅取决于x_m处的应变量及其导数值. 例如 Euler 方法(§1.2)和 Runge-Kutta 方法(§1.3).

(2) 多步法——计算$y(x)$在$x=x_{m+1}$处的值需要应变量及其导数在x_{m+1}之前的多个网格结点处的值. 例如线性多步方法(§1.4).

§1.2 Euler 方法

1.2.1 Euler 方法及其几何意义

仍然考虑初值问题(1.1.1)和(1.1.2). 由于 $y(a)$已知,则根据方程(1.1.1),我们可以计算出 $y'(x)$在点 $x_0 \equiv a$ 处的值,即 $y'(x_0)=f(x_0, y_0)$. 如果假设 $x_1=x_0+h, 0<h\ll 1$,则近似地有

$$y(x_1) \approx y_0 + hy'(x_0). \tag{1.2.1}$$

因此可以用

$$y_1 := y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{1.2.2}$$

作为 $y(x)$在点 x_1 处的近似值. 类似地,应用已经计算的 y_1 和 $f(x_1, y_1)$又可以计算出 $y(x)$在 $x_2=x_0+2h$ 处的近似值

$$y(x_2) \approx y_2 := y_1 + hf(x_1, y_1). \tag{1.2.3}$$

一般地,如果已知 $y(x)$在 $x_m=x_0+mh$ ($m=0,1,\cdots$)处的精确值或近似值,则可近似地给出计算 $y(x_{m+1})$的近似公式

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m), \tag{1.2.4}$$

这就是离散初值问题(1.1.1)和(1.1.2)的 **Euler 方法**.

Euler 方法有着明显的几何意义:事实上,方程(1.1.1)的解是 $x-y$ 平面上的一族积分曲线,而曲线上任意点(x, y)处的斜率为 $f(x, y)$,过点(x_0, y_0)的积分曲线就是初值问题(1.1.1) 和(1.1.2)的解. 如果在点(x_0, y_0)处引积分曲线 l_0 的斜率是 $f(x_0, y_0)$的切线,则该切线在 $x_1=x_0+h$ 处将与另一条积分曲线 l_1 相交,交点的纵坐标记为 y_1. 类似地,在点(x_1, y_1)处引曲线 l_1 的斜率是 $f(x_1, y_1)$ 的切线,那么此切线在 $x_2=x_1+h$ 处又将与另一条积分曲线 l_2 相交,交点的纵坐标记为 y_2. 依此类推,过点(x_0, y_0)的积分曲线就可以用上面得到的一条折线$(x_0, y_0)\leftrightarrow(x_1, y_1)\leftrightarrow\cdots\leftrightarrow(x_m, y_m)\leftrightarrow(x_{m+1}, y_{m+1})\leftrightarrow\cdots$来近似地代替(参见图 1.1).